

ETSETB–FME
Introducció a les Matemàtiques de l'Enginyeria

Control. 19 de desembre de 2001

Temps: 1h 30m

1. Calculeu la funció valor mitjà i la funció d'autocorrelació de l'oscil·lació aleatòria

$$X(t) = \cos(\Omega t + \Phi),$$

on Ω és una variable aleatòria amb funció densitat de probabilitat

$$f_{\Omega}(\omega) = \begin{cases} e^{-(\omega-\omega_0)}, & \omega \geq \omega_0 \\ 0, & \text{altrament} \end{cases},$$

i Φ és una variable aleatòria uniforme en $[0, 2\pi]$, essent Ω i Φ independents.

2. (a) Enuncieu i demostreu dos criteris suficients d'ergodicitat en valor mitjà.
(b) Si $X(t)$ és un procés estocàstic estacionari en sentit estricte, ho és també $X^2(t)$? Justifiqueu la resposta.
(c) Com definiríeu el concepte d'ergodicitat en potència mitjana. (Recordeu que la potència mitjana és d'un procés estocàstic $X(t)$ és $E(X^2(t))$.)
(d) Formuleu una condició necessària i suficient per a que un procés estocàstic $X(t)$, estacionari en sentit estricte, sigui ergòdic en potència mitjana.
-

3. Sigui $X(t)$ un procés estocàstic estacionari en sentit ampli amb valor mitjà $m_X = 0$. Sigui $Y_1(t)$ la millor estimació lineal en mitjana quadràtica de $X(t+T)$ donats $X(t)$, $X(t-T)$, $X(t-2T)$; i sigui $Y_2(t)$ la millor estimació lineal en mitjana quadràtica de $X(t+T)$ donat únicament $X(t)$. Demostreu que si la funció d'autocorrelació del procés és $R_X(\tau) = A e^{-\alpha|\tau|}$, aleshores $Y_1(t) = Y_2(t)$. Interpreteu aquest resultat en el cas del senyal telegràfic.