

**ETSETB-FME**  
**Introducció a les Matemàtiques de l'Enginyeria**

Processos Estocàstics

9 de gener de 2009

temps: 2h 30m

---

1. Siguin  $X$  i  $Y$  variables aleatòries conjuntament gaussianes, amb valors mitjans  $m_X = 1$  i  $m_Y = -1$ , variàncies  $\sigma_X^2 = 1$  i  $\sigma_Y^2 = 4$ , i coeficient de correlació  $\rho$ ,  $0 < \rho \leq 1$ . Calculeu la millor estimació en mitjana quadràtica de  $S = X + Y$  donada  $T = X - Y$ . Calculeu també l'error d'aquesta estimació. Interpreteu el resultat quan  $\rho = 1$ , i relacioneu-lo, en aquest cas, amb l'estimació de  $Y$  donada  $X$ .

**(3 punts)**

---

2. Sigui  $A$  una variable aleatòria discreta que pren els valors  $0$  i  $\pi/2$ , cadascun d'ells amb probabilitat  $1/2$ , i sigui  $Y$  una variable aleatòria gaussiana d'esperança  $0$  i variància  $\sigma^2$ , independent de  $A$ . Definim el procés estocàstic

$$X(t) = Y \cos(t + A).$$

Calculeu la funció valor mitjà i la funció d'autocorrelació del procés  $X(t)$ . És  $X(t)$  estacionari en sentit ampli? Què podeu afirmar sobre l'ergodicitat en valor mitjà del procés?

**(3 punts)**

---

3. Siguin  $T_1$  i  $T_2$  el temps transcorregut fins a la primera i la segona transició, respectivament, en un procés de Poisson de taxa  $\mu$ .
- (a) Determineu  $P(T_1 \leq s, T_2 \leq t)$  per a  $0 < t < s$ .
  - (b) Determineu  $P(T_1 \leq s, T_2 > t)$  per a  $0 < s < t$ .
  - (c) Amb els resultats anteriors determineu la funció de distribució conjunta  $F_{T_1 T_2}(s, t)$ . Calculeu també la funció de densitat conjunta  $f_{T_1 T_2}(s, t)$ .  
(Indicació: considereu l'esdeveniment  $\{T_1 \leq s, T_2 \leq t\} \cup \{T_1 \leq s, T_2 > t\}$ .)
  - (d) Fent el canvi  $X = T_1$ ,  $Y = T_2 - T_1$ , calculeu la densitat conjunta  $f_{XY}(x, y)$ . Deduiu d'aquest resultat que les variables aleatòries  $X$  i  $Y$  són independents. (Recordeu que, per les propietats del procés de Poisson,  $X$  i  $Y$  són exponencials de paràmetre  $\mu$ .)

**(4 punts)**