PROBABILITAT I PROCESSOS ESTOCÀSTICS **ETSETB**

Resolució de l'Examen Final **9 de gener de 2002**

1. Als ordinadors d'un cert fabricant, el processador accedeix regularment a la memòria 10^6 vegades per segon. Sigui p la probabilitat que en un accés concret la lectura sigui errònia. Suposem que els diferents accessos es comporten independentment.

(a) Sigui N la variable aleatòria que compta el nombre d'errors de lectura durant 10 segons. Doneu la seva funció de probabilitat i digueu quin és el nombre mitjà d'errors durant aquest període.

(b) Per a quin valor de p es màxima la probabilidad que hi hagi exactament un error en els 10 segons.

(c) Al sortir de fàbrica, el valor de p és 10^{-8} però hi ha un 1% d'ordinadors defectuosos on $p = 10^{-7}$. En sospitar que un ordinador podria estar avariat fem el test de tenir-lo en funcionamient durant 10 segons i resulta que s'obté exactament un error de lectura. Amb aquest resultat: decidirieu que l'ordinador és defectuos? (Indicació: convé utilitzar l'aproximació de Poisson)

Resolució:

(a) N es Binomial$(10^7, p)$. Así, $\text{Prob}[N = k] = \binom{10^7}{k} p^k (1-p)^{10^7-k}$, para $k = 0, \ldots, 10^7$ y $\text{E}[N] = 10^7 p$.

(b) Dado que $\text{Prob}[N = 1] = 10^7 p(1-p)^{10^7-1}$, entonces

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\text{Prob}[N=1] = 10^7(1-p)^{10^7-2}\left[(1-p) - (10^7-1)p\right] = 10^7(1-p)^{10^7-2}(1-10^7 p)$$

con lo que el máximo absoluto de $\text{Prob}[N = 1]$ se alcanza en $p = 10^{-7}$, ya que para $p = 0$ y para $p = 1$, dicha probabilidad es nula.

(c) Sea D el suceso "ordenador defectuoso" y C el suceso "ordenador normal" (es decir, $p_D = 10^{-7}$ y $p_C = 10^{-8}$).

Dado que el número de accesos es muy elevado y las probabilidades p_D y p_C son muy pequeñas, las variables binomiales pueden ser aproximadas por variables de Poisson. Entonces,

$$\text{Prob}[N = 1|D] = 10^7 10^{-7}(1-10^{-7})^{10^7-1} \approx e^{-1},$$

$$\text{Prob}[N = 1|C] = 10^7 10^{-8}(1-10^{-8})^{10^7-1} \approx 0.1e^{-0.1}.$$

Aplicando ahora la fórmula de Bayes,

$$\text{Prob}[D|N=1] = \frac{\text{Prob}[N=1|D]\text{Prob}[D]}{\text{Prob}[N=1|D]\text{Prob}[D] + \text{Prob}[N=1|C]\text{Prob}[C]}$$

$$\approx \frac{0.01e^{-1}}{0.01e^{-1} + 0.099e^{-0.1}} = \frac{1}{1+9.9e^{0.9}} < 0.1.$$

Así, con la información de que se dispone, la decisión más adecuada es que el ordenador NO es defectuoso.

2. L'entrada X d'un sistema és una variable aleatòria continua amb funció densitat de probabilitat

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ e^{-(x-a)}, & x \geq a \end{cases},$$

amb $a > 0$. Si l'entrada X pren el valor x, la sortida Y del sistema és una variable aleatòria uniforme de valor mitjà x i variància $a^2/3$.

(a) Determineu el valor mitjà de la sortida del sistema.

(b) Trobeu la funció densitat conjunta de l'entrada X i la sortida Y. (Indiqueu clarament la regió on aquesta funció és diferent de zero).

(c) Determineu la funció densitat de probabilitat de la sortida Y.

(d) Si $Z = X - a$ i $T = X - Y$, determineu la funció de densitat conjunta $f_{ZT}(z, t)$. Deduïu si Z i T són o no independents.

Resolució:

Y condicionada per $X = x$ és una variable aleatòria uniforme d'esperança x i variància $a^2/3$. Com que la variància d'una variable aleatòria uniforme en un interval de longitud l val $l^2/12$, Y condicionada per $X = x$ és uniforme en un interval de longitud $2a$ i, per tant,

$$f_{Y|X}(y|X = x) = \begin{cases} \frac{1}{2a}, & x - a < y < x + a \\ 0, & \text{altrament} \end{cases}$$

(a) Podem calcular el valor mitjà de Y (sense condicionar) de la forma següent:

$$E(Y) = E(E(Y|X)) = \int_{-\infty}^{\infty} E(Y|X = x)\, f_X(x)\, dx = \int_a^{\infty} x\, e^{-(x-a)}\, dx = a + 1.$$

(b) La funció de densitat conjunta de X i Y és:

$$f_{XY}(x, y) = f_{Y|X}(y|X = x)\; f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a}\, e^{-(x-a)}, & x > a,\; x - a < y < x + a \\ 0, & \text{altrament} \end{cases}$$

(c) La funció densitat de Y la podem obtenir com a marginal de la funció densitat conjunta de X i Y:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y)\, dx = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ \displaystyle\int_a^{y+a} \frac{1}{2a} e^{-(x-a)}\, dx = \frac{1}{2a}(1 - e^{-y}), & 0 < y < 2a \\ \displaystyle\int_{y-a}^{y+a} \frac{1}{2a} e^{-(x-a)}\, dx == \frac{e^{2a} - 1}{2a} e^{-y}, & y > 2a \end{cases}$$

(d) Si $Z = X - a$ i $T = X - Y$ tenim:

$$f_{ZT}(z, t) = \left. \frac{f_{XY}(x, y)}{|J(x, y)|} \right|_{\substack{x = z + a \\ y = z - t + a}} = \frac{1}{2a}\, e^{-z}, \quad z > 0,\; -a < t < a$$

D'aqui deduïm:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{ZT}(z, t)\, dt = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ \displaystyle\int_{-a}^{a} \frac{1}{2a} e^{-z}\, dt = e^{-z}, & z > 0 \end{cases}$$

$$f_T(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{ZT}(z, t)\, dz = \begin{cases} 0, & t \notin [-a, a] \\ \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{2a} e^{-z}\, dz = \frac{1}{2a}, & -a < t < a \end{cases}$$

Així, Z és exponencial de paràmetre 1, T és uniforme en $[-a, a]$, i es compleix: $f_{ZT}(z, t) = f_Z(z) f_T(t)$. Per tant Z i T són independents.

3. Es defineix el procés estocàstic

$$X(t) = A + Bt$$

on (A, B) és una variable aleatòria bidimensional gaussiana amb paràmetres $m_A = m_B = 0$, $\sigma_A = \sigma_B = \sigma$ i $\rho = 1/2$.

(a) Calculeu les funcions de valor mitjà i d'autocorrelació del procés $X(t)$. És $X(t)$ un procés estacionari?

(b) Quina és la millor estimació lineal en mitjana quadràtica de $J = \int_0^1 X(t)dt$ donada $X(1)$. (Indicació: podeu expressar les variables en termes de A i B.)

(c) Calculeu l'error de l'anterior estimació.

(d) Quina és la millor estimació no lineal de J donada $X(1)$?

Resolució:

(a) Amb les dades del problema: $E[A] = E[B] = 0$, $E[A^2] = \sigma_A^2 + m_A^2 = \sigma^2$, $E[B^2] = \sigma^2$, $E[AB] = \rho\sigma_A\sigma_B + m_A m_B = \sigma^2/2$.

Valor mitjà: $m(t) = E[X(t)] = E[A + Bt] = E[A] + E[B]t = 0 + 0 \cdot t = 0$.

Autocorrelació:

$$\begin{aligned} R(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = E[(A + Bt_1)(A + Bt_2)] = E[A^2 + AB(t_1 + t_2) + B^2 t_1 t_2] \\ = E[A^2] + E[AB](t_1 + t_2) + E[B^2]t_1 t_2 = \sigma^2 + \sigma^2 \frac{(t_1 + t_2)}{2} + \sigma^2 t_1 t_2 \\ = \sigma^2(1 + \frac{t_1 + t_2}{2} + t_1 t_2). \end{aligned}$$

No és estacionari ja que R no depèn només de $t_1 - t_2$.

(b) L'estimador és de la forma $\lambda X(1) = \lambda(A + B)$ on λ és la constant a determinar. La variable que volem estimar és $J = \int_0^1 (A + Bt)dt = A + B/2$. El principi d'ortogonalitat és $J - X(1) \perp X(1)$, és a dir:

$$E[\lambda(A + B)(A + B)] = E[(A + \frac{B}{2})(A + B)].$$

$$\lambda = \frac{E[(A + \frac{B}{2})(A + B)]}{E[(A + B)^2]} = \frac{E[A^2 + \frac{B^2}{2} + \frac{3AB}{2}]}{E[A^2 + B^2 + 2AB]} = \frac{\sigma^2 + \frac{\sigma^2}{2} + \frac{3\sigma^2}{4}}{\sigma^2 + \sigma^2 + \sigma^2} = \frac{3}{4}.$$

(c) $\bar{\epsilon} = E[((A + \frac{B}{2}) - \lambda(A + B))^2] = E[((A + \frac{B}{2}) - \lambda(A + B))(A + \frac{B}{2})] = E[(\frac{A}{4} - \frac{B}{4})(A + \frac{B}{2})] = E[\frac{A^2}{4} - \frac{B^2}{8} - \frac{AB}{8}] = \frac{\sigma^2}{4} - \frac{\sigma^2}{8} - \frac{\sigma^2}{16} = \frac{\sigma^2}{16}$.

(d) La millor estimació no lineal coincideix amb la lineal per tractar-se de variables gaussianes.