# ETSETB–FME
## Introducció a les Matemàtiques de l'Enginyeria

**Control. 19 de desembre de 2001** **Temps: 1h 30m**

---

**1.** Calculeu la funció valor mitjà i la funció d'autocorrelació de l'oscil·lació aleatòria

$$X(t) = \cos(\Omega t + \Phi),$$

on $\Omega$ és una variable aleatòria amb funció densitat de probabilitat

$$f_\Omega(\omega) = \begin{cases} e^{-(\omega-\omega_0)}, & \omega \geq \omega_0 \\ 0, & \text{altrament} \end{cases},$$

i $\Phi$ és una variable aleatòria uniforme en $[0, 2\pi]$, essent $\Omega$ i $\Phi$ independents.

---

*Solució:*

Com que $\Omega$ i $\Phi$ són variables aleatòries independents, la seva funció de densitat conjunta val:

$$f_{\Omega\Phi}(\omega, \phi) = f_\Omega(\omega) f_\Phi(\phi) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} e^{-(\omega-\omega_0)}, & \omega \geq \omega_0,\ 0 \leq \phi \leq 2\pi \\ 0, & \text{altrament} \end{cases}$$

La funció valor mitjà de $X(t)$ és:

$$m_X(t) = \mathrm{E}(X(t)) = \mathrm{E}(\cos(\Omega t + \Phi)) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega t + \phi) f_{\Omega\Phi}(\omega, \phi)\, d\omega d\phi =$$

$$\int_{\omega_0}^{\infty} e^{-(\omega-\omega_0)} \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\omega t + \phi)\, d\phi \right) d\omega = 0,$$

ja que, per a $t$ i $\omega$ fixats,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\omega t + \phi)\, d\phi = 0.$$

Pel que fa a la funció d'autocorrelació tenim:

$$R_X(t, t+\tau) = \mathrm{E}(X(t)X(t+\tau)) = \mathrm{E}\left(\cos(\Omega t + \Phi)\right) \cos\left(\Omega(t+\tau) + \Phi\right)) =$$

$$\mathrm{E}\left( \frac{\cos(\Omega\tau) + \cos(\Omega(2t+\tau) + 2\Phi)}{2} \right) =$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{E}(\cos(\Omega\tau)) + \frac{1}{2}\mathrm{E}(\cos(\Omega(2t+\tau) + 2\Phi)) = \frac{1}{2}\mathrm{E}(\cos(\Omega\tau)),$$

ja que, com el cas del valor mitjà,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\omega(2t+\tau) + 2\phi)\, d\phi = 0.$$

Notem que $R_X$ depen només de $\tau$. Finalment,

$$R_X(\tau) = \frac{1}{2}\mathrm{E}(\cos(\Omega\tau)) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega\tau) f_\Omega(\omega)\, d\omega = \frac{1}{2} \int_{\omega_0}^{\infty} \cos(\omega\tau)\, e^{-(\omega-\omega_0)}\, d\omega =$$

$$\frac{\cos(\omega_0\tau) - \tau\sin(\omega_0\tau)}{2(1+\tau^2)}$$

$X(t)$ és un procés estacionari en sentit ampli.

---

**2.** (a) Enuncieu i demostreu dos criteris suficients d'ergodicitat en valor mitjà.

(b) Si $X(t)$ és un procés estocàstic estacionari en sentit estricte, ho és també $X^2(t)$? Justifiqueu la resposta.

(c) Com definirieu el concepte d'ergodicitat en potència mitjana. (Recordeu que la potència mitjana és d'un procés estocàstic $X(t)$ és $\mathrm{E}(X^2(t))$.)

(d) Formuleu una condició necessària i suficient per a que un procés estocàstic $X(t)$, estacionari en sentit estricte, sigui ergòdic en potència mitjana.

*Solució:*

---

(b) $X^2(t)$ és també un procés estacionari ja que si les propietats estocàstiques de $X(t)$ no depenen de l'origen de temps, aleshores tampoc dependran de l'origen de temps les propietats estocàstiques de $X^2(t)$.

(c), (d) Que $X(t)$ sigui ergòdic en potència mitjana significa que $\mathrm{E}(X^2(t))$ es pot obtenir processant en el temps una única realització del procés. Tindrem:

$$\mathrm{E}(X^2(t)) = R_X(0) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} X^2(t)\, dt.$$

Sigui $Y(t) = X^2(t)$. Noteu que l'esperança de $Y(t)$ és la potència mitjana de $X(t)$, i que, d'altra banda,

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} X^2(t)\, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} Y(t)\, dt$$

és el valor mitjà temporal de $Y(t)$. Així doncs, la condició necessària i suficient que busquem serà la condició necessària i suficient per a que $Y(t)$ sigui ergòdic en valor mitjà:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} C_Y(\tau) \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) = 0\, dt,$$

on

$$C_Y(\tau) = \mathrm{E}\left((X^2(t) - R_X(0))((X^2(t+\tau) - R_X(0))\right) = \mathrm{E}\left(X^2(t)X^2(t+\tau)\right) - R_X^2(0).$$

---

**3.** Sigui $X(t)$ un procés estocàstic estacionari en sentit ampli amb valor mitjà $m_X = 0$. Sigui $Y_1(t)$ la millor estimació lineal en mitjana quadràtica de $X(t+T)$ donats $X(t)$, $X(t-T)$, $X(t-2T)$; i sigui $Y_2(t)$ la millor estimació lineal en mitjana quadràtica de $X(t+T)$ donat únicament $X(t)$. Demostreu que si la funció d'autocorrelació del procés és $R_X(\tau) = A\, e^{-\alpha|\tau|}$, aleshores $Y_1(t) = Y_2(t)$. Interpreteu aquest resultat en el cas del senyal telegràfic.

---

*Solució:*
Com que $m_X = 0$, els estimadors lineals en mitjana quadràtica seran homogenis:

$$Y_1(t) = a_0 X(t) + a_1 X(t-T) + a_2 X(t-2T),$$

$$Y_2(t) = a' X(t).$$

Pel que fa a $Y_1(t)$, podem determinar els coeficients $a_0$, $a_1$ i $a_2$ aplicant, per exemple, el principi d'ortogonalitat:

$$X(t+T) - Y_1(t) \perp X(t), \quad X(t+T) - Y_1(t) \perp X(t-T), \quad X(t+T) - Y_1(t) \perp X(t-2T),$$

és a dir,

$$\mathrm{E}((X(t+T) - a_0X(t) - a_1X(t-T) - a_2X(t-2T))\ X(t)) = 0,$$
$$\mathrm{E}((X(t+T) - a_0X(t) - a_1X(t-T) - a_2X(t-2T))\ X(t-T)) = 0,$$
$$\mathrm{E}((X(t+T) - a_0X(t) - a_1X(t-T) - a_2X(t-2T))\ X(t-2T)) = 0.$$

Obtenim així el sistema:

$$\begin{pmatrix} R_X(0) & R_X(T) & R_X(2T) \\ R_X(T) & R_X(0) & R_X(T) \\ R_X(2T) & R_X(T) & R_X(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_X(T) \\ R_X(2T) \\ R_X(3T) \end{pmatrix}$$

Per tant,

$$\begin{pmatrix} 1 & e^{-\alpha T} & e^{-2\alpha T} \\ e^{-\alpha T} & 1 & e^{-2\alpha T} \\ e^{-2\alpha T} & e^{-\alpha T} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\alpha T} \\ e^{-2\alpha T} \\ e^{-3\alpha T} \end{pmatrix}.$$

La solució del sistema és

$$a_0 = e^{-\alpha T}, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 0.$$

A partir d'aquesta solució observem que $X(t+T) - a_0X(t)$ és ortogonal a $X(t)$. Per tant, el coeficient $a'$ de $\mathrm{Y}_2(t)$ és igual a $a_0 = e^{-\alpha T}$. Així,

$$\mathrm{Y}_1(t) = \mathrm{Y}_2(t).$$