ETS d'Enginyeria de Telecomunicació
Probabilitat i Processos Estocàstics

3. El nombre d'usuaris $X(t)$ que arriben a un sistema en $(0,t]$ és un procés de Poisson de taxa (nombre mitjà que arriben per unitat de temps) μ. Diem $Y(t)$ al nombre d'usuaris que arriben durant l'interval $(t,t+T]$, on $T>0$ és un valor fixat.

(a) Calculeu la funció valor mitjà i la funció d'autocorrelació del procés $Y(t)$. Dieu si $Y(t)$ és o no estacionari en sentit ampli. Que podeu afirmar de les variables aleatòries $Y(t+\tau)$ i $Y(t)$ quan $|\tau|>T$?

(b) Calculeu la millor estimació lineal en mitjana quadràtica de $Y(t+\tau)$, $\tau>0$, donat $Y(t)$. (Distingiu els casos $\tau<T$ i $\tau>T$.)

Resolució:
(a) Tenim $Y(t)=X(t+T)-X(t)$. Per tant,

$$m_Y(t)=E(Y(t))=E(X(t+T)-X(t))=m_X(t+T)-m_X(t)=\mu(t+T)-\mu t=\mu T.$$

Així, $m_Y(t)\equiv m_Y$ és constant. D'altra banda,

$$R_Y(t_1,t_2)=E(Y(t_1)Y(t_2))=E\left((X(t_1+T)-X(t_1))(X(t_2+T)-X(t_2))\right)=$$

$$R_X(t_1+T,t_2+T)-R_X(t_1+T,t_2)-R_X(t_1,t_2+T)+R_X(t_1,t_2),$$

on $R_X(u,v)=\mu\min(u,v)+\mu^2uv$ és la funció d'autocorrelació d'un procés de Poisson de taxa μ. Podem suposar, sense pèrdua de generalitat, que $t_1<t_2$. Aleshores, si $t_1+T<t_2$:

$$R_Y(t_1,t_2)=\mu(t_1+T)+\mu^2(t_1+T)(t_2+T)-\mu(t_1+T)-\mu^2(t_1+T)t_2-$$

$$\mu t_1-\mu^2t_1(t_2+T)+\mu t_1+\mu^2t_1t_2=\mu^2T^2.$$

D'altra banda, si $t_1+T>t_2$:

$$R_Y(t_1,t_2)=\mu(t_1+T)+\mu^2(t_1+T)(t_2+T)-\mu t_2-\mu^2(t_1+T)t_2-$$

$$\mu t_1-\mu^2t_1(t_2+T)+\mu t_1+\mu^2t_1t_2=\mu^2T^2+\mu T-\mu(t_2-t_1).$$

Per tant,

$$R_Y(t,t+\tau)\equiv R_Y(\tau)=\begin{cases}\mu^2T^2+\mu(T-|\tau|), & |\tau|<T\\ \mu^2T^2, & |\tau|>T\end{cases}$$

El procés $Y(t)$ és doncs estacionari en sentit ampli. Noteu, també, que si $|\tau|>T$, aleshores $R_Y(\tau)=m_Y^2$, és a dir, les variables aleatòries $Y(t)$ i $Y(t+\tau)$ són incorrelades. De fet, per les propietats del procés de Poisson, $Y(t)$ i $Y(t+\tau)$ són independents.

(b) Tenim $\widehat{Y}(t+\tau)=\alpha Y(t)+\beta$. Pel principi d'ortogonalitat:

$$E\left(Y(t+\tau)-\widehat{Y}(t+\tau)\right)=E\left(Y(t+\tau)-\alpha Y(t)-\beta\right)=0$$

$$E\left(\left(Y(t+\tau)-\widehat{Y}(t+\tau)\right)Y(t)\right)=E\left(\left(Y(t+\tau)-\alpha Y(t)-\beta\right)Y(t)\right)=0$$

Per tant,

$$\alpha m_Y+\beta=m_Y$$

$$\alpha R_Y(0)+\beta m_Y=R_Y(\tau)$$

Si $\tau<T$ tenim el sistema

$$\begin{pmatrix} \mu T & 1 \\ \mu^2T^2+\mu T & \mu T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mu T \\ \mu^2T^2+\mu(T-\tau) \end{pmatrix}$$

que té solució

$$\alpha=1-\frac{\tau}{T},\qquad \beta=\mu\tau,$$

és a dir,

$$\widehat{Y}(t+\tau)=\left(1-\frac{\tau}{T}\right)Y(t)+\mu\tau.$$

Si $\tau>T$ el sistema és:

$$\begin{pmatrix} \mu T & 1 \\ \mu^2T^2+\mu T & \mu T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mu T \\ \mu^2T^2 \end{pmatrix}$$

que té ara solució

$$\alpha=0,\qquad \beta=\mu T,$$

és a dir, l'estimador és constant ($=m_Y$):

$$\widehat{Y}(t+\tau)=\mu T.$$