

ETS d'Enginyeria de Telecomunicació
Probabilitat i Processos Estocàstics
Resolució Exàmen Final 19/01/2007

1. Dos servidors S_1 i S_2 donen servei a un usuari. Per S_1 la duració del servei és una variable aleatòria exponencial de paràmetre μ ; mentre que per S_2 la duració del servei és una variable aleatòria amb densitat de probabilitat:

$$f(\tau) = \begin{cases} \frac{\mu^2}{2}\tau, & 0 < \tau < 2/\mu \\ 0, & \text{altrament} \end{cases}$$

Quan l'usuari arriba al sistema, escull el servidor S_1 o el servidor S_2 amb probabilitats p i $q = 1 - p$, respectivament, $0 < p < 1$. Sigui T la variable aleatòria corresponent al temps que l'usuari és al sistema.

- (a) Determineu les funcions de distribució i de densitat de probabilitat de T .
- (b) Si el temps que l'usuari ha estat al sistema ha estat més gran que $1/\mu$, calculeu la probabilitat que hagi estat servit per S_1 .
- (c) Supposeu que n usuaris han rebut servei del sistema de manera independent. Calculeu la probabilitat que per almenys dos d'ells el temps que han estat al sistema hagi estat més gran que $1/\mu$.
- (d) En aquest apartat preneu $\mu = 1$ i $p = q = 1/2$. Per rebre el servei del sistema l'usuari ha de pagar la quantitat α . Si el temps T que ha estat al sistema ha pres el valor $T = \tau$, $1 < \tau < 2$, se li retorna la quantitat

$$\frac{\alpha}{2}(\tau - 1),$$

i si T ha pres un valor més gran que 2 se li retorna la quantitat $\alpha/2$. Aplicant el teorema de l'esperança, calculeu el valor mitjà de la despesa de l'usuari.

Resolució:

- (a) Sabem que $F_T(\tau) = P(T \leq \tau)$. Si $\tau < 0$ aquesta probabilitat val zero. Si $\tau > 0$,

$$P(T \leq \tau) = P(T \leq \tau | S_1)p + P(T \leq \tau | S_2)q$$

Quan $0 < \tau < 2/\mu$:

$$F_T(\tau) = (1 - e^{-\mu\tau})p + q \int_0^\tau \frac{\mu^2}{2}u \, du = (1 - e^{-\mu\tau})p + \frac{\mu^2\tau^2}{4}q,$$

mentre que si $\tau > 2/\mu$:

$$F_T(\tau) = (1 - e^{-\mu\tau})p + q$$

Derivant, obtenim:

$$f_T(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau < 0, \\ \mu e^{-\mu\tau} p + \frac{\mu^2}{2} \tau q, & 0 < \tau < \mu/2, \\ \mu e^{-\mu\tau} p, & \tau > \mu/2. \end{cases}$$

(b) Aplicant la fórmula de la probabilitat condicionada,

$$P(S_1 | T > 1/\mu) = \frac{P(S_1 \cap \{T > 1/\mu\})}{P(T > 1/\mu)} = \frac{e^{-1}p}{e^{-1}p + 3q/4}.$$

(c) Sigui X el nombre d'usuaris per als quals la duració del servei ha estat més gran que $1/\mu$. Aleshores X és una variable aleatòria binomial de paràmetres n i $\beta = P(X > 1/\mu) = e^{-1}p + 3q/4$. Tenim, doncs,

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - (1 - \beta)^n - n\beta(1 - \beta)^{n-1}.$$

(d) Sigui D la despesa. Aleshores $D = g(T)$ on la funció $g(\tau)$ és:

$$g(\tau) = \begin{cases} \alpha, & 0 < \tau < 1, \\ \alpha - \frac{\alpha}{2}(\tau - 1), & 1 < \tau < 2, \\ \alpha - \frac{\alpha}{2}, & \tau > 2. \end{cases}$$

Així

$$\begin{aligned} E(D) &= E(g(T)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) f_T(\tau) d\tau \\ &= \alpha - \int_1^2 \frac{\alpha}{2}(\tau - 1) \left(\frac{e^{-\tau}}{2} + \frac{\tau}{4} \right) d\tau - \int_2^{\infty} \frac{\alpha}{2} \frac{e^{-\tau}}{2} d\tau \\ &= \alpha \left(\frac{43}{48} + \frac{1}{4e^2} - \frac{1}{4e} \right) \approx 0.838\alpha. \end{aligned}$$

2. Donada la densitat conjunta

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} kxy & \text{si } (x, y) \in \Delta \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

on k és una constant i Δ és la regió limitada pel triangle de vèrtexs $(0, 0)$, $(1, 1)$ i $(2, 0)$, calculeu:

- El valor de k i les densitats marginals.
- La funció de distribució i la funció de densitat de la variable $Z = X + Y$.
- L'esperança i la variància de les variables $Z = X + Y$ i $U = XY$.

Resolució:

(a) Per al càlcul de la constant k , cal igualar a 1 la integral doble de la funció densitat:

$$1 = \int_0^1 dy \int_y^{2-y} kxy \, dx = 2k \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{k}{3}.$$

Per tant, $k = 3$.

Per calcular les densitats marginals, en primer lloc escrivim la densitat conjunta de dues maneres possibles:

$$\begin{aligned} f_{XY}(x, y) &= 3xy 1_{[0,1]}(y) 1_{[y,2-y]}(x) \\ &= 3xy (1_{[0,1]}(x) 1_{[0,x]}(y) + 1_{[1,2]}(x) 1_{[0,2-x]}(y)). \end{aligned}$$

D'aquesta manera,

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_y^{2-y} 3xy 1_{[0,1]}(y) dx = 3y 1_{[0,1]}(y) \int_y^{2-y} x dx = 6y(1-y) 1_{[0,1]}(y), \\ f_X(x) &= \int_0^x 3xy 1_{[0,1]}(x) dy + \int_0^{2-x} 3xy 1_{[1,2]}(x) dy = \frac{3}{2} x^3 1_{[0,1]}(x) + \frac{3}{2} x(2-x)^2 1_{[1,2]}(x). \end{aligned}$$

(b) La funció de distribució de Z és

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(X + Y \leq z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \leq 0, \\ 3 \int_0^{z/2} \int_y^{z-y} yx \, dx dy & \text{si } z \in [0, 2], \\ 1 & \text{si } z \geq 2. \end{cases}$$

Fent càlculs:

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \leq 0, \\ \frac{z^4}{16} & \text{si } z \in [0, 2], \\ 1 & \text{si } z \geq 2. \end{cases}$$

La funció densitat s'obté derivant la de distribució; és a dir,

$$f_Z(z) = \frac{z^3}{4} 1_{[0,2]}(z).$$

(c) Pel que fa a l'esperança,

$$E(Z) = \int_0^2 \frac{z^4}{4} dz = \frac{8}{5}.$$

Mentre que $E(Z^2) = \frac{8}{3}$, la qual cosa implica $\sigma^2(Z) = \frac{8}{75}$.

D'altra banda,

$$E(XY) = \int_0^2 \int_y^{2-y} 3x^2 y^2 \, dx dy = \frac{8}{15}$$

Mentre que $E(X^2 Y^2) = \frac{12}{35}$ i, per tant, $\sigma^2(XY) = \frac{92}{1575}$.

3. Siguin $X(t)$, $Y(t)$ dos processos de Poisson independents, els dos de paràmetre (taxa) λ .

- (a) Donat el procés $Z(t) = \alpha X(t) + \beta$, amb $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, es demana trobar la seva estadística de primer ordre (funció de densitat o de probabilitat), la funció valor mitjà i la funció d'autocorrelació.
- (b) Comproveu que el procés $S(t) = X(t) + Y(t)$ també és de Poisson i calculeu el seu paràmetre (taxa) λ' .
- (c) Calculeu la millor estimació lineal homogènia en mitjana quadràtica de $X(2)$, donats $X(1)$ i $X(3)$. Interpreteu el resultat. Calculeu l'error quadràtic mitjà de l'estimació.

Resolució:

- (a) Com que $X(t)$ és un procés d'estat discret, també ho serà $Z(t)$, amb funció de probabilitat:

$$\begin{aligned} P_{Z(t)}(x) &= \mathbb{P}\{\alpha X(t) + \beta = x\} = \mathbb{P}\{X(t) = \frac{x-\beta}{\alpha}\} \\ &= e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{\frac{x-\beta}{\alpha}}}{\left(\frac{x-\beta}{\alpha}\right)!}, \end{aligned}$$

sempre que $\frac{x-\beta}{\alpha} = k \in \{0, 1, 2, \dots\}$; és a dir, $x \in \{\beta, \alpha + \beta, 2\alpha + \beta, \dots\}$.

Per altre banda, sabem que $X(t)$ té mitjana $m_X(t) = \lambda t$ i funció d'autocorrelació $R_X(t_1, t_2) = \lambda t_1 t_2 + \lambda \min\{t_1, t_2\}$. Per tant,

- La funció valor mitjà de $Z(t)$ és:

$$m_Z(t) = \mathbb{E}\{\alpha X(t) + \beta\} = \alpha \mathbb{E}\{X(t)\} + \beta = \alpha \lambda t + \beta.$$

- Mentre que la funció d'autocorrelació de $Z(t)$ és:

$$\begin{aligned} R_Z(t_1, t_2) &= \mathbb{E}\{[\alpha X(t_1) + \beta][\alpha X(t_2) + \beta]\} \\ &= \alpha^2 \mathbb{E}\{X(t_1)X(t_2)\} + \alpha\beta[\mathbb{E}\{X(t_1)\} + \mathbb{E}\{X(t_2)\}] + \beta^2 \\ &= \alpha^2 R_X(t_1, t_2) + \alpha\beta[m_X(t_1) + m_X(t_2)] + \beta^2 \\ &= \alpha^2(\lambda^2 t_1 t_2 + \lambda \min\{t_1, t_2\}) + \alpha\beta\lambda(t_1 + t_2) + \beta^2. \end{aligned}$$

- (b) Per a $k = 0, 1, 2, \dots$, la funció de probabilitat de $S(t)$ val:

$$\begin{aligned} P_{S(t)}(k) &= \mathbb{P}\{X(t) + Y(t) = k\} = \sum_{\kappa=0}^k \mathbb{P}\{X(t) = \kappa, Y(t) = k - \kappa\} \\ &= \sum_{\kappa=0}^k \mathbb{P}\{X(t) = \kappa\} \mathbb{P}\{Y(t) = k - \kappa\} \\ &= e^{-2\lambda t} \sum_{\kappa=0}^k \frac{(\lambda t)^\kappa}{\kappa!} \frac{(\lambda t)^{k-\kappa}}{(k-\kappa)!} = \frac{e^{-2\lambda t}}{k!} \sum_{\kappa=0}^k \binom{k}{\kappa} (\lambda t)^\kappa (\lambda t)^{k-\kappa} \\ &= \frac{e^{-2\lambda t}}{k!} (\lambda t + \lambda t)^k = e^{-2\lambda t} \frac{(2\lambda t)^k}{k!}, \end{aligned}$$

on s'ha utilitzat la hipòtesi d'independència entre $X(t)$ e $Y(t)$. Per tant, $S(t)$ és un procés de Poisson de paràmetre (taxa) $\lambda' = 2\lambda$.

(c) La millor estimació lineal homogenia és de la forma $\widehat{X(2)} = aX(1) + bX(3)$. Aplicant el principi “ERROR \perp DADES”, obtenim:

$$\begin{aligned} E\{[X(2) - aX(1) - bX(3)]X(1)\} &= 0, \\ E\{[X(2) - aX(1) - bX(3)]X(3)\} &= 0, \end{aligned}$$

d'on resulta el sistema

$$\begin{aligned} aR_X(1,1) + bR_X(1,3) &= R_X(1,2), \\ aR_X(1,3) + bR_X(3,3) &= R_X(2,3). \end{aligned}$$

És a dir (en forma matricial i dividint les dues equacions per λ),

$$\begin{pmatrix} \lambda + 1 & 3\lambda + 1 \\ 3\lambda + 1 & 9\lambda + 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda + 1 \\ 6\lambda + 2 \end{pmatrix},$$

amb solucions $a = b = \frac{1}{2}$. Per tant, la millor estimació és:

$$\widehat{X(2)} = \frac{1}{2}[X(1) + X(3)] = X(1) + \frac{1}{2}[X(3) - X(1)] \cdot 1.$$

Que és per interpretar com el valor mitjà de punts (transicions) en els intervals $[0, 1]$ i $[0, 3]$ (primera igualtat); o bé com el nombre de punts a $[0, 1]$ més la “taxa real” en el interval $[1, 3]$, $\lambda' := \frac{1}{2}[X(3) - X(1)]$, per la longitud del interval $[1, 2]$ (segona igualtat).

En quant a l'error comés, tenim:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= E\{[X(2) - \widehat{X(2)}]^2\} = E\{[X(2) - \widehat{X(2)}]X(2)\} \\ &= E\{[X(2) - \frac{1}{2}[X(1) + X(3)]]X(2)\} \\ &= R_X(2,2) - \frac{1}{2}R_X(1,2) - \frac{1}{2}R_X(3,2) \\ &= 4\lambda^2 + 2\lambda - \frac{1}{2}(2\lambda^2 + \lambda) - \frac{1}{2}(6\lambda^2 + 2\lambda) = \frac{\lambda}{2}. \end{aligned}$$