

ETSETB-FME
Introducció a les Matemàtiques de l'Enginyeria

Control. 22 de desembre de 2004

Temps: 2h 30m

1. (a) Si X i Y són variables aleatòries independents i $Z = \min(X, Y)$, demostreu que

$$F_Z(z) = 1 - (1 - F_X(z))(1 - F_Y(z))$$

- (b) Siguin $X_1(t)$ i $X_2(t)$ processos de Poisson independents de taxes μ_1 i μ_2 , respectivament, i sigui

$$X(t) = X_1(t) + X_2(t).$$

Calculeu la funció densitat de probabilitat i l'esperança del temps T transcorregut fins que es produeix la primera transició de $X(t)$.

- (c) Calculeu la funció de probabilitat de primer ordre del procés $X(t)$. Sabrieu relacionar aquest resultat amb l'obtingut a l'apartat anterior?

(4 punts)

2. A partir de les variables aleatòries A i B conjuntament gaussianes d'esperança zero, variàncies σ_A^2 i σ_B^2 , respectivament, i coeficient de correlació ρ , es defineix el procés estocàstic

$$X(t) = At + B$$

- (a) Calculeu el valor mitjà i la funció d'autocorrelació de $X(t)$. És un procés estacionari en sentit ampli?
- (b) Doneu la funció de densitat de primer ordre del procés.
- (c) Si A i B són incorrelades, trobeu la millor estimació lineal en mitjana quadràtica de $X(t)$ donades $X(t_1)$ i $X(t_2)$, amb t, t_1, t_2 instants distints. Comenteu els casos $t \rightarrow t_1$ i $t \rightarrow t_2$.
- (d) Calculeu l'error quadràtic mitjà comés amb l'estimador calculat a l'apartat anterior. Interpreteu el resultat.

(4 punts)

3. Expliqueu el concepte d'ergodicitat en valor mitjà.

(2 punts)