

Enginyeria Superior de Telecomunicacions
Probabilitat i Processos Estocàstics
&
Resolució Examen final, 9 juny 2011

1a Donats tres esdeveniments A, B, C , es demana:

(a) Demostreu que es compleixen les igualtats

$$P(A \cap B \cap C) = P(B \cap C) - P([B \setminus A] \cap C) = P(A \cap C) - P([A \setminus B] \cap C).$$

(b) Si C és independent de A i de B , aleshores, demostreu que C és independent de $A \setminus B$ si i només si C és independent de $B \setminus A$. (Sugerència: Utilitzeu el resultat del apartat (a)).

1b Una font emet, a intervals regulars de temps, les 'paraules' 0, 1, 00, 01, 10 i 11 amb probabilitats $P(0) = 0.2$, $P(1) = 0.3$, i $P(00) = P(01) = P(10) = 0.1$. Siguin A l'esdeveniment "s'ha emès 11, 11 i 11" (durant 3 intervals succesius) i B l'esdeveniment "s'ha emès 111111 (durant 3 o més intervals succesius).

(a) Calculeu les probabilitats $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$, $P(A|B)$ i $P(B|A)$.

(b) Calculeu el nombre mitjà de dígit 1 que apareixen després d'emetre N paraules. Idem pel nombre mitjà de 0. Interpreteu els resultats.

Resolució:

1a (a) Notem que $B \setminus A = B \cap \bar{A}$. Aleshores, la primera igualtat s'obté de considerar la partició $B \cap C = [B \cap C \cap A] \cup [B \cap C \cap \bar{A}]$, que implica:

$$P(B \cap C) = P(B \cap C \cap A) + P(B \cap C \cap \bar{A}) = P(A \cap B \cap C) + P([B \setminus A] \cap C).$$

La segona igualtat s'obté de la mateixa forma intercanviant els papers de A i B .

(b) Suposem que C és independent de $A \setminus B$. Aleshores, utilitzant el resultat del apartat (a),

$$\begin{aligned} P([B \setminus A] \cap C) &= P(B \cap C) - P(A \cap C) + P([A \setminus B] \cap C) \\ &= P(C)[P([A \setminus B]) + P(B) - P(A)] \\ &= P(C)[P(B \cup A) - P(A)] = P(C)P(B \setminus A) \end{aligned}$$

i, per tant, C és independent de $B \setminus A$. L'altre implicació es dedueix de la mateixa manera intercanviant A i B .

1b (a) Primer, notem que $P(11) = 1 - P(0) - P(1) - P(00) - P(01) - P(10) = 0.2$.

Amb $a = P(11)$ i $b = P(1)$ tenim:

- $P(A) = a^3$.
- $P(B) = a^3 + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{5}{1}ab^4 + b^6$.
- $P(A \cap B) = P(A)$ (ja que $A \subset B$).
- $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)}$.
- $P(B|A) = 1$.

(b) Siguin X_i i Y_i les variables aleatòries que denoten, respectivament, els nombres de 1 i 0 que té la paraula i -èssima, $i = 1, 2, \dots, N$, amb mitjanes

$$\begin{aligned} E(X_i) &= 1 \cdot P(1) + 1 \cdot P(01) + 1 \cdot P(10) + 2 \cdot P(11) = 0.9 \\ E(Y_i) &= 1 \cdot P(0) + 1 \cdot P(01) + 1 \cdot P(10) + 2 \cdot P(00) = 0.6. \end{aligned}$$

Per tant, el nombres mitjans d'1 i de 0 que tenen N paraules són, respectivament,

$$E\left(\sum_{i=0}^N X_i\right) = \sum_{i=0}^N E(X_i) = 0.9N, \quad E\left(\sum_{i=0}^N Y_i\right) = \sum_{i=0}^N E(Y_i) = 0.6N.$$

Notem que $0.9N + 0.6N = 1.5N$, on $1.5 = 1 \cdot 0.5 + 2 \cdot 0.5$ és el nombre mitjà de dígitos d'una paraula.

2 A partir de les variables aleatòries X, Y exponencials independents de paràmetre λ es consideren la seva suma $S = X + Y$ i la seva resta $R = X - Y$. Es demana calcular:

- La funció de densitat de S a partir de f_X i f_Y , i la seva mitjana m_S .
- La funció de densitat de la variable aleatòria conjunta (S, R) amb la seva regió de validesa.
- Les funcions de densitat de les variables aleatòries marginals S i R . Són independents?
- L'autocovariància de S, R . Són incorrelades?

Resolució:

- Com X, Y són independents, la funció de densitat f_S de la seva suma és la convolució de les respectives funcions de densitat f_X i f_Y . Per tant,

$$\begin{aligned} f_S(s) &= (f_X * f_Y)(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(\sigma) f_Y(s - \sigma) d\sigma = \lambda^2 \int_0^s e^{-\lambda\sigma} e^{-\lambda(s-\sigma)} d\sigma \\ &= \lambda^2 \int_0^s e^{-\lambda\sigma} e^{-\lambda(s-\sigma)} d\sigma = \lambda^2 e^{-\lambda s} \int_0^s d\sigma = \lambda^2 s e^{-\lambda s}, \quad s > 0, \end{aligned}$$

amb mitjana $m_S = E(S) = E(X + Y) = E(X) + E(Y) = \frac{2}{\lambda}$.

- Com X, Y són independents, $f_{XY}(x, y) = f_X(x) f_Y(y) = \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)} = \lambda^2 e^{-\lambda s}$. Llavors,

$$f_{SR}(s, r) = \frac{f_{XY}(x, y)}{\left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial s}{\partial x} & \frac{\partial s}{\partial y} \\ \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \end{pmatrix} \right|} = \frac{\lambda^2 e^{-\lambda s}}{\left| \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right|} = \frac{1}{2} \lambda^2 e^{-\lambda s}, \quad s > 0, \quad |r| < s.$$

- Calculem les funcions de densitat de les marginals:

$$\begin{aligned} f_S(s) &= \int_{-s}^s f_{SR}(s, r) dr = \dots = \lambda^2 s e^{-\lambda s}, \quad s > 0 \quad (\text{com a l'apartat (a)}) \\ f_R(r) &= \left\{ \begin{array}{l} \int_{-r}^{\infty} f_{SR}(s, r) ds = \dots = \frac{1}{2} \lambda e^{-\lambda r}, \quad r < 0 \\ \int_r^{\infty} f_{SR}(s, r) ds = \dots = \frac{1}{2} \lambda e^{\lambda r}, \quad r > 0 \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \lambda e^{-\lambda|r|}, \quad r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Com $f_{XY}(x, y) \neq f_X(x) f_Y(y)$, les variables aleatòries X, Y **no** són independents.

- Calculem la covariància:

$$\begin{aligned} \mu_{11;SR} &= E(SR) - E(S)E(R) = E[(X + Y)(X - Y)] - [E(X + Y)][E(X - Y)] \\ &= E(X^2) - E(Y^2) - E^2(X) + E^2(Y) = \sigma_X^2 - \sigma_Y^2 = 0, \end{aligned}$$

per tant són incorrelades.

3 Es consideren els processos $X(t)$, Poisson de paràmetre (o taxa) λ , i

$$Y(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } X(t) \geq 1 \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases}$$

Calculeu:

- El valor de t que maximitza la probabilitat $P(X(t) = k)$.
- L'estadística de 2n ordre de $X(t)$ i de 1er ordre de $Y(t)$ (és a dir, la funció de probabilitat conjunta de $(X(t_1), X(t_2))$ i la funció de probabilitat de $Y(t)$).
- Les funcions de valor mitjà, d'autocorrelació i d'autocovariància del procés $Y(t)$. És un procés estacionari en sentit ampli?
- Trobeu la millor estimació lineal de $Y(t_2)$ donada $Y(t_1)$ quan $t_2 \geq t_1$. Interpreteu el resultat en els casos $Y(t_1) = 1$, $t_2 \rightarrow t_1$, $t_2 \rightarrow 0$ i $t_2 \rightarrow \infty$.

Resolució:

(a) En primer lloc observeu que la probabilitat $P(X(t) = 0) = e^{-\lambda t}$ pren el seu valor màxim en $t = 0$.

Per a $k \geq 1$ sigui

$$g_k(t) = P(X(t) = k) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}, \quad t > 0$$

(Considerem $t > 0$ ja que $P(X(0) = k) = 0$.)

Tenim

$$g'_k(t) = -\lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} + e^{-\lambda t} \lambda \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} \left(1 - \frac{\lambda t}{k}\right)$$

Per tant, la derivada s'anul·la per a $t = k/\lambda$, que és el valor de t que maximitza $P(X(t) = k)$.

(b) El procés $Y(t)$ només pren els valors 0 i 1. La seva funció de probabilitat de primer ordre val

$$P(Y(t) = 0) = P(X(t) = 0) = e^{-\lambda t}, \quad P(Y(t) = 1) = 1 - P(Y(t) = 0) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

(c) Tenim

$$m_Y(t) = E(Y(t)) = P(Y(t) = 1) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Calculem ara l'autocorrelació. Si $t_1 \leq t_2$ tenim

$$\begin{aligned} R_Y(t_1, t_2) &= E(Y(t_1)Y(t_2)) = P(Y(t_1) = 1, Y(t_2) = 1) \\ &= P(X(t_1) \geq 1, X(t_2) \geq 1) = P(X(t_1) \geq 1) = 1 - P(X(t_1) = 0) = 1 - e^{-\lambda t_1} \end{aligned}$$

Per tant, en general,

$$R_Y(t_1, t_2) = 1 - e^{-\lambda \min(t_1, t_2)}$$

$$K_Y(t_1, t_2) = R_Y(t_1, t_2) - m_Y(t_1)m_Y(t_2) = \begin{cases} e^{-\lambda t_2} - e^{-\lambda(t_1+t_2)}, & t_1 \leq t_2 \\ e^{-\lambda t_1} - e^{-\lambda(t_1+t_2)}, & t_1 > t_2 \end{cases}$$

No és tracta d'un procés estacionari (ni tant sols en sentit ampli).

(d) Sigui

$$\widehat{Y}(t_2) = aY(t_1) + b, \quad t_2 \geq t_1.$$

Platejant les equacions ortogonals tenim

$$0 = E\left(Y(t_2) - \widehat{Y}(t_2)\right) = m_Y(t_2) - am_Y(t_1) - b = (1 - e^{-\lambda t_2}) - a(1 - e^{-\lambda t_1}) - b$$

$$\begin{aligned}
0 &= E\left(\left(Y(t_2) - \widehat{Y}(t_2)\right)Y(t_1)\right) = R_Y(t_1, t_2) - aR_Y(t_1, t_1) - bm_Y(t_1) \\
&= (1 - e^{-\lambda t_1}) - a(1 - e^{-\lambda t_1}) - b(1 - e^{-\lambda t_1}).
\end{aligned}$$

Per la segona equació $b = 1 - a$. Substituint a la primera trobem $a = e^{-\lambda(t_2-t_1)}$. Així,

$$\widehat{Y}(t_2) = e^{-\lambda(t_2-t_1)}(Y(t_1) - 1) + 1.$$

- Si $Y(t_1) = 1$, aleshores $Y(t_2) = 1$. Observeu que, en aquest cas, $\widehat{Y}(t_2) = 1$. És a dir, $\widehat{Y}(t_2) = Y(t_2)$. L'estimador recupera sense error la variable que s'està estimant.
- Si $t_2 \rightarrow t_1$ tenim $\widehat{Y}(t_2) \rightarrow Y(t_1)$. També, en el límit, l'estimador recupera sense error la variable que s'està estimant.
- Si $t_2 \rightarrow 0$, aleshores també $t_1 \rightarrow 0$ i tenim $\widehat{Y}(t_2) \rightarrow Y(0) = 0$.
- Finalment, si $t_2 \rightarrow \infty$, aleshores $\widehat{Y}(t_2) \rightarrow 1$. (Noteu que $Y(t)$ ja val 1 a partir de la primera transició del procés de Poisson $X(t)$.)

(a) $t = k/\lambda$.

$$\begin{aligned}
(b) \quad P_{X(t_1)X(t_2)}(k_1, k_2) &= e^{-\lambda t_1} \frac{(\lambda t_1)^{k_1}}{k_1!} e^{-\lambda(t_2-t_1)} \frac{[\lambda(t_2-t_1)]^{k_2-k_1}}{(k_2-k_1)!} = \dots, \quad t_1 \leq t_2, \quad k_1 \leq k_2. \\
P_{Y(t)}(0) &= e^{-\lambda t}, \quad P_{Y(t)}(1) = 1 - e^{-\lambda t}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(c) \quad m_Y(t) &= 1 - e^{-\lambda t}, \quad R_Y(t_1, t_2) = 1 - e^{-\lambda \min\{t_1, t_2\}}. \\
K_Y(t_1, t_2) &= R_Y(t_1, t_2) - m_Y(t_1)m_Y(t_2). \\
&\text{No és estacionari en mitjana o en autocorrelació.}
\end{aligned}$$

$$(d) \quad \widehat{Y}(t_2) = [Y(t_1) - 1]e^{-\lambda(t_2-t_1)} + 1.$$