

CFIS

Processos Estocàstics

13 de gener de 2012

Examen final

Temps: 3h

Notes provisionals: 20 de Gener de 2012

1. Siguin A i B variables aleatòries independents de valor mitjà 0 i variància σ^2 . Donat el procés estocàstic $X(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$, calculeu-ne l'esperança i l'autocorrelació. Calculeu també la millor estimació lineal de $X(t_2)$ donat $X(t_1)$ i l'error de l'estimació. Interpreteu els casos en que aquest error és màxim o mínim. **(2 punts)**
-

2. Sigui Δ una variable aleatòria uniforme en $(0, a)$. Definim el procés estocàstic (per a $t > 0$):

$$X(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq \Delta, \\ 0, & \text{altrament.} \end{cases}$$

Calculeu les probabilitats $P(X(t) = 1)$ i $P(X(t) = 0)$ i determineu la funció valor mitjà de $X(t)$. **(2 punts)**

3. Calculeu el valor mitjà $m_Y(t)$ i l'autocorrelació $R_Y(t, t + \tau)$ del procés estocàstic $Y(t) = e^{-Xt}$, on X és una variable aleatòria exponencial de paràmetre μ . (Feu els càlculs prenent t i τ positius). **(1,5 punts)**
-

4. Sigui $X(t)$ un procés de Poisson de taxa μ . Calculeu les funcions de distribució i de densitat de probabilitat del temps T transcorregut fins a la tercera transició. (Recordeu que $F_T(t) = P(T \leq t)$.) **(1,5 punts)**
-

5. Donada la variable aleatòria A uniforme en $(-\pi, \pi)$, definim el procés estocàstic $X(t) = A$, $t \in \mathbb{R}$. Digueu, justificant les respostes, si és certa o falsa cadascuna de les proposicions següents:

- (a) El valor mitjà estocàstic (esperança) del procés és una variable aleatòria.
- (b) El valor mitjà temporal en $(-T, T)$ del procés és constant.
- (c) El procés no és ergòdic en valor mitjà.

(1,5 punts)

6. Processos gaussians: definició i propietats.

(1,5 punts)
