

Enginyeria Superior de Telecomunicacions

Probabilitat i Processos Estocàstics

Examen final, 26 juny 2009
Notes provisionals: 1 juliol 2009

Temps: 3h
Data límit per a alegacions: 2 juliol 2009

1. Un dispositiu de comunicació consta de 8 línies paral·leles. Un sistema de verificació tria 3 de les línies a l'atzar i les comprova. Si funcionen bé es decideix que el dispositiu no té cap problema, mentre que si alguna de les línies comprovades està malament es revisa tot el dispositiu.
- Donat que k línies funcionen malament ($k = 0, 1, \dots, 8$), calculeu la probabilitat que el sistema de verificació no detecti cap problema (doneu l'expressió general en funció de k i els valors numèrics pels diferents valors de k).
 - Una sobrecàrrega fa que un nombre aleatori K de línies deixin de funcionar, de manera que la probabilitat que aquest nombre valgui k és la mateixa per a tot $0 \leq k \leq 8$. Calculeu la probabilitat que hi hagi alguna línia defectuosa sabent que el sistema de verificació no ha detectat cap problema. Compareu-la amb la mateixa probabilitat sense fer la verificació.
 - Considereu ara que la sobrecàrrega afecta independentment a cada línia de manera que cadascuna pot quedar avariada amb probabilitat $\frac{1}{3}$. El sistema segueix funcionant si com a molt té dues línies avariades. Calculeu la probabilitat que el sistema deixi de funcionar.
 - Quin és el nombre mitjà i la desviació del nombre de línies avariades en cadascun dels dos apartats anteriors?

Solució:

- (a) Sigui V l'esdeveniment "el sistema de verificació no detecta cap problema" i K la variable aleatòria que dona el nombre de línies avariades. Podem triar les tres línies de $\binom{8}{3}$ maneres. Si ninguna ha d'estar avariada, tenim $\binom{8-k}{3}$ maneres de triar-les. Llavors,

$$P(V|K = k) = \frac{\binom{8-k}{3}}{\binom{8}{3}} = \frac{(8-k)(7-k)(6-k)}{8 \cdot 7 \cdot 6},$$

de manera que $P(V|K = 0) = 1$, $P(V|K = 1) = 5/8$, $P(V|K = 2) = 5/14$, $P(V|K = 3) = 5/28$, $P(V|K = 4) = 1/14$, $P(V|K = 5) = 1/56$, i $P(V|K = 6) = P(V|K = 7) = P(V|K = 8) = 0$

- (b) Per Bayes:

$$\begin{aligned} P(K \geq 1|V) = 1 - P(K = 0|V) &= 1 - \frac{P(V|K = 0)P(K = 0)}{\sum_{k=0}^8 P(V|K = k)P(K = k)} \\ &= 1 - \frac{1 \cdot \frac{1}{9}}{(1 + \frac{5}{8} + \frac{5}{14} + \dots + \frac{1}{56}) \cdot \frac{1}{9}} = \frac{5}{9} = 0,55\dots \end{aligned}$$

En canvi, sense verificació és:

$$P(K \geq 1) = 1 - P(K = 0) = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} = 0,88\dots$$

- (c) Deixar de funcionar equival a $K \geq 3$. Llavors, tenint en compte que K és binomial amb $n = 8$ i $p = \frac{1}{3}$ ($q = \frac{2}{3}$), s'obté:

$$P(K \geq 3) = 1 - \sum_{k=0}^2 P(K = k) = 1 - \sum_{k=0}^2 \binom{8}{k} p^k q^{8-k} = 1 - \frac{2^{10}}{3^7} = 0,53\dots$$

(d) En el cas (b), tenim:

$$m_K = \sum_{k=0}^8 kP(K=k) = \frac{1}{9} \sum_{k=0}^8 k = 4,$$

$$\sigma_K = \left(\sum_{k=0}^8 (k - m_K)^2 P(K=k) \right)^{1/2} = \left(\sum_{k=0}^8 (k-4)^2 \frac{1}{9} \right)^{1/2} = \sqrt{\frac{20}{3}} = 2,58\dots$$

En el cas (c), tenim:

$$m_K = np = \frac{8}{3} = 2,66\dots,$$

$$\sigma_K = \sqrt{npq} = \frac{4}{3} = 1,33\dots$$

2. Sigui X una variable aleatòria exponencial de paràmetre λ . Donat un valor de $X = x$, la variable aleatòria $Y|X$ és uniforme a $[x, x+1]$. Es demana trobar:

- La funció de densitat conjunta de (X, Y) , dibuixant la regió on és no nul·la.
- Les funcions de densitat i de distribució de Y i les seves gràfiques aproximades.
- L'esperança de Y , directament i calculant prèviament $E(Y|X)$. Trobeu el seu comportament quan $\lambda \rightarrow \infty$ i interpreteu el resultat d'aquest límit.
- La covariància de (X, Y) . Són X, Y incorrelades?

Solució: Sabem que X és exponencial, $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$, amb mitjana $E(X) = \frac{1}{\lambda}$, mentre que $Y|X$ és uniforme a $[x, x+1]$, $f_{Y|X}(y) = 1$, $x \leq y \leq x+1$. Per tant:

- $f_{XY}(x, y) = f_{Y|X}(y)f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ a la regió del pla: $0 \leq x \leq y \leq x+1$ (la franja del primer quadrant entre les "diagonals" $y = x$ i $y = x+1$).
- En general, sabem que $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dx$. En el nostre cas:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \int_0^y \lambda e^{-\lambda x} dx = -e^{-\lambda x} \Big|_0^y = 1 - e^{-\lambda y} & (0 \leq y \leq 1) \\ \int_{y-1}^y \lambda e^{-\lambda x} dx = -e^{-\lambda x} \Big|_{y-1}^y = e^{-\lambda(y-1)} - e^{-\lambda y} = e^{-\lambda y} (e^\lambda - 1) & (y \geq 1) \end{cases}$$

$$F_Y(y) = \int_0^y f_Y(y) dy = \begin{cases} \int_0^y (1 - e^{-\lambda y}) dy = y + \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda y} \Big|_0^y = \dots & (0 \leq y \leq 1) \\ (e^\lambda - 1) \int_0^y \lambda e^{-\lambda y} dy = (e^\lambda - 1) (-e^{-\lambda y}) \Big|_0^y = \dots & (y \geq 1) \end{cases}$$

(c) Directament:

$$E(Y) = \int_0^\infty y f_Y(y) dy = \int_0^1 y(1 - e^{-\lambda y}) dy + (e^\lambda - 1) \int_1^\infty y e^{-\lambda y} dy = \dots = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{2}.$$

(d) Calculant prèviament $E(Y|X)$: Com $f_{Y|X} = 1$, $x \leq y \leq x+1$, tenim que

$$E(Y|X) = \int_x^{x+1} y = \frac{y^2}{2} \Big|_x^{x+1} = x + \frac{1}{2}.$$

Per tant:

$$E(Y) = E_x(E_y(Y|X)) = E_x\left(X + \frac{1}{2}\right) = E(X) + \frac{1}{2} = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{2},$$

tal com hem obtingut abans.

Quan $\lambda \rightarrow \infty$, aleshores $E(Y) \rightarrow \frac{1}{2}$, ja que, en aquest cas, $P(X \neq 0) \rightarrow 0$ i les variables aleatòries $Y|X$ i Y tendeixen a una variable uniforme a $[0, 1]$ amb mitjana $\frac{1}{2}$.

(e) Sabem que $\mu_{11} = E(XY) - E(X)E(Y)$, on

$$E(XY) = \int_0^\infty \int_0^\infty xy f_{XY}(x, y) dx dy = \int_{x=0}^{x=\infty} \int_{y=x}^{y=x+1} xy \lambda e^{-\lambda x} dx dy = \dots = \frac{2}{\lambda^2} + \frac{1}{2\lambda}.$$

Per tant,

$$\mu_{11} = \frac{2}{\lambda^2} + \frac{1}{2\lambda} - \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Finalment, com $\mu_{11} \neq 0$, les variables X, Y **no** són incorrelades.

3. El nombre $N(t)$ de missatges que arriben a una bústia de correu electrònic en $(0, t]$ segueix un procés de Poisson de taxa $\mu = 4$ missatges per minut.

- Si a l'instant $t = 0$ no hi ha cap missatge a la bústia, quina és la probabilitat que el primer no arribi abans de $t = 1/2$ minut?
- Si a $t = 1$ minut han arribat dos missatges, quina és la probabilitat que el segon faci més de $1/2$ minut que ha arribat.
- Sabent el nombre de missatges que conté la bústia a $t = 4$ minuts, quina és la millor estimació lineal no homogènia en mitjana quadràtica que podem fer de:
 - el nombre de missatges que havien arribat durant els dos primers minuts;
 - el nombre de missatges que contindrà la bústia a $t = 5$ minuts. Interpreteu aquest resultat a partir de les propietats del procés de Poisson.

Indicació: Per a $t_1 \leq t_2$ la funció d'autocorrelació de $N(t)$ és $R_N(t_1, t_2) = \mu t_1 + \mu^2 t_1 t_2$.

Solució: Tenim

$$P(N(t) = k) = e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^k}{k!},$$

amb $\mu = 4$.

(a) Sigui T_1 el temps d'arribada del primer missatge. Aleshores,

$$P(T_1 \geq 1/2) = P(N(1/2) = 0) = e^{-\mu/2} = e^{-2} \approx 0.135.$$

(b) Sigui T_2 el temps d'arribada del segon missatge. Aleshores,

$$\begin{aligned} P(T_2 < 1/2 | N(1) = 2) &= \frac{P(T_2 < 1/2, N(1) = 2)}{P(N(1) = 2)} \\ &= \frac{P(N(1/2) = 2, N(1) = 2)}{P(N(1) = 2)} \\ &= \frac{P(N(1/2) = 2, N(1) - N(1/2) = 0)}{P(N(1) = 2)} \\ &= \frac{P(N(1/2) = 2)P(N(1) - N(1/2) = 0)}{P(N(1) = 2)} \\ &= \frac{(\mu/2)^2 e^{-\mu/2} / 2 \cdot e^{-\mu/2}}{\mu^2 e^{-\mu/2}} \\ &= \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

on s'ha fet servir la homogeneïtat i la independència en temps disjunts del procés de Poisson.

(c) (a) Sigui $\widehat{N(2)} = \alpha N(4) + \beta$. Pel principi d'ortogonalitat s'ha de complir:

$$E(N(2) - \alpha N(4) - \beta) = 0$$

$$E((N(2) - \alpha N(4) - \beta)N(4)) = 0$$

Tenint en compte que $E(N(t)) = 4t$ i que $E(N(t_1)N(t_2)) = 4t_1 + 16t_1t_2$, $t_1 \leq t_2$, tenim:

$$16\alpha + \beta = 8$$

$$272\alpha + 16\beta = 136$$

i, per tant, $\alpha = 1/2$ i $\beta = 0$. Així,

$$\widehat{N(2)} = N(4)/2$$

(b) Sigui ara $\widehat{N(5)} = \alpha N(4) + \beta$. Tenim,

$$E(N(5) - \alpha N(4) - \beta) = 0$$

$$E((N(5) - \alpha N(4) - \beta)N(4)) = 0$$

És a dir,

$$16\alpha + \beta = 20$$

$$272\alpha + 16\beta = 336$$

La solució del sistema és $\alpha = 1$ i $\beta = 4$. Per tant,

$$\widehat{N(5)} = N(4) + 4.$$

En efecte, l'estimació del nombre de missatges que contindrà la bústia a $t = 5$ minuts la podem obtenir sumant a $N(4)$ l'estimació del nombre de missatges Y que arriben en l'interval $(4, 5]$. Però, per les propietats del procés de Poisson, $N(4)$ i Y són variables aleatòries independents. Per tant, l'estimació de Y donat $N(4)$ és simplement $E(Y) = 4$ missatges. Així, $\widehat{N(5)} = N(4) + 4$.