

(Feu els problemes en fulls diferents)

Temps: 3h

1. En un centre comercial, la despesa que fa cada client és una variable aleatòria exponencial amb esperança s .
 - (a) De 100 clients que passen pel centre, sigui N el nombre d'aquests que fan una despesa entre s i $2s$. Determineu quin tipus de variable aleatòria és N i doneu la seva esperança.
 - (b) Quin és el nombre mitjà de clients que es reben fins a tenir-ne un amb una despesa superior a $3s$?
 - (c) Cada vegada que passa un client per caixa es tira una moneda i, si surt cara, se li redueix a la mitat la seva despesa. Si un client surt havent gastat menys que s , quina és la probabilitat que hagi estat afortunat?

Resolució:

- (a) Denotem per X la variable aleatòria exponencial d'esperança s corresponent a la despesa que fa un client que arriba al centre. N és una variable aleatòria binomial amb paràmetres $n = 100$ i

$$p = P(s \leq X \leq 2s) = F_X(2s) - F_X(s) = e^{-1} - e^{-2} \approx 0.233,$$

ja que

$$F_X(x) = 1 - e^{-x/s}, \quad x > 0.$$

- (b) Si Y és la variable aleatòria que compta el nombre de clients que es reben fins a tenir-ne un amb una despesa superior a $3s$, Y és geomètrica amb paràmetre $p' = P(X > 3s) = e^{-3}$. Per tant, $E(Y) = 1/p' = e^3 \approx 20.089$.
- (c)

$$\begin{aligned} P(c | X < s) &= \frac{P(X < s | c)p}{P(X < s | c)p + P(X < s | +)q} = \\ &= \frac{P(X < 2s)p}{P(X < 2s)p + P(X < s)q} = \frac{(1 - e^{-2})p}{(1 - e^{-2})p + (1 - e^{-1})q} = \\ &= \frac{(1 - e^{-2})p}{(1 - pe^{-2} - qe^{-1})} \end{aligned}$$

Si $p = q = 1/2$,

$$P(c | X < s) = \frac{(1 - e^{-2})}{(2 - e^{-2} - e^{-1})} \approx 0.578$$

2. Un receptor rep un missatge en un instant T que segueix una distribució uniforme a $[1, 3]$ en segons. Si el missatge arriba a l'instant $T = t$, el receptor tarda en descodificar-lo un temps X que segueix una llei uniforme a $[0, t]$.

- Doneu la funció de densitat conjunta de X i T i dibuixeu el seu domini. Calculeu $E[XT]$.
- Trobeu la densitat marginal de X . Comproveu que efectivament és una funció densitat.
- Calculeu la probabilitat que el temps des que el missatge és enviat ($t = 0$) fins que és descodificat no sigui superior a dos segons.

Resolució:

- Obtenim la funció densitat conjunta multiplicant la funció densitat condicionada $f_{X|T}$ per la funció densitat que condiciona, f_T . Així,

$$f_{XT}(x, t) = f_{X|T}(x|t)f_T(t) = \begin{cases} 1/2t, & 1 \leq t \leq 3, 0 \leq x \leq t \\ 0, & \text{altr.} \end{cases}$$

$$E[XT] = \int_{t=1}^3 \int_{x=0}^t tx \frac{1}{2t} dt dx = \int_{t=1}^3 \frac{x^2}{4} \Big|_0^t dt = \frac{x^3}{12} \Big|_1^3 = \frac{13}{6}.$$

- La funció densitat de X l'obtenim com a densitat marginal de f_{XT} .

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XT}(x, t) dt = \begin{cases} \int_1^3 \frac{1}{2t} dt = \frac{\ln 3}{2}, & \text{si } x \in [0, 1] \\ \int_x^3 \frac{1}{2t} dt = \frac{1}{2} \ln x \Big|_x^3 = \frac{\ln(3/x)}{2}, & \text{si } x \in [1, 3] \\ 0, & \text{si } x \notin [0, 3] \end{cases}$$

Per provar que f_X és efectivament una funció densitat cal que,

$$\int_0^3 f_X(x) dx = \int_0^1 \frac{\ln 3}{2} dx + \int_1^3 \frac{\ln 3 - \ln x}{2} dx = \frac{\ln 3}{2} + \ln 3 - \frac{3 \ln 3}{2} + 1 = 1.$$

- Calculem,

$$P(X + T \leq 2) = \int_{t=1}^2 \int_{x=0}^{2-t} \frac{1}{2t} dx dt = \int_{t=1}^2 \frac{2-t}{2t} dt = \ln 2 - \frac{1}{2}.$$

3. A partir de les variables aleatòries independents A, B , d'esperança zero i variàncies σ_A^2, σ_B^2 , es defineix el procés estocàstic $X(t) = At + B$.

- En el cas que A i B siguin variables gaussianes, doneu la funció de densitat $f_X(x; t)$ (estadística de primer ordre del procés).
- Calculeu el valor mitjà i la funció d'autocorrelació de $X(t)$. ¿És un procés estacionari en sentit ampli?
- Trobeu la millor estimació lineal homogènia de $X(t_3)$ donades $X(t_1), X(t_2)$, amb t_1, t_2, t_3 instants distints. Comenteu els casos $t_3 \rightarrow t_1$ i $t_3 \rightarrow t_2$.

Resolució:

- Fixat t , $X(t)$ és una combinació lineal de gaussianes independents. Per tant, $X(t)$ és una variable gaussiana amb $m = m_A t + m_B = 0$ i $\sigma = \sqrt{\sigma_A^2 t^2 + \sigma_B^2}$.

$$f_X(x; t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_A^2 t^2 + \sigma_B^2)}} e^{-\frac{x^2}{2(\sigma_A^2 t^2 + \sigma_B^2)}}.$$

- $m_X(t) = 0$, $R_X(t_1, t_2) = \sigma_A^2 t_1 t_2 + \sigma_B^2$; per tant no és estacionari en sentit ampli.

- $\widehat{X}(t_3) = \frac{t_2 - t_3}{t_2 - t_1} X(t_1) + \frac{t_3 - t_1}{t_2 - t_1} X(t_2)$, que tendeix a $X(t_i)$ quan $t_3 \rightarrow t_i$, $i = 1, 2$.