

# CFIS

## Processos Estocàstics

13 de gener de 2012

Examen final

Temps: 3h

1. Siguin  $A$  i  $B$  variables aleatòries independents de valor mitjà 0 i variància  $\sigma^2$ . Donat el procés estocàstic  $X(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$ , calculeu-ne l'esperança i l'autocorrelació. Calculeu també la millor estimació lineal de  $X(t_2)$  donat  $X(t_1)$  i l'error de l'estimació. Interpreteu els casos en que aquest error és màxim o mínim.

*Solució:* L'esperança i l'autocorrelació del procés valen

$$m_X(t) = E(X(t)) = E(A) \cos(\omega t) + E(B) \sin(\omega t) = 0$$

$$\begin{aligned} R_X(t_1, t_2) &= E(X(t_1)X(t_2)) = E((A \cos(\omega t_1) + B \sin(\omega t_1))(A \cos(\omega t_2) + B \sin(\omega t_2))) \\ &= \sigma^2(\cos(\omega t_1) \cos(\omega t_2) + \sin(\omega t_1) \sin(\omega t_2)) = \sigma^2 \cos(\omega \tau), \quad \tau = |t_1 - t_2|. \end{aligned}$$

El procés és estacionari en sentit ampli.

Per a qualsevol  $t$ , la variable aleatòria  $X(t)$  té esperança 0 i podem prendre  $\widehat{X}(t_2) = \alpha X(t_1)$ . Aplicant el principi d'ortogonalitat tenim

$$0 = E\left(\left(X(t_2) - \widehat{X}(t_2)\right) X(t_1)\right) = R_X(t_1, t_2) - \alpha R_X(t_1, t_1),$$

d'on

$$\alpha = \frac{R_X(t_1, t_2)}{R_X(t_1, t_1)} = \cos(\omega \tau).$$

Per tant,

$$\widehat{X}(t_2) = X(t_1) \cos(\omega \tau).$$

L'error val

$$\begin{aligned} \epsilon &= E\left(\left(X(t_2) - \widehat{X}(t_2)\right)^2\right) = E\left(\left(X(t_2) - \widehat{X}(t_2)\right) X(t_2)\right) \\ &= R_X(0) - \cos(\omega \tau) R_X(\tau) = \sigma^2 (1 - \cos^2(\omega \tau)). \end{aligned}$$

2. Sigui  $\Delta$  una variable aleatòria uniforme en  $(0, a)$ . Definim el procés estocàstic (per a  $t > 0$ ):

$$X(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq \Delta, \\ 0, & \text{altrament.} \end{cases}$$

Calculeu les probabilitats  $P(X(t) = 1)$  i  $P(X(t) = 0)$  i determineu la funció valor mitjà de  $X(t)$ .

*Solució:* Fixat  $t$  tenim que  $P(X(t) = 1) = P(\Delta \geq t)$ . Com que  $\Delta$  és uniforme en  $(0, a)$ , aquesta probabilitat val

$$P(X(t) = 1) = P(\Delta \geq t) = \begin{cases} \frac{a-t}{a} = 1 - \frac{t}{a}, & 0 < t < a \\ 0, & t > a \end{cases}$$

Naturalment,

$$P(X(t) = 0) = 1 - P(X(t) = 1) = \begin{cases} \frac{t}{a}, & 0 < t < a \\ 1, & t > a \end{cases}$$

L'esperança de  $X(t)$  és

$$E(X(t)) = 1 \cdot P(X(t) = 1) + 0 \cdot P(X(t) = 0) = P(X(t) = 1).$$

---

3. Calculeu el valor mitjà  $m_Y(t)$  i l'autocorrelació  $R_Y(t, t + \tau)$  del procés estocàstic  $Y(t) = e^{-Xt}$ , on  $X$  és una variable aleatòria exponencial de paràmetre  $\mu$ . (Feu els càlculs prenent  $t$  i  $\tau$  positius).

*Solució:* Fent ús del teorema de l'esperança tenim:

$$\begin{aligned} m_Y(t) &= E(Y(t)) = E(e^{-Xt}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-xt} f_X(x) dx \\ &= \int_0^{\infty} e^{-xt} \mu e^{-\mu x} dx = \mu \int_0^{\infty} e^{-x(\mu+t)} dx = \frac{\mu}{\mu+t}. \end{aligned}$$

Anàlogament,

$$R_Y(t, t + \tau) = E(Y(t)Y(t + \tau)) = E(e^{-Xt}e^{-X(t+\tau)}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x(2t+\tau)} f_X(x) dx = \frac{\mu}{\mu + 2t + \tau}.$$

---

4. Sigui  $X(t)$  un procés de Poisson de taxa  $\mu$ . Calculeu les funcions de distribució i de densitat de probabilitat del temps  $T$  transcorregut fins a la tercera transició. (Recordeu que  $F_T(t) = P(T \leq t)$ .)

*Solució:* Observeu que l'esdeveniment  $\{T \leq t\}$  equival a que en  $(0, t]$  s'han produït 3 o més transicions del procés de Poisson. Per tant,

$$\begin{aligned} F_T(t) &= P(T \leq t) = P(X(t) \geq 3) = 1 - (P(X(t) = 0) + P(X(t) = 1) + P(X(t) = 2)) \\ &= 1 - e^{-\mu t} \left( 1 + \mu t + \frac{(\mu t)^2}{2} \right), \quad t > 0. \end{aligned}$$

La densitat de probabilitat és la derivada de la funció de distribució:

$$f_T(t) = F_T'(t) = \mu e^{-\mu t} \left( 1 + \mu t + \frac{(\mu t)^2}{2} \right) - e^{-\mu t} (\mu + \mu^2 t) = \mu e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^2}{2}, \quad t > 0.$$

---

5. Donada la variable aleatòria  $A$  uniforme en  $(-\pi, \pi)$ , definim el procés estocàstic  $X(t) = A$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Digueu, justificant les respostes, si és certa o falsa cadascuna de les proposicions següents:

- (a) El valor mitjà estocàstic (esperança) del procés és una variable aleatòria.
- (b) El valor mitjà temporal en  $(-T, T)$  del procés és constant.
- (c) El procés no és ergòdic en valor mitjà.

*Solució:*

- (a) Tenim que  $E(X(t)) = E(A) = 0$ . La proposició és falsa.
- (b) El valor mitjà temporal en  $(-T, T)$  de  $X(t)$  és la variable aleatòria

$$\mathcal{M}_T = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t) dt = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T A dt = A.$$

La proposició és falsa.

- (c) La proposició és certa. Si el procés fos ergòdic, la variable aleatòria  $\mathcal{M}_T$  hauria de convergir (p.e. en mitjana quadràtica) cap a  $m_X = 0$  quan  $T \rightarrow \infty$ . Però això no és cert ja que

$$E((\mathcal{M}_T - m_X)^2) = E(A^2) = \frac{\pi^2}{3} \neq 0.$$

---

## 6. Processos gaussians: definició i propietats.

---