

**ETSETB-FME**  
**Introducció a les Matemàtiques de l'Enginyeria**

Processos Estocàstics

9 de gener de 2009

temps: 2h 30m

---

1. Siguin  $X$  i  $Y$  variables aleatòries conjuntament gaussianes, amb valors mitjans  $m_X = 1$  i  $m_Y = -1$ , variàncies  $\sigma_X^2 = 1$  i  $\sigma_Y^2 = 4$ , i coeficient de correlació  $\rho$ ,  $0 < \rho \leq 1$ . Calculeu la millor estimació en mitjana quadràtica de  $S = X + Y$  donada  $T = X - Y$ . Calculeu també l'error d'aquesta estimació. Interpreteu el resultat quan  $\rho = 1$ , i relacioneu-lo, en aquest cas, amb l'estimació de  $Y$  donada  $X$ .

*Resolució:* Les variables aleatòries  $S$  i  $T$  també són conjuntament gaussianes. Per tant, la millor estimació de  $S$  donada  $T$  és lineal,

$$\hat{S} = \frac{\mu_{11;ST}}{\sigma_T^2}(T - m_T) + m_S.$$

Calculant els diferents paràmetres tenim:

$$\begin{aligned}m_S &= m_X + m_Y = 0, \\m_T &= m_X - m_Y = 2, \\ \mu_{11;ST} &= E(ST) - m_S m_T = E(X^2 - Y^2) = E(X^2) - E(Y^2) = \\ & \sigma_X^2 + m_X^2 - (\sigma_Y^2 + m_Y^2) = 2 - 5 = -3, \\ \sigma_T^2 &= E(T^2) - m_T^2 = E(X^2 + Y^2 - 2XY) - 4 = 2 + 5 - 2E(XY) - 4 = \\ & 3 - 2(\rho\sigma_X\sigma_Y + m_X m_Y) = 3 - 2(2\rho - 1) = 5 - 4\rho.\end{aligned}$$

Així,

$$\hat{S} = \frac{-3}{5 - 4\rho}(T - 2).$$

L'error val

$$\begin{aligned}\epsilon &= E(S - \hat{S})^2 = E((S - \hat{S})S) = E(S^2) - E(\hat{S}S) = E(X^2) + E(Y^2) + 2E(XY) - \frac{-3}{5 - 4\rho}E(ST) = \\ & 2 + 5 + 2(2\rho - 1) - \frac{-3}{5 - 4\rho}(-3) = \frac{16(1 - \rho^2)}{5 - 4\rho}.\end{aligned}$$

Si  $\rho = 1$ ,  $\epsilon = 0$  i tenim  $S = \hat{S} = -3T + 6$  amb probabilitat 1. En efecte, si  $\rho = 1$  es compleix, amb probabilitat 1, que

$$Y = \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(X - m_X) + m_Y = 2(X - 1) - 1 = 2X - 3.$$

Per tant, amb probabilitat 1,  $S = X + Y = 3X - 3$  i  $T = X - Y = -X + 3$ . Així, amb probabilitat 1,  $S = 3(3 - T) - 3 = -3T + 6$ .

---

2. Sigui  $A$  una variable aleatòria discreta que pren els valors  $0$  i  $\pi/2$ , cadascun d'ells amb probabilitat  $1/2$ , i sigui  $Y$  una variable aleatòria gaussiana d'esperança  $0$  i variància  $\sigma^2$ , independent de  $A$ . Definim el procés estocàstic

$$X(t) = Y \cos(t + A).$$

Calculeu la funció valor mitjà i la funció d'autocorrelació del procés  $X(t)$ . És  $X(t)$  estacionari en sentit ampli? Què podeu afirmar sobre l'ergodicitat en valor mitjà del procés?

*Resolució:* Per a cada  $t$  fixat,  $Y$  és independent de la variable aleatòria  $\cos(t + A)$ . Per tant,

$$m_X(t) = E(X(t)) = E(Y \cos(t + A)) = E(Y) E(\cos(t + A)) = 0.$$

D'altra banda,

$$\begin{aligned} R_X(t_1, t_2) &= E(X(t_1)X(t_2)) = E(Y^2 \cos(t_1 + A) \cos(t_2 + A)) = \\ &= E(Y^2) E(\cos(t_1 + A) \cos(t_2 + A)) = \\ &= \sigma^2 \left( (\cos t_1 \cos t_2) P(A = 0) + \cos\left(t_1 + \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(t_2 + \frac{\pi}{2}\right) P\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) = \\ &= \frac{\sigma^2}{2} (\cos t_1 \cos t_2 + \sin t_1 \sin t_2) = \frac{\sigma^2}{2} \cos(t_1 - t_2) = \frac{\sigma^2}{2} \cos \tau. \end{aligned}$$

Com que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T C_X(\tau) d\tau = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \frac{\sigma^2}{2} \cos \tau d\tau = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\sigma^2 \sin T}{2T} = 0,$$

$X(t)$  és ergòdic en valor mitjà.

3. Siguin  $T_1$  i  $T_2$  el temps transcorregut fins a la primera i la segona transició, respectivament, en un procés de Poisson de taxa  $\mu$ .
- Determineu  $P(T_1 \leq s, T_2 \leq t)$  per a  $0 < t < s$ .
  - Determineu  $P(T_1 \leq s, T_2 > t)$  per a  $0 < s < t$ .
  - Amb els resultats anteriors determineu la funció de distribució conjunta  $F_{T_1 T_2}(s, t)$ . Calculeu també la funció de densitat conjunta  $f_{T_1 T_2}(s, t)$ . (*Indicació:* considereu l'esdeveniment  $\{T_1 \leq s, T_2 \leq t\} \cup \{T_1 \leq s, T_2 > t\}$ .)
  - Fent el canvi  $X = T_1$ ,  $Y = T_2 - T_1$ , calculeu la densitat conjunta  $f_{XY}(x, y)$ . Deduïu d'aquest resultat que les variables aleatòries  $X$  i  $Y$  són independents. (Recordeu que, per les propietats del procés de Poisson,  $X$  i  $Y$  són exponencials de paràmetre  $\mu$ .)

*Resolució:* Diem  $Z(t)$  al procés de Poisson.

(a) Si  $0 < t < s$ , es compleix  $\{T_1 \leq s\} \subset \{T_2 \leq t\}$ . Per tant,

$$\begin{aligned} P(T_1 \leq s, T_2 \leq t) &= P(T_2 \leq t) = 1 - P(T_2 > t) = \\ &= 1 - P(Z(t) = 0) - P(Z(t) = 1) = 1 - e^{-\mu t} - \mu t e^{-\mu t}. \end{aligned}$$

(Noteu que  $\{T_2 > t\}$  és l'esdeveniment "0 ó 1 transició en  $(0, t]$ " i que  $Z(t)$  és una variable aleatòria de Poisson de paràmetre  $\mu t$ .)

(b) Si  $0 < s < t$  tenim

$$\begin{aligned} P(T_1 \leq s, T_2 > t) &= P(Z(s) = 1, Z(t) = 1) = P(Z(s) = 1, Z(t) - Z(s) = 0) = \\ &= P(Z(s) = 1) P(Z(t) - Z(s) = 0) = (e^{-\mu s} \mu s) (e^{-\mu(t-s)}) = \mu s e^{-\mu t}. \end{aligned}$$

(Recordeu que  $Z(s)$  i  $Z(t) - Z(s)$  són variables aleatòries de Poisson, la primera de paràmetre  $\mu s$  i la segona de paràmetre  $\mu(t - s)$ .)

(c) Trivialment  $F_{T_1 T_2}(s, t) = 0$  quan  $s < 0$  ó  $t < 0$ . D'altra banda, el resultat de l'apartat (a) correspon a  $F_{T_1 T_2}(s, t)$  per a  $0 < t < s$ . Finalment, com que

$$P(T_1 \leq s, T_2 > t) + P(T_1 \leq s, T_2 \leq t) = P(T_1 \leq s),$$

tenim

$$F_{T_1 T_2}(s, t) = P(T_1 \leq s, T_2 \leq t) = 1 - e^{-\mu s} - \mu s e^{-\mu t}, \quad 0 < s < t.$$

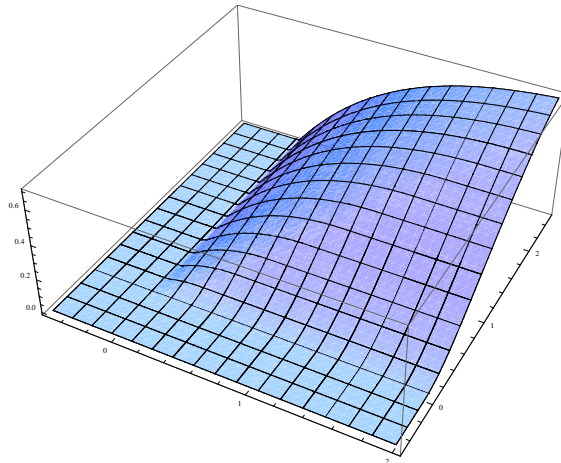


Figura 1:  $F_{T_1 T_2}(s, t)$

Derivant respecte a  $s$  i  $t$  obtenim:

$$f_{T_1 T_2}(s, t) = \mu^2 e^{-\mu t}, \quad 0 < s < t.$$

(d) Les equacions  $x = s$ ,  $y = t - s$ , defineixen una transformació bijectiva de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^2$ , amb jacobià (en valor absolut) igual a 1, tal que la regió imatge de la regió  $\{(s, t) \in \mathbb{R}^2, 0 < s < t\}$  és  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0, y > 0\}$ . Aplicant el teorema del canvi de variable tenim:

$$f_{XY}(x, y) = f_{T_1 T_2}(x, x + y) = \mu^2 e^{-\mu(x+y)}, \quad x > 0, y > 0$$

Per tant,

$$f_{XY}(x, y) = (\mu e^{-\mu x}) (\mu e^{-\mu y}) = f_X(x) f_Y(y),$$

i les variables  $X$  i  $Y$  són independents.

---