

**ETSETB-FME**  
**Introducció a les Matemàtiques de l'Enginyeria**

Control de processos estocàstics

20 de desembre de 2007

temps: 1h 45m

---

1. Considereu els processos estocàstics:

$$X(t) = \cos(t + \Phi), \quad Y(t) = X(t) + N,$$

on  $\Phi$  és una variable aleatòria discreta que pren els valors  $0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ , amb igual probabilitat i  $N$  condicionada per  $\{\Phi = k\pi/2\}$  és una variable aleatòria gaussiana d'esperança  $m$  i variància  $\sigma^2$  si  $k = 0, 2$  i d'esperança  $m$  i variància  $2\sigma^2$  si  $k = 1, 3$ .

- (a) Calculeu  $m_X(t)$ ,  $E(N)$ ,  $R_X(t_1, t_2)$ ,  $E(X^2(t))$ ,  $E(N^2)$  i  $E(NX(t))$ .  
(Indicació: podeu fer els càlculs condicionant pels possibles valors de  $\Phi$ .)
  - (b) Calculeu les funcions valor mitjà i d'autocorrelació del procés  $Y(t)$ . Digueu si  $Y(t)$  és o no estacionari.
  - (c) Determineu el millor estimador lineal no homogeni en mitjana quadràtica de  $X(t)$  donat  $Y(t)$ . Què dona quan  $\sigma \rightarrow 0$ ? Raoneu el resultat.
- 

2. El nombre de viatgers que arriba a una parada d'autobús segueix un procés de Poisson de taxa  $\mu = 5$  viatgers per minut. Per la parada passa un autobús cada quatre minuts.

- (a) Un viatger arriba a la parada i es troba quatre persones esperant. Quin és el temps mitjà que haurà d'esperar a la parada?
  - (b) Quan arriba l'autobús es troba vint persones a la parada. Proveu que la variable aleatòria que compta el nombre de viatgers que fa tres o més minuts que s'esperen segueix una distribució binomial. Quin és el nombre mitjà de viatgers que fa tres o més minuts que s'esperen?
- 

3. Siguin  $X$  i  $Y$  variables aleatòries contínues. Si  $\hat{Y} = g(X)$  és la millor estimació (no lineal) en mitjana quadràtica de  $Y$  donada  $X$ , demostreu que es compleix el principi d'ortogonalitat, és a dir, que les variables aleatòries  $Y - \hat{Y}$  i  $X$  són ortogonals.