E.T.S. d'Enginyeria de Telecomunicació

Probabilitat i Processos Estocàstics

Examen Final. 8 de gener de 2001

---

1. Un commutador té tres entrades i dues sortides. Cada una de les tres entrades pot estar activa o no amb probabilitats p i $q = 1 - p$, $0 < p < 1$, respectivament, independentment de l'estat de les altres entrades. Cada entrada activa escull equiprobablement, també de forma independent de les altres entrades, una de les dues sortides. Una sortida s'activa si es escollida per almenys una de les entrades actives.

Siguin E i S les variable aleatòries que compten, respectivament, el nombre d'entrades i de sortides actives.

(a) Calculeu $\mathrm{P}(S = k \mid E = i)$.

(b) Calculeu la funció de probabilitat de S.

(c) Calculeu $\mathrm{P}(E = i \mid S = 1)$.

(d) Suposeu ara que el commutador té n entrades i m sortides. Calculeu la probabilitat que una sortida determinada no estigui activa.

Resolució:

(a) La probabilitat $\mathrm{P}(S = k \mid E = i)$ només pot ser diferent de 0 si $i \geq k$.

(a) Cas $i = 0$

$$\mathrm{P}(S = 0 \mid E = 0) = 1.$$

(b) Cas $i = 1$

$$\mathrm{P}(S = 0 \mid E = 1) = 0,$$

$$\mathrm{P}(S = 1 \mid E = 1) = 1.$$

(c) Cas $i = 2$

$$\mathrm{P}(S = 0 \mid E = 2) = 0.$$

$$\mathrm{P}(S = 1 \mid E = 2) = \mathrm{P}(\text{les dues entrades seleccionen } s_1 \text{ o les dues entrades seleccionen } s_2) =$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

$$\mathrm{P}(S = 2 \mid E = 2) = 1 - \mathrm{P}(S = 1 \mid E = 2) = \frac{1}{2}.$$

(d) Cas $i = 3$

$$\mathrm{P}(S = 0 \mid E = 3) = 0.$$

$$\mathrm{P}(S = 1 \mid E = 3) = \mathrm{P}(\text{les tres entrades seleccionen } s_1 \text{ o les tres entrades seleccionen } s_2) =$$

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}.$$

$$\mathrm{P}(S = 2 \mid E = 3) = 1 - \mathrm{P}(S = 1 \mid E = 3) = \frac{3}{4}.$$

(b)

$$\mathrm{P}(E=i) = \binom{3}{i}\, p^i q^{3-i}, \quad i=0,1,2,3$$

$$\mathrm{P}(S=k) = \sum_{i=0}^{3} \mathrm{P}(S=k \mid E=i)\, \mathrm{P}(E=i).$$

Per tant,

$$\mathrm{P}(S=0) = \mathrm{P}(E=0) = q^3,$$
$$\mathrm{P}(S=1) = \mathrm{P}(E=1) + \frac{1}{2}\mathrm{P}(E=2) + \frac{1}{4}\mathrm{P}(E=3) = 3pq^2 + \frac{3}{2}p^2q + \frac{1}{4}p^3,$$
$$\mathrm{P}(S=2) = \frac{1}{2}\mathrm{P}(E=2) + \frac{3}{4}\mathrm{P}(E=3) = \frac{3}{2}p^2q + \frac{3}{4}p^3.$$

(c) $\mathrm{P}(E=i \mid S=1)$ és 0 si $i=0$.

$$\mathrm{P}(E=i \mid S=1) = \frac{\mathrm{P}(S=1 \mid E=i)\mathrm{P}(E=i)}{\mathrm{P}(S=1)}.$$

$$\mathrm{P}(E=1 \mid S=1) = \frac{\mathrm{P}(E=1)}{\mathrm{P}(S=1)} = \frac{3pq^2}{3pq^2 + \frac{3}{2}p^2q + \frac{1}{4}p^3},$$

$$\mathrm{P}(E=2 \mid S=1) = \frac{\frac{1}{2}\mathrm{P}(E=2)}{\mathrm{P}(S=1)} = \frac{\frac{3}{2}p^2q}{3pq^2 + \frac{3}{2}p^2q + \frac{1}{4}p^3},$$

$$\mathrm{P}(E=3 \mid S=1) = \frac{\frac{1}{4}\mathrm{P}(E=3)}{\mathrm{P}(S=1)} = \frac{\frac{1}{4}p^3}{3pq^2 + \frac{3}{2}p^2q + \frac{1}{4}p^3}.$$

(d) Sigui s una qualsevol de les m sortides:

$$\mathrm{P}(s \text{ no activa}) = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{P}(s \text{ no activa} \mid E=i)\mathrm{P}(E=i) =$$

$$\sum_{i=0}^{n} \left(1 - \frac{1}{m}\right)^i \binom{n}{i} p^i q^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \left(p - \frac{p}{m}\right)^i q^{n-i} =$$

$$\left(p - \frac{p}{m} + q\right)^n = \left(1 - \frac{p}{m}\right)^n.$$

També, si e és una qualsevol de les n entrades

$$\mathrm{P}(s \text{ no activa}) = \mathrm{P}(\text{cap entrada activi } s) = (\mathrm{P}(e \text{ no activi } s))^n =$$

$$(\mathrm{P}(e \text{ no està activa}) + \mathrm{P}(e \text{ està activa}, e \text{ no escull } s))^n = \left(q + p\,\frac{m-1}{m}\right)^n = \left(1 - \frac{p}{m}\right)^n.$$

---

2. Siguin (X, Y) una variable aleatòria bidimensional i $U := X + Y$, $V := X - Y$.

(a) Proveu que $\mathrm{Cov}(U, V) = \mathrm{Var}(X) - \mathrm{Var}(Y)$.

(b) Donada la funció

$$f(x,\,y) := \begin{cases} \dfrac{x}{b}, & \text{si } a \le x \le b \text{ i } 0 \le y \le 1 \\ 1, & \text{si } b \le x \le 2b \text{ i } 0 \le y \le 1 \\ 0, & \text{altrament} \end{cases}$$

digueu per quina o quines de les següents parelles de valors de a i b pot ser f la densitat de la variable aleatòria (X,Y): *i)* $a=-1,\ b=1$; *ii)* $a=1,\ b=2$; *iii)* $a=0,\ b=2/3$.

(c) Suposeu ara que el vector (X,Y) és gaussià amb $\mathrm{E}(X)=\mathrm{E}(Y)=0$, $\mathrm{Var}(X)=\sigma_X^2$, $\mathrm{Var}(Y)=\sigma_Y^2$ i $\mathrm{Cov}(X,\,Y)=0$. Calculeu les funcions de densitat $f_U(u)$, $f_V(v)$ i $f_{UV}(u,v)$.

(d) En les mateixes condicions de l'apartat (c), demostreu que U i V són independents si i només si $\sigma_X^2=\sigma_Y^2$.

(e) En les mateixes condicions de l'apartat (c), ordeneu de més petita a més gran les quantitats següents: $\mathrm{P}(|X|<2)$ i $\mathrm{P}(|U|<2)$. (Justifiqueu la resposta.)

(f) En les mateixes condicions de l'apartat (c), i si, a més, $\sigma_X^2=\sigma_Y^2$, aleshores X i Y són dues variables idènticament distribuïdes. Vol dir això que aleshores $\mathrm{P}(V=0)=1$? (Justifiqueu la resposta.)

Resolució:

(a) Tenim

$$\mathrm{Cov}(U,V)=\mathrm{E}(UV)-\mathrm{E}(U)\mathrm{E}(V)=\mathrm{E}(X^2-Y^2)-(E(X)+\mathrm{E}(Y))(\mathrm{E}(X)-\mathrm{E}(Y))=$$

$$(\mathrm{E}(X^2)-\mathrm{E}(Y^2))-(\mathrm{E}(X)^2-\mathrm{E}(Y)^2)=\mathrm{Var}(X)-\mathrm{Var}(Y).$$

(b) f serà una funció de densitat si és sempre positiva i la $\iint_{\mathbf{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy$ val 1. Com

$$\iint_{\mathbf{R}^2} f(x,\,y)\,dx\,dy=\int_0^1 dy\cdot\left(\int_a^b \frac{x}{b}\,dx+\int_b^{2b} dx\right)=\frac{3b}{2}-\frac{a^2}{2b},$$

la integral val 1 per les parelles *i)* i *iii)*; però amb la parella *i)*, f és negativa per $(x,\,y)\in(-1,\,0)\times(0,\,1)$. Per tant, la única parella per la qual f és una densitat és la *iii)*.

(c) Com que X i Y són conjuntament gaussianes i independents (perquè tenen covariància 0), també U i V, que són combinacions lineals de X i Y, són (conjuntament i individualment) gausssianes. Com $\mathrm{E}(U)=\mathrm{E}(X)+\mathrm{E}(Y)$ i $\mathrm{E}(V)=\mathrm{E}(X)-\mathrm{E}(Y)$, $\mathrm{E}(U)=\mathrm{E}(V)=0$. I, com que $\mathrm{Cov}(X,\,Y)=0$, $\mathrm{Var}(U)=\mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y)$ i $\mathrm{Var}(V)=\mathrm{Var}(X)+(-1)^2\,\mathrm{Var}(Y)$. Per tant, $\mathrm{Var}(U)=\mathrm{Var}(V)=\sigma_X^2+\sigma_Y^2$. Així doncs,

$$f_U(u)=\frac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,\sqrt{\sigma_X^2+\sigma_Y^2}}\;e^{-\frac{u^2}{2\,(\sigma_X^2+\sigma_Y^2)}};\quad f_V(v)=\frac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,\sqrt{\sigma_X^2+\sigma_Y^2}}\;e^{-\frac{v^2}{2\,(\sigma_X^2+\sigma_Y^2)}}.$$

Per calcular la densitat conjunta, es pot fer servir que $(U,\,V)$ té distribució conjuntament gaussiana i calcular-ne els paràmetres estadístics, o bé, es pot observar que

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}=G\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix},\quad \text{amb } G=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix};$$

Com que G té determinant igual a -2 i inversa $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$, obtenim que

$$f_{UV}(u,\,v)=\frac{1}{2}\,f_{XY}\left(\frac{u+v}{2},\,\frac{u-v}{2}\right)=\ldots=\frac{1}{4\,\pi\,\sigma_X\,\sigma_Y}\;e^{-\frac{(u+v)^2\,(\sigma_X^2+\sigma_Y^2)-2uv\,(\sigma_X^2-\sigma_Y^2)}{8\,\sigma_X^2\,\sigma_Y^2}}.$$

(d) Com que (U, V) són conjuntament gaussianes, seran independents si i només si tenen covariància zero i això equival, per l'apartat (a), a que X i Y tinguin la mateixa variància. (També es pot veure tot comprovant, a partir de l'apartat anterior, que la densitat conjunta és igual al producte de les marginals si i només si X i Y tenen la mateixa variància.)

(e) A partir dels càlculs de l'apartat (c) tenim que:

$$\mathrm{P}(|X| < 2) = \mathrm{P}(-2 < X < 2) = F_{N(0,1)}(2/\sigma_X) - F_{N(0,1)}(-2/\sigma_X) = 2\, F_{N(0,1)}(2/\sigma_X) - 1$$

i, anàlogament,

$$P(|U| < 2) = \ldots = 2\, F_{N(0,1)}\left(2/\sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}\right) - 1.$$

Com que la funció de distribució de la normal és estrictament creixent i $\sigma_X < \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}$, se'n deduiex que $P(|X| < 2) > P(|U| < 2)$.

(f) No, si $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma^2$, V és gaussiana, amb esperança 0 i variància $2\,\sigma^2$; per tant $P(V = 0) = 0$.

---

3. $X(t)$ és un procés estocàstic estacionari, amb valor mitjà $m(t) = 0$ i autocorrelació $R(\tau) = \cos\tau$.

(a) Per a cada t fixat, calculeu la millor estimació lineal no homogènia en mitjana quadràtica de $X(t)$ donats $X(0)$ i $X(\pi/2)$.

(b) Calculeu l'error quadràtic mitjà de l'anterior estimació i demostreu que $X(t)$ és una oscil·lació aleatòria.

(c) Enuncieu dos criteris suficients d'ergodicitat en valor mitjà. Determineu si $X(t)$ és un procés ergòdic en valor mitjà per aplicació d'aquests criteris, o calculant la variància de la seva mitjana temporal, en cas que no es verifiquin.

Resolució:

(a) Com que $m(t) = 0$, l'estimador pren la forma $aX(0) + bX(\pi/2)$. Les equacions del principi d'ortogonalitat són

$$\begin{cases} E[(aX(0) + bX(\pi/2))X(0)] = E[X(t)X(0)] \\ E[(aX(0) + bX(\pi/2))X(\pi/2)] = E[X(t)X(\pi/2)] \end{cases}$$

És a dir

$$\begin{cases} aR(0) + bR(\pi/2) = R(t) \\ aR(\pi/2) + bR(0) = R(\pi/2 - t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \cos t \\ b = \sin t \end{cases}$$

Per tant el millor estimador de la variable aleatòria $X(t)$ és $\cos t\, X(0) + \sin t\, X(\pi/2)$.

(b) L'error quadràtic mitjà és

$$\bar{\epsilon} = E[(X(t) - (aX(0) + bX(\pi/2)))^2] = E[X(t)(X(t) - (aX(0) + bX(\pi/2)))]$$

$$= R(0) - aR(t) - bR(\pi/2 - t) = 1 - \cos t \cos t - \sin t \sin t = 0.$$

Com l'error és zero, per a t arbitrari $X(t)$ coincideix exactament amb l'estimador:

$$X(t) = X(0)\cos t + X(\pi/2)\sin t,$$

que és una oscil·lació aleatòria.

(c) $X(t)$ no verifica cap dels dos criteris suficients d'ergodicitat ja que no existeixen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos\tau d\tau, \qquad \lim_{|\tau|\to\infty} \cos\tau.$$

Com els criteris només són suficients, amb ells no podem dir res sobre l'ergodicitat de $X(t)$. Per determinar si $X(t)$ és ergòdic s'ha de calcular σ_T^2, la variància de la mitjana temporal

$$m_T = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X(t)dt.$$

Una manera de calcular-ho és:

$$\sigma_T^2 = \frac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T} C(\tau)\left(1 - \frac{|\tau|}{2T}\right) d\tau,$$

on $C(\tau) = R(\tau) - m^2 = \cos\tau$ és la funció d'autocovariància de $X(t)$.

$$\sigma_T^2 = \frac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T} \cos\tau\left(1 - \frac{|\tau|}{2T}\right) d\tau = \frac{1}{T}\int_{0}^{2T} \cos\tau\left(1 - \frac{\tau}{2T}\right) d\tau$$

$$= \frac{1}{T}\left(\sin\tau(1 - \frac{\tau}{2T}) - \frac{\cos\tau}{2T}\right)\Bigg|_0^{2T} = \frac{1-\cos 2T}{2T^2}.$$

Com es veu inmediatament, $\sigma_T^2 \to 0$ per $T\to\infty$. Per tant, $X(t)$ és un procés ergòdic. Un procediment alternatiu és calcular directament

$$m_T = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}(X(0)\cos t + X(\pi/2)\sin t)dt = X(0)\frac{\sin T}{T}$$

d'on

$$\sigma_T^2 = \frac{\sin^2 T}{T^2}\sigma_{X(0)}^2 = \frac{\sin^2 T}{T^2}R(0) = \frac{\sin^2 T}{T^2}.$$