

**ETSETB-FME**  
**Introducció a les Matemàtiques de l'Enginyeria**

Control. 22 de desembre de 2004

Temps: 2h 30m

---

1. (a) Si  $X$  i  $Y$  són variables aleatòries independents i  $Z = \min(X, Y)$ , demostreu que

$$F_Z(z) = 1 - (1 - F_X(z))(1 - F_Y(z))$$

- (b) Siguin  $X_1(t)$  i  $X_2(t)$  processos de Poisson independents de taxes  $\mu_1$  i  $\mu_2$ , respectivament, i sigui

$$X(t) = X_1(t) + X_2(t).$$

Calculeu la funció densitat de probabilitat i l'esperança del temps  $T$  transcorregut fins que es produeix la primera transició de  $X(t)$ .

- (c) Calculeu la funció de probabilitat de primer ordre del procés  $X(t)$ . Sabrieu relacionar aquest resultat amb l'obtingut a l'apartat anterior?

*Resolució:*

- (a) Per la definició de funció de distribució de probabilitat tenim:

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(\min(X, Y) \leq z) = 1 - P(\min(X, Y) > z) =$$
$$1 - P(X > z, Y > z) = 1 - P(X > z)P(Y > z) = 1 - (1 - F_X(z))(1 - F_Y(z)),$$
 on hem aplicat  $P(X > z, Y > z) = P(X > z)P(Y > z)$  per ser  $X$  i  $Y$  independents.

- (b) Si  $T_i$  és el temps fins que arriba la primera transició de  $X_i(t)$ ,  $i = 1, 2$ , i  $T$  és el temps fins que es produeix la primera transició de  $X(t)$ , aleshores  $T = \min(T_1, T_2)$ , amb  $T_1$  i  $T_2$  variables aleatòries exponencials, independents, de paràmetres  $\mu_1$  i  $\mu_2$ , respectivament.

Per tant, pel resultat de l'apartat anterior:

$$f_T(t) = F_T'(t) = f_{T_1}(t)(1 - F_{T_2}(t)) + f_{T_2}(t)(1 - F_{T_1}(t)) =$$
$$\begin{cases} 0, & t < 0 \\ (\mu_1 + \mu_2)e^{-(\mu_1 + \mu_2)t}, & t > 0 \end{cases}$$

És a dir,  $T$  és exponencial de paràmetre  $\mu_1 + \mu_2$  i, per tant,

$$E(T) = \frac{1}{\mu_1 + \mu_2}$$

(c) Sigui  $n \geq 0$  un enter fixat.

$$\begin{aligned} P(X(t) = n) &= P(X_1(t) + X_2(t) = n) = \sum_{k+r=n} P(X_1(t) = k, X_2(t) = r) = \\ &= \sum_{k=0}^n P(X_1(t) = n-k) P(X_2(t) = k) = \sum_{k=0}^n e^{-\mu_1 t} \frac{(\mu_1 t)^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\mu_2 t} \frac{(\mu_2 t)^k}{k!} = \\ &= \frac{e^{-(\mu_1 + \mu_2)t}}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\mu_1 t)^{n-k} (\mu_2 t)^k = e^{-(\mu_1 + \mu_2)t} \frac{((\mu_1 + \mu_2)t)^n}{n!}, \end{aligned}$$

on  $P(X_1(t) = k, X_2(t) = r) = P(X_1(t) = n-k)P(X_2(t) = k)$  ja que  $X_1(t)$  i  $X_2(t)$  són processos estocàstics independents.

Noteu que  $X(t)$  és, per a cada  $t$ , una variable aleatòria de Poisson de paràmetre  $(\mu_1 + \mu_2)t$ . Així, el nombre mitjà de transicions per unitat de temps de  $X(t)$  val  $\mu_1 + \mu_2$ , amb conseqüència amb el fet que el temps fins a la primera transició de  $X(t)$  és exponencial de paràmetre  $\mu_1 + \mu_2$  i, per tant,  $E(T) = 1/(\mu_1 + \mu_2)$ .

- 2.** A partir de les variables aleatòries  $A$  i  $B$  conjuntament gaussianes d'esperança zero, variàncies  $\sigma_A^2$  i  $\sigma_B^2$ , respectivament, i coeficient de correlació  $\rho$ , es defineix el procés estocàstic

$$X(t) = At + B$$

- Calculeu el valor mitjà i la funció d'autocorrelació de  $X(t)$ . És un procés estacionari en sentit ampli?
- Doneu la funció de densitat de primer ordre del procés.
- Si  $A$  i  $B$  són incorrelades, trobeu la millor estimació lineal en mitjana quadràtica de  $X(t)$  donades  $X(t_1)$  i  $X(t_2)$ , amb  $t, t_1, t_2$  instants distints. Comenteu els casos  $t \rightarrow t_1$  i  $t \rightarrow t_2$ .
- Calculeu l'error quadràtic mitjà comés amb l'estimador calculat a l'apartat anterior. Interpreteu el resultat que s'obté.

Resolució:

(a)

$$m_X(t) = E(At + B) = E(A)t + E(B) = 0$$

$$R_X(t_1, t_2) = E((At_1 + B)(At_2 + B)) = E(A^2)t_1t_2 + E(AB)(t_1 + t_2) + E(B^2) = \\ \sigma_A^2 t_1t_2 + \rho\sigma_A\sigma_B(t_1 + t_2) + \sigma_B^2$$

No és estacionari.

(b)  $X(t)$  és, per a cada  $t$ , una variable aleatòria gaussiana  $N(0, \sigma^2(t))$ , on

$$\sigma^2(t) = R_X(t, t) = \sigma_A^2 t^2 + 2\rho\sigma_A\sigma_B t + \sigma_B^2.$$

Per tant,

$$f_X(x; t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_A^2 t^2 + 2\rho\sigma_A\sigma_B t + \sigma_B^2}} e^{-\frac{x^2}{2(\sigma_A^2 t^2 + 2\rho\sigma_A\sigma_B t + \sigma_B^2)}}$$

(c) Com que les variables aleatòries  $X(t_1)$ ,  $X(t_2)$  i  $X(t)$  tenen esperança zero, la millor estimació lineal la donarà l'estimador homogeni

$$\widehat{X(t)} = aX(t_1) + bX(t_2).$$

Les condicions d'ortogonalitat

$$E((X(t) - aX(t_1) - bX(t_2))X(t_i)) = 0, \quad i = 1, 2$$

donen lloc al sistema lineal (tenint en compte que  $E(A^2) = \sigma_A^2$ ,  $E(B^2) = \sigma_B^2$  i  $E(AB) = 0$ ):

$$\begin{pmatrix} \sigma_A^2 t_1^2 + \sigma_B^2 & \sigma_A^2 t_1 t_2 + \sigma_B^2 \\ \sigma_A^2 t_1 t_2 + \sigma_B^2 & \sigma_A^2 t_2^2 + \sigma_B^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_A^2 t_1 t + \sigma_B^2 \\ \sigma_A^2 t_2 t + \sigma_B^2 \end{pmatrix}$$

que té solució

$$a = \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1}, \quad b = \frac{t - t_1}{t_2 - t_1}$$

Per tant,

$$\widehat{X(t)} = \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1} X(t_1) + \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} X(t_2)$$

que tendeix cap a  $X(t_i)$  quan  $t \rightarrow t_i$ ,  $i = 1, 2$ ,

(d) L'error  $\epsilon$  comés val:

$$\begin{aligned}\epsilon &= E\left(\left(X(t) - \widehat{X}(t)\right)^2\right) = E\left(\left(X(t) - \widehat{X}(t)\right) X(t)\right) = \\ &R_X(t, t) - aR_X(t, t_1) - bR_X(t, t_2) = \\ \sigma_A^2 t^2 + \sigma_B^2 - \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1} (\sigma_A^2 t t_1 + \sigma_B^2) - \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} (\sigma_A^2 t t_2 + \sigma_B^2) &= 0\end{aligned}$$

Aquest resultat implica que:

$$\widehat{X}(t) = X(t) \quad \text{amb probabilitat 1.}$$

En efecte,

$$X(t_1) = At_1 + B, \quad X(t_2) = At_2 + B$$

d'on

$$A = \frac{X(t_2) - X(t_1)}{t_2 - t_1}, \quad B = \frac{t_2 X(t_1) - t_1 X(t_2)}{t_2 - t_1}$$

i, per tant,

$$X(t) = \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1} X(t_1) + \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} X(t_2) = \widehat{X}(t)$$

---

**3.** Expliqueu el concepte d'ergodicitat en valor mitjà.