

# CFIS

## Processos Estocàstics

20 de desembre de 2013

Examen

Temps: 2h

---

1. Calculeu el valor mitjà i l'autocorrelació del procés estocàstic  $X(t) = \cos(t + 2Y)$  en els dos casos següents:

- (a)  $Y$  és una variable aleatòria uniforme en  $[0, \pi]$ ;
- (b)  $Y$  és una variable aleatòria discreta que pren els valors  $0, \pi/2, i \pi$  amb la mateixa probabilitat.

Justifiqueu en cada cas si es tracta o no d'un procés estacionari en sentit ampli. (3 punts)

---

*Solució:*

(a) Sabem que  $Y$  és una variable aleatòria uniforme en  $[0, \pi]$ . Per tant,

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & y \in [0, \pi] \\ 0, & \text{altrament} \end{cases}$$

Així,

$$m_X(t) = E(\cos(t + 2Y)) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(t + 2y) f_Y(y) dy = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(t + 2y) dy = 0.$$

$$R_X(t, t + \tau) = E(\cos(t + 2Y) \cos(t + \tau + 2Y))$$

$$= E\left(\frac{\cos(\tau)}{2} + \frac{\cos(2t + \tau + 4Y)}{2}\right) = \frac{\cos(\tau)}{2} + E\left(\frac{\cos(2t + \tau + 4Y)}{2}\right) = \frac{\cos(\tau)}{2},$$

ja que

$$E\left(\frac{\cos(2t + \tau + 4Y)}{2}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(2t + \tau + 4y)}{2} f_Y(y) dy = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \cos(2t + \tau + 4y) dy = 0.$$

El procés és estacionari en sentit ampli.

(b) En aquest segon cas  $Y$  és una variable aleatòria discreta tal que

$$P(Y = 0) = P(Y = \pi/2) = P(Y = \pi) = \frac{1}{3}.$$

Per tant,

$$\begin{aligned} m_X(t) &= E(\cos(t + 2Y)) = \frac{1}{3} \cos(t) + \frac{1}{3} \cos(t + \pi) + \frac{1}{3} \cos(t + 2\pi) \\ &= \frac{1}{3} \cos(t) - \frac{1}{3} \cos(t) + \frac{1}{3} \cos(t) = \frac{1}{3} \cos(t) \end{aligned}$$

Anàlogament,

$$\begin{aligned} R_X(t, t + \tau) &= E(\cos(t + 2Y) \cos(t + \tau + 2Y)) \\ &= \frac{1}{3} \cos(t) \cos(t + \tau) + \frac{1}{3} \cos(t + \pi) \cos(t + \tau + \pi) + \frac{1}{3} \cos(t + 2\pi) \cos(t + \tau + 2\pi) \\ &= \cos(t) \cos(t + \tau). \end{aligned}$$

El procés no és estacionari.

---

2. Calculeu el valor mitjà i l'autocorrelació del procés estocàstic  $X(t) = At + B$ , on  $A, B$  són variables aleatòries independents d'esperança 0 i variància  $\sigma^2$ . Determineu la millor estimació lineal de  $X(t_1)$  donat  $X(t_2)$ , on  $t_1 \neq t_2$ , i calculeu l'error quadràtic mitjà d'aquesta estimació. **(3 punts)**
- 

*Solució:* Calculem primer el valor mitjà i l'autocorrelació de  $X(t)$ . Tenim

$$m_X(t) = E(At + B) = t E(A) + E(B) = 0,$$

$$\begin{aligned} R_X(t_1, t_2) &= E(X(t_1)X(t_2)) = E((At_1 + B)(At_2 + B)) \\ &= t_1 t_2 E(A^2) + (t_1 + t_2)E(AB) + E(B^2) = \sigma^2 t_1 t_2 + (t_1 + t_2)E(A)E(B) + \sigma^2 = \sigma^2(t_1 t_2 + 1). \end{aligned}$$

L'estimador lineal de  $X(t_1)$  donat  $X(t_2)$  és de la forma

$$\widehat{X(t_1)} = \alpha X(t_2) + \beta.$$

Com que  $m_X(t) = 0$ , les variables aleatòries  $X(t_1), X(t_2)$  tenen esperança 0 i, per tant,  $\beta = 0$ . D'altra banda, pel principi d'ortogonalitat s'ha de complir

$$E\left(\left(X(t_1) - \widehat{X(t_1)}\right) X(t_2)\right) = 0.$$

És a dir,

$$E\left(\left(X(t_1) - \alpha X(t_2)\right) X(t_2)\right) = R_X(t_1, t_2) - \alpha R_X(t_2, t_2) = 0.$$

Per tant,

$$\alpha = \frac{R_X(t_1, t_2)}{R_X(t_2, t_2)} = \frac{\sigma^2(t_1 t_2 + 1)}{\sigma^2(t_2^2 + 1)} = \frac{t_1 t_2 + 1}{t_2^2 + 1}.$$

Així,

$$\widehat{X(t_1)} = \frac{t_1 t_2 + 1}{t_2^2 + 1} X(t_2).$$

L'error quadràtic mitjà val:

$$\begin{aligned} \epsilon &= E\left(\left(X(t_1) - \widehat{X(t_1)}\right)^2\right) = E\left(\left(X(t_1) - \frac{t_1 t_2 + 1}{t_2^2 + 1} X(t_2)\right)^2\right) \\ &= R_X(t_1, t_1) - \frac{R_X(t_1, t_2)^2}{R_X(t_2, t_2)} = \sigma^2 \left( (t_1^2 + 1) - \frac{(t_1 t_2 + 1)^2}{t_2^2 + 1} \right) = \frac{(t_1 - t_2)^2}{t_2^2 + 1} \sigma^2. \end{aligned}$$

---

3. Sigui  $X(t)$  un procés de Poisson de taxa  $\mu$ . Calculeu les funcions de distribució i de densitat de probabilitat del temps  $T$  transcorregut fins a la quarta transició. (Recordeu que  $F_T(t) = P(T \leq t)$ .) **(2 punts)**
- 

*Resolució:*

Observeu que l'esdeveniment  $\{T \leq t\}$  equival a que en  $(0, t]$  s'han produït 4 o més transicions del procés de Poisson. Per tant,

$$\begin{aligned} F_T(t) &= P(T \leq t) = P(X(t) \geq 4) = 1 - (P(X(t) = 0) + P(X(t) = 1) + P(X(t) = 2) + P(X(t) = 3)) \\ &= 1 - e^{-\mu t} \left( 1 + \mu t + \frac{(\mu t)^2}{2} + \frac{(\mu t)^3}{6} \right), \quad t > 0. \end{aligned}$$

La densitat de probabilitat és la derivada de la funció de distribució:

$$\begin{aligned} f_T(t) &= F_T'(t) \\ &= \mu e^{-\mu t} \left( 1 + \mu t + \frac{(\mu t)^2}{2} + \frac{(\mu t)^3}{6} \right) - e^{-\mu t} \left( \mu + \mu^2 t + \frac{(\mu t)^2}{2} \right) = \mu e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^3}{6}, \quad t > 0. \end{aligned}$$

---

4. Escolliu **una** de les qüestions teòriques següents:

- (a) Processos estacionaris.
- (b) Ergodicitat en valor mitjà.
- (c) Processos gaussians.

**(2 punts)**