

(Feu els problemes en fulls diferents)

Temps: 3h

1. Dos jugadors, A i B , juguen al joc següent. Cada un d'ells té una baralla de 52 cartes (4 pals i 13 números que, ordenats segons el seu valor, són: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K, A), de la qual extreu una carta a l'atzar. Guanya qui ha extret la carta més alta. Si hi ha empat, tornen a col·locar la carta i juguen de nou.
- Proveu que la probabilitat que guanyi A a la primera extracció és $6/13$. Quina és la probabilitat que A acabi guanyant el joc?
 - Calculeu el nombre mitjà de vegades que han de jugar fins que un dels jugadors guanya.
 - Suposeu que en la primera jugada guanya A . Quina és la probabilitat de que hagi obtingut com a molt un 5?

Resolució:

(a) Siguin C_A i C_B les cartes que obtenen A i B , respectivament. Tenim que

$$P(C_A > C_B) = \sum_{j=1}^{13} P(C_A > C_B \mid C_B = j)P(C_B = j),$$

i $P(C_B = j) = 1/13$. A més,

$$P(C_A > C_B \mid C_B = j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j = 1, \\ 12/13 & \text{si } j = 2, \\ \vdots & \\ 2/13 & \text{si } j = 12, \\ 1/13 & \text{si } j = 13. \end{cases}$$

Per tant,
$$P(C_A > C_B) = \frac{1}{13} \sum_{j=1}^{12} \frac{j}{13} = \frac{1}{13^2} \frac{12 \cdot 13}{2} = \frac{6}{13}.$$

(b) El nombre de vegades que han de jugar fins no es produeixi un empat es una variable aleatòria geomètrica amb $p = 12/13$. Per tant, el nombre mig de vegades que hauran de jugar és $1/p = 13/12 = 1.083$.

(c) Volem calcular

$$P(C_A \leq 5 \mid C_A > C_B) = \frac{P((C_A > C_B) \cap (C_A \leq 5))}{P(C_A > C_B)}.$$

Com

$$P((C_A > C_B) \cap (C_A \leq 5)) = \sum_{j=3}^5 P((C_A = j) \cap (C_B < j)) = \sum_{j=3}^5 \frac{1}{13} (j-2) \frac{1}{13} = \frac{6}{13^2},$$

resulta que
$$P(C_A \leq 5 \mid C_A > C_B) = \frac{1}{13}.$$

2. Una variable aleatòria bidimensional (X, Y) té funció de densitat de probabilitat:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} k e^{-|x|-y}, & -\infty < x < \infty, 0 < y < |x| \\ 0, & \text{altrament} \end{cases}$$

- Calculeu el valor de la constant k .
- Determineu les funcions de densitat de probabilitat marginals $f_X(x)$ i $f_Y(y)$ i representeu de forma aproximada les seves gràfiques. Quin tipus de variable aleatòria és Y ? Són X i Y independents?
- Calculeu la covariància de X i Y . Són X i Y incorrelades?
- Determineu $f_{X|Y}(x|Y=y)$ i calculeu $E(Y|X=-1)$. Comenteu per què aquesta esperança dóna un valor a l'interval $(0, 1)$.

Resolució:

(a) El valor de k queda determinat per la condició $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dx dy = 1$. Integrant a la regió on $f_{XY}(x, y)$ és diferent de zero, obtenim:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dx dy &= k \int_0^{\infty} e^{-y} \left(\int_{-\infty}^{-y} e^x dx + \int_y^{\infty} e^{-x} dx \right) dy = \\ &= k \int_0^{\infty} e^{-y} \left(2 \int_y^{\infty} e^{-x} dx \right) dy = k \int_0^{\infty} 2 e^{-2y} dy = k, \end{aligned}$$

d'on $k = 1$.

(b) Integrant en y per cada x fixat, $-\infty < x < \infty$, tenim:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dy = e^{-|x|} \int_0^{|x|} e^{-y} dy = e^{-|x|} (1 - e^{-|x|}) = e^{-|x|} - e^{-2|x|}.$$

Anàlogament, integrant en x per cada y fixat, $0 < y < \infty$:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dx = \int_{-\infty}^{-y} e^x dx + \int_y^{\infty} e^{-x} dx = 2 \int_y^{\infty} e^{-x} dx = 2 e^{-2y}.$$

La variable aleatòria Y és exponencial de paràmetre 2.

Com que $f_{XY}(x, y) \neq f_X(x)f_Y(y)$, les variables aleatòries X i Y no són independents.

(c) Per la simetria parella de $f_X(x)$, $E(X) = 0$. Així:

$$\mu_{11} = E(XY) - E(X)E(Y) = E(XY).$$

Aplicant el teorema de l'esperança:

$$\begin{aligned} E(XY) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f_{XY}(x, y) dx dy = \\ &= \int_0^{\infty} ye^{-y} \left(\int_{-\infty}^{-y} xe^x dx + \int_y^{\infty} xe^{-x} dx \right) dy = \\ &= \int_0^{\infty} ye^{-y} \left(\int_y^{\infty} (-x)e^{-x} dx + \int_y^{\infty} xe^{-x} dx \right) dy = 0. \end{aligned}$$

Per tant, les variables aleatòries X i Y són incorrelades.

(d) La funció densitat condicionada $f_{X|Y}(x|Y=y)$ està definida per a cada $y > 0$:

$$f_{X|Y}(x|Y=y) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \frac{e^{x-y}}{2e^{-2y}} = \frac{1}{2}e^y e^x, & -\infty < x < -y \\ 0, & -y < x < y \\ \frac{e^{-x-y}}{2e^{-2y}} = \frac{1}{2}e^y e^{-x}, & y < x < \infty \end{cases}$$

D'altra banda,

$$f_{Y|X}(y|X = -1) = \frac{f_{XY}(-1, y)}{f_X(-1)} = \frac{e^{-1}e^{-y}}{e^{-1} - e^{-2}} = \frac{e}{e-1} e^{-y}, \quad 0 < y < 1.$$

Per tant,

$$E(Y|X = -1) = \int_0^1 \frac{e}{e-1} ye^{-y} dy = \frac{e-2}{e-1}.$$

- 3.** Sigui Δ una variable aleatòria exponencial de paràmetre λ . Definim el procés estocàstic (per a $t \geq 0$):

$$X(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq \Delta, \\ 0, & \text{altrament.} \end{cases}$$

Es demana:

- La funció de distribució $F_X(x; t)$ (que caracteritza l'estadística de primer ordre del procés).
- Les funcions de valor mitjà i d'autocorrelació de $X(t)$. És un procés estacionari en sentit ampli?
- Trobeu la millor estimació lineal homogènia de $X(t_2)$ donada $X(t_1)$, $t_1 \geq 0$. Comenteu què passa en cadascun dels casos: (1) $t_1 < t_2$, (2) $t_1 = t_2$ i (3) $t_1 > t_2$.
- Trobeu l'error quadràtic mitjà de l'anterior estimació (pel cas (1)). Raoneu el seu comportament quan $t_2 \rightarrow \infty$.

Resolució:

- (a) Per a cada $t \geq 0$, $X(t)$ és una variable aleatòria de Bernoulli amb funció de probabilitat

$$P_X(1; t) := P(X(t) = 1) = P(\Delta \geq t) = \int_t^\infty \lambda e^{-\lambda\delta} d\delta = [-e^{-\lambda\delta}]_t^\infty = e^{-\lambda t};$$

$$P_X(0; t) := P(X(t) = 0) = 1 - P(X(t) = 1) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Per tant, la funció de probabilitat és:

$$F_X(x; t) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda t}, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

- (b) La funció valor mitjà és:

$$m_X(t) := E\{X(t)\} = P(X(t) = 1) = e^{-\lambda t} \quad (t \geq 0);$$

mentre que la funció d'autocorrelació dona:

$$R_X(t_1, t_2) := E\{X(t_1)X(t_2)\} = P(X(t_1)X(t_2) = 1) = P(X(t_1) = 1, X(t_2) = 1)$$

$$= P(\Delta \geq \max\{t_1, t_2\}) = \int_{\max\{t_1, t_2\}}^\infty \lambda e^{-\lambda\delta} d\delta = e^{-\lambda \max\{t_1, t_2\}} \quad (t_1, t_2 \geq 0).$$

Per tant, com $m_X(t)$ no és constant (depen de t) i $R_X(t_1, t_2)$ no depen sols de $\tau = t_1 - t_2$, el procés no és estacionari en sentit ampli.

- (c) La millor estimació lineal homogènia de $X(t_2)$ donada $X(t_1)$, $t_1 \geq 0$, és $\widehat{X}(t_2) = \alpha X(t_1)$, a on α és una constant caracteritzada per la condició que el "error" $X(t_2) - \widehat{X}(t_2)$ és ortogonal a la "dada" $X(t_1)$:

$$E\{[X(t_2) - \alpha X(t_1)] \cdot X(t_1)\} = 0 \Rightarrow R_X(t_1, t_2) - \alpha R_X(t_1, t_1) = 0$$

D'on

$$\alpha = \frac{R_X(t_1, t_2)}{R_X(t_1, t_1)}.$$

Aleshores, pels diferents casos obtenim:

(1) ($t_1 < t_2$)

$$\alpha = \frac{e^{-\lambda t_2}}{e^{-\lambda t_1}} = e^{-\lambda(t_2-t_1)}; \quad \widehat{X}(t_2) = X(t_1)e^{-\lambda(t_2-t_1)}.$$

Noteu que, com era d'esperar, $\widehat{X}(t_2) \rightarrow X(t_1)$ quan $t_2 \rightarrow t_1$.

(2) ($t_1 = t_2$) Obviament,

$$\alpha = 1; \quad \widehat{X}(t_2) = X(t_1).$$

(3) ($t_1 > t_2$)

$$\alpha = 1; \quad \widehat{X}(t_2) = X(t_1).$$

En aquest cas, l'estimació és exacta quan $X(t_1) = 1$.

(d) En el cas (1) ($t_1 < t_2$), l'error quadràtic mitjà de l'estimació és:

$$\begin{aligned} \epsilon &= \mathbb{E}\{[X(t_2) - \widehat{X}(t_2)]^2\} = \mathbb{E}\{X(t_2)^2\} - \mathbb{E}\{\widehat{X}(t_2)^2\} \\ &= R_X(t_2, t_2) - e^{-2\lambda(t_2-t_1)} R_X(t_1, t_1) = e^{-\lambda t_2} - e^{-2\lambda(t_2-t_1)} e^{-\lambda t_1} \\ &= e^{-\lambda t_2} [1 - e^{-\lambda(t_2-t_1)}], \end{aligned}$$

a on s'ha utilitzat el "teorema de Pitàgores" (degut a l'ortogonalitat entre $X(t_2) - \widehat{X}(t_2)$ i $\widehat{X}(t_2)$). Quan $t_2 \rightarrow \infty$, l'error $\epsilon \rightarrow 0$ ja que $\widehat{X}(t_2) \rightarrow 0$ és una estimació exacta (totes les realitzacions del procés acaben valent zero quan el temps es suficientment gran).