AULA PRÀCTICA

Variables aleatòries i processos estocàstics. Problemes

Josep Fàbrega Canudas
Miguel Ángel Fiol Mora
Emilio Sanvicente Gargallo
Oriol Serra Albó

EDICIONS UPC

Variables aleatòries i processos estocàstics. Problemes

Aula Pràctica 19

Variables aleatòries i processos estocàstics. Problemes

Josep Fàbrega Canudas
Miguel Ángel Fiol Mora
Emilio Sanvicente Gargallo
Oriol Serra Albó

EDICIONS UPC

Primera edició: setembre de 1993

En col·laboració amb el Servei de Llengües i Terminologia de la UPC

Disseny de la coberta: Manuel Andreu

Producció: Servei de Publicacions de la UPC
i CPET (Centre de Publicacions del Campus Nord)
La Cup. C. Gran Capità, s/n, 08034 Barcelona

Dipòsit legal: B-22.196-93
ISBN 84-7653-304-7

Variables Aleatòries i Processos Estocàstics. Problemes

J. Fàbrega, M.A. Fiol, E. Sanvicente i O. Serra

Variables Aleatòries i Processos Estocàstics. Problemes

Aquest llibre constitueix un recull de problemes resolts i proposats sobre probabilitat combinatòria, variables aleatòries i processos estocàstics. Els problemes escollits presenten aplicacions de la Teoria de la Probabilitat a l'enginyeria i, particularment, a l'Enginyeria de Telecomunicació.

Els autors del text són professors del Departament de Matemàtica Aplicada i Telemàtica de la Universitat Politècnica de Catalunya i tots ells han impartit ensenyaments sobre variables aleatòries i processos estocàstics a l'Escola Tècnica Superior d'Enginyers de Telecomunicació d'aquesta universitat. Els autors agraeixen la col·laboració dels professors E. Barenys, P. Morillo, J. Villar i I. Alegre, el treball dels quals ha estat decisiu en el resultat final del llibre.

Index

Capítol 0. Combinatòria

1. Considereu els nombres combinatoris següents :

V_m^n : Nombre de variacions de m elements presos de n en n.

C_m^n : Nombre de combinacions de m elements presos de n en n.

P_n : Nombre de permutacions de n elements.

a) Trobeu una fórmula que relacioni els tres paràmetres.

b) Quina relació hi ha entre V_m^n i V_{m-k}^{n-k} ?

c) Proveu la relació $C_m^n = C_{m-1}^n + C_{m-1}^{n-1}$. Deduïu-ne que $C_m^n = \sum_{k=1}^{m-n+1} C_{m-k}^{n-1}$ i vegeu un exemple del significat d'aquesta igualtat al triangle de Tartaglia.

d) Fent servir el resultat anterior, calculeu

$$\begin{aligned}&S(m,n) =\\&= (1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-1)) + (2\cdot 3\cdot 4\cdot \ldots \cdot n) + \ldots +\\&+ \ldots + ((m-n+1)\cdot (m-n+2)\cdot (m-n+3)\cdot \ldots \cdot (m-1))\end{aligned}$$

en termes dels nombres combinatoris.

(a) Els tres nombres combinatoris són,

$$V_m^n = \tfrac{m!}{(m-n)!}, \quad C_m^n = \tbinom{m}{n} = \tfrac{m!}{(m-n)!n!}, \quad P_n = n!,$$

de manera que $V_m^n = C_m^n P_n$.

Aquesta igualtat s'interpreta en termes combinatoris observant que cada una de les combinacions de m elements presos de n en n dóna lloc a $n!$ variacions (cada una de les seves possibles ordenacions).

(b) Ambdós nombres es poden relacionar escrivint,

$$V_m^n = \frac{m!}{(m-n)!} = \frac{m!}{(m-k)!}\frac{(m-k)!}{(m-n)!} = V_m^k \cdot V_{m-k}^{n-k}.$$

En termes combinatoris, cada una de les variacions de m elements presos de n en n es pot obtenir triant primer k elements dels m i afegint-hi després $n-k$ elements triats entre els $m-k$ restants.

(c) Aritmèticament,

$$\begin{aligned}
C^n_{m-1} + C^{n-1}_{m-1} &= \frac{(m-1)!}{(m-n-1)!n!} + \frac{(m-1)!}{(m-n)!(n-1)!} = \\
&= \frac{(m-n)(m-1)! + n(m-1)!}{(m-n)!n!} = \frac{m!}{(m-n)!n!} = C^n_m.
\end{aligned}$$

Es pot establir una interpretació combinatòria de la igualtat com en els apartats anteriors. Quina?

Fent servir iterativament la igualtat anterior tenim en el primer sumand de cada expressió,

$$\begin{aligned}
C^n_m &= \binom{m}{n} = \binom{m-1}{n} + \binom{m-1}{n-1} = \binom{m-2}{n} + \binom{m-2}{n-1} + \binom{m-1}{n-1} = \\
&= \binom{m-3}{n} + \binom{m-3}{n-1} + \binom{m-2}{n-1} + \binom{m-1}{n-1} = \ldots = \\
&= \binom{n}{n} + \binom{n}{n-1} + \binom{n+1}{n-1} + \ldots + \binom{m-2}{n-1} + \binom{m-1}{n-1},
\end{aligned}$$

d'on, com que $\binom{n}{n} = \binom{n-1}{n-1}$,

$$C^n_m = \sum_{k=1}^{m-n+1} \binom{m-k}{n-1} = \sum_{k=1}^{m-n+1} C^{n-1}_{m-k}.$$

Recordeu que els termes del triangle de Tartaglia són justament els nombres combinatoris. En el triangle, la igualtat anterior es pot expressar segons el diagrama,

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}$$

(d) El sumatori $S(m,n)$ es pot escriure com

$$\begin{aligned}
S(m,n) &= (n-1)! + \frac{n!}{1} + \frac{(n+1)!}{2} + \ldots + \frac{(m-1)!}{(m-n)!} = \\
&= (n-1)!\left[\binom{n-1}{n-1} + \binom{n}{n-1} + \ldots + \binom{m-1}{n-1}\right] = \\
&= (n-1)! \sum_{k=1}^{m-n+1} C^{n-1}_{m-k} = P_{n-1}C^n_m.
\end{aligned}$$

2. a) Quants subconjunts té un conjunt de n elements?

b) Quina és la mitjana aritmètica del nombre d'elements d'aquests subconjunts?

(Recordeu el binomi de Newton, $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$.)

(a) El nombre de subconjunts de k elements $(0 \leq k \leq n)$ és $\binom{n}{k}$, de manera que el nombre total de subconjunts és

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = (1+x)^n\big|_{x=1} = 2^n.$$

Una altra forma d'obtenir el resultat és la següent. Cada subconjunt S de $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ es pot identificar amb una n-pla $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ amb $x_i = 1$ si $a_i \in S$ i $x_i = 0$ si $a_i \notin S$. Per exemple, el subconjunt $\{a_1, a_2\}$ ve representat per la n-pla $(1, 1, 0, \ldots, 0)$. Hi ha tants subconjunts com n-ples i d'aquestes n'hi ha 2^n.

(b) Si m és la mitjana aritmètica,

$$\begin{aligned} m &= \frac{0\binom{n}{0} + 1\binom{n}{1} + \ldots + n\binom{n}{n}}{2^n} = \\ &= \frac{\frac{d}{dx}(1+x)^n\big|_{x=1}}{2^n} = \frac{n2^{n-1}}{2^n} = \frac{n}{2}. \end{aligned}$$

3. Quin és el valor de les sumes $S = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}$ i $S' = \sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k}$?

Fent servir el binomi de Newton,

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = \left.\frac{d^2}{dx^2}(1+x)^n\right|_{x=1} = \\ &= n(n-1)(1+x)^{n-2}\big|_{x=1} = n(n-1)2^{n-2}. \end{aligned}$$

Pel que fa a S', es pot escriure

$$S' = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} + \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$$

on el primer sumand és S i el segon, d'acord amb el problema anterior, val $n2^{n-1}$, d'on

$$S' = n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} = n(n+1)2^{n-2}.$$

4. a) De quantes maneres diferents es poden asseure n persones en una taula circular?

b) De quantes maneres diferents es poden asseure $3n$ persones en una taula en forma de polígon de n costats amb tres seients a cada costat?

(a) Sigui $P = \{1, 2, \ldots, n\}$ el conjunt de persones. Si $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ és una permutació dels elements de P, a causa de la simetria circular, les n permutacions

$$(\underline{p}_1, p_2, \ldots, p_n); (p_2, \ldots, p_n, \underline{p}_1); \ldots; (p_n, \underline{p}_1, \ldots, p_{n-1})$$

corresponen a una mateixa distribució a la taula. Per tant, el nombre de maneres d'asseure's és

$$\frac{P_n}{n} = (n-1)!$$

(b) Amb un raonament similar al cas anterior, si $(p_1, p_2, \ldots, p_{3n})$ és una permutació dels elements de P, les n permutacions

$$\begin{gathered}(\underline{p_1, p_2, p_3}, p_4, p_5, p_6, \ldots, p_{3n-2}, p_{3n-1} p_{3n});\\ (p_4, p_5, p_6, \ldots, p_{3n-2}, p_{3n-1} p_{3n}, \underline{p_1, p_2, p_3});\\ \vdots\\ (p_{3n-2}, p_{3n-1} p_{3n}, \underline{p_1, p_2, p_3}, \cdots p_{3n-5}, p_{3n-4}, p_{3n-3})\end{gathered}$$

representen la mateixa ordenació a la taula, de forma que el nombre de maneres diferents és

$$\frac{P_{3n}}{n} = 3(3n-1)!.$$

5. Quants nombres naturals hi ha de quatre xifres? Quant val la suma de tots ells?

Els nombres naturals de quatre xifres diferents són de la forma

$$c_1c_2c_3c_4, \quad c_1 \in \{1, 2, \ldots, 9\}, \; c_2, c_3, c_4 \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$$

de manera que hi ha nou eleccions per a c_1, nou xifres diferents de c_1 per a c_2, vuit per a c_3 i set per a c_4,

$$N = 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536.$$

(Es pot fer un raonament similar començant a considerar c_4?)

Per obtenir-ne la suma, sumem per separat les columnes d'unitats, desenes, centenes i milers i considerem quantes vegades apareix cada xifra a cada columna.

De nombres de la forma $c_1c_2c_3i$ n'hi ha $8 \cdot 8 \cdot 7 = 448$ per a cada $i = 1, 2, \ldots 9$ i $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$ si $i = 0$. El mateix compte val per a nombres de la forma $c_1c_2ic_3$ i $c_1ic_2c_3$, de manera que unitats desenes i centenes sumen

$$448(1 + 2 + \ldots + 9) = 448 \cdot 45 = 20160.$$

Pel que fa als milers, cada xifra i apareix en primera posició $4536/9 = 504$ vegades, de manera que sumen

$$504(1 + 2 + \ldots + 9) = 504 \cdot 45 = 22680.$$

La suma S de tots els nombres és, doncs,

$$S = 20160 + 20160 \cdot 10 + 20160 \cdot 100 + 22680 \cdot 1000 = 24917760.$$

6. De quantes maneres diferents es poden col·locar n boles en m caixes en els casos següents:

(a) Les boles i les caixes estan numerades; per tant es distingueixen dues distribucions si tenen boles diferents a caixes diferents.

(b) Com en el cas (a) però exigint que hi hagi n_1 boles a la caixa 1, n_2 a la caixa 2 etc. (amb $n_1 + \ldots + n_m = n$).

(c) Les boles no son distingibles però les caixes sí i a cada caixa hi ha com a molt una bola ($m \geq n$).

(d) Les boles no son distingibles però les caixes sí (per tant dues distribucions es distingueixen només pel nombre de boles a cada caixa).

(e) Com en el cas (d) però $n \geq m$ i a cada caixa hi ha almenys una bola.

(f) Com en el cas (a) però $n \geq m$ i cap caixa pot quedar buida.

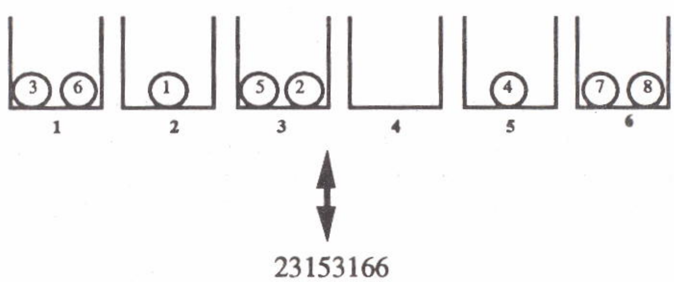
(g) Les boles estan numerades però les caixes no són distingibles.

(a) Cada distribució es pot identificar de manera biunívoca amb una n-pla

$$(c_1, c_2, \ldots, c_n),\; c_i \in \{1, 2, \ldots, m\},$$

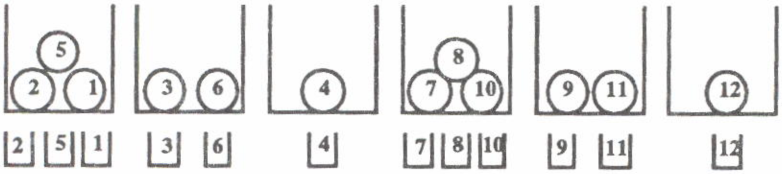
on $c_i = k$ indica que la bola i està a la caixa k. Hi ha m^n n-ples d'aquestes (m eleccions a cadascuna de les n posicions), de manera que

$$N_a = m^n.$$



Aquest és el nombre de *variacions amb repetició* de m elements presos de n en n, V^n_{Rm}, i conta també el nombre de *mostres ordenades amb reposició* que es poden extreure d'una urna amb m boles numerades. També conta el nombre d'aplicacions d'un conjunt de n elements en un altre de m elements.

(b) Subdivim la caixa i en n_i caixetes, $i = 1, 2, \ldots, m$. Posem una bola a cada una d'aquestes caixetes i tornem a agrupar les n_i caixetes en que s'havia subdividit la caixa i, $i = 1, 2, \ldots, m$. Així obtenim una de les distribucions amb n_i boles a la caixa i.



De les $n!$ maneres diferents de posar una bola a cada una de les caixetes, dues que difereixin en l'ordre en què les boles estan col·locades dins un mateix grup de caixetes donen lloc a la mateixa distribució. Per tant,

$$N_b = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_m!}.$$

Aquest és el nombre de *variacions amb repetició* de m elements en les quals l'element i es repeteix n_i vegades, $V_{Rm}^{n_1 n_2 \ldots n_m}$. Continuant amb l'analogia entre maneres d'omplir caixes amb boles i n-ples, aquest nombre conta també quantes n-ples (o paraules) que continguin n_i vegades el símbol $i, 1 \leq i \leq m$, es poden formar a partir d'un alfabet de m símbols $\{1, 2, \ldots, m\}$.

(c) Cada distribució es pot associar a una m-pla $x_1 x_2 \ldots x_m$ on $x_i = 1$ si la caixa i està plena i $x_i = 0$ altrament. D'acord amb l'apartat anterior,

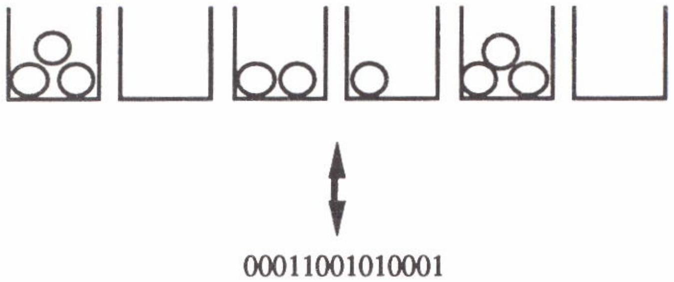
$$N_c = \frac{m!}{n!(m-n)!} \equiv \binom{m}{n}.$$

Aquest és el nombre de *combinacions* de m elements presos de n en n.

Aquest nombre conta també el de subconjunts de mida n d'un conjunt de mida m. També conta el nombre de mostres de mida n sense reposició que es poden treure d'una urna amb m boles i és també el coeficient de x^n a

$$(1+x)^m = \underbrace{(1+x)\ldots(1+x)}_{m}.$$

(d) En aquest cas, dues distribucions difereixen pel nombre de boles a cada caixa. Cada distribució es pot identificar amb una seqüència de llargada $m+n-1$ amb $m-1$ uns, cada un representant una separació entre caixes, i n zeros, cada un representant una bola (vegeu l' exemple de la figura).



Per tant,

$$N_d = C^n_{m+n-1} = \binom{m+n-1}{n} = \frac{(m+n-1)!}{(m-1)!n!}.$$

Aquest nombre és el de *combinacions amb repetició* de m elements presos de n en n, C^n_{Rm}, i conta també el nombre de mostres amb reposició (no ordenades) de mida n que es poden extreure d'una urna amb m boles.

Podeu comprovar també que correspon al coeficient de x^n en el desenvolupament de

$$\frac{1}{(1-x)^m} = \underbrace{(1+x+x^2+\cdots)(1+x+x^2+\cdots)\dots(1+x+x^2+\cdots)}_{m},$$

i que conta també de quantes maneres diferents es pot expressar n com a suma de m nombres naturals (que poden ser nuls), considerant diferents dues expressions si difereixen en l'ordre. Per exemple, 3 es pot expressar de les quatre maneres següents com a suma de dos nombres naturals:

$0+3$	1000
$1+2$	0100
$2+1$	0010
$3+0$	0001

(a la segona columna es dóna l'equivalència en termes de seqüències).

(e) Col·loquem primer una bola a cada caixa. Estem ara en les condicions del cas (d) amb $n-m$ boles, de manera que

$$N_e = \binom{(n-m)+m-1}{n-m} = \binom{n-1}{n-m} = \binom{n-1}{m-1}.$$

(f) Diem A_i el conjunt de distribucions que deixen buida la caixa i i A el conjunt de totes les distribucions de n boles diferents en m caixes diferents. Aleshores,

$$N_f = |A| - |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m|,$$

on $|A| = N_a = m^n$. Com que els conjunts $A_1, A_2, \ldots, A_m$ no són disjunts, el cardinal de la seva unió, diguem-li B, s'ha de calcular fent servir la *fórmula* *d'inclusió-exclusió*

$$\begin{aligned}|B| &= |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m| = \\ &= \sum_{1\le i\le m} |A_i| - \sum_{1\le i<j\le m} |A_i \cap A_j| + \sum_{1\le i<j<k\le m} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots \\ &\quad \ldots + (-1)^m |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m|,\end{aligned}$$

on

$$\begin{aligned}&|A_i| = (m-1)^n \\ &|A_i \cap A_j| = (m-2)^n \\ &|A_i \cap A_j \cap A_k| = (m-3)^n \\ &\vdots \\ &|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m| = (m-m)^n = 0.\end{aligned}$$

Així doncs,

$$\begin{aligned}|B| &= \binom{m}{1}(m-1)^n - \binom{m}{2}(m-2)^n + \binom{m}{3}(m-3)^n + \ldots \\ &\quad \ldots + (-1)^{m-2}\binom{m}{m-1}1^n + 0 = \sum_{k=1}^{m-1}(-1)^{k-1}\binom{m}{k}(m-k)^n.\end{aligned}$$

Per tant,

$$N_f = |A| - |B| = m^n - \sum_{k=1}^{m-1}(-1)^{k-1}\binom{m}{k}(m-k)^n.$$

Nota: Una altra solució: seleccionem m boles (de $\binom{n}{m}$ maneres diferents), les posem una a cada caixa (de $m!$ maneres diferents) i omplim després les caixes amb les $(n-m)$ boles que queden (de n^{n-m} maneres diferents), d'on obtenim,

$$N_f = \binom{n}{m} m! n^{n-m}.$$

Què hi ha d'erroni en aquest argument? (Proveu-ho amb tres boles i dues caixes)

(g) Per a cada distribució podem obtenir $m!$ distribucions diferents amb caixes distingibles (podem etiquetar-les de $m!$ maneres diferents amb m etiquetes). Per tant,

$$N_g = \frac{N_a}{m!} = \frac{m^n}{m!}.$$

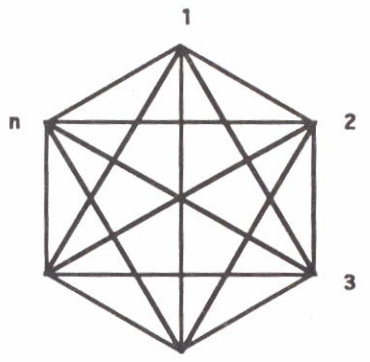
7. a) Quantes diagonals té un polígon regular de n costats?

b) Quin és el nombre mínim de vèrtexs que cal prendre com a origen per dibuixar totes les diagonals?

---

a) Si afegim els costats, cada parell de vèrtexs del polígon està unit per algun segment. Com que hi ha $\binom{n}{2}$ parells, dels quals n estan units per costats, el nombre de diagonals és

$$\binom{n}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}.$$



b) Si deixem de prendre com a origen tres o més vèrtexs, com que almenys dos d'ells no son veïns en el polígon, deixem de dibuixar almenys una diagonal. Per tant, per tal de dibuixar totes les diagonals, cal que prenguem almenys $n-2$ vèrtexs com a origen. No cal prendre'n més ja que si enumerem consecutivament els vèrtexs del polígon,

el vèrtex 1 'cobreix' $n-3$ diagonals
el vèrtex 2 'cobreix' $n-3$ noves diagonals
el vèrtex 3 'cobreix' $n-4$ noves diagonals
.
.
el vèrtex i 'cobreix' $n-i-1$ noves diagonals
.
.
el vèrtex $n-2$ 'cobreix' 1 nova diagonal

i en total en cobreixen

$$(n-3) + \sum_{i=2}^{n-2}(n-i-1) = (n-3) + \frac{(n-3)+1}{2}(n-3) = \frac{n(n-3)}{2},$$

que són totes.

e) Hi ha $5^2 \cdot 15^4$ paraules que comencen amb dues vocals i $15^4 \cdot 10^2$ que acaben amb dues consonants. Entre unes i altres contem dues vegades les que comencen amb dues vocals i acaben en dues consonants, de les quals n'hi ha $5^2 \cdot 15^2 \cdot 10^2$. Per tant,

$$N_e = 5^2 \cdot 15^4 + 15^4 \cdot 10^2 - 5^2 \cdot 15^2 \cdot 10^2 = 5.765.625.$$

8. Un alfabet consta de deu consonants i cinc vocals.

a) Quantes paraules diferents de cinc lletres es poden formar?

b) Quantes paraules de sis lletres amb dues vocals es poden formar?

c) Quantes paraules de set lletres amb almenys una vocal es poden formar?

d) Quantes paraules de cinc lletres amb almenys dues vocals seguides es poden formar?

e) Quantes paraules de sis lletres que comencin amb dues vocals o bé acabin amb dues consonants es poden formar?

---

a) L'alfabet té quinze símbols de manera que el nombre de paraules diferents que es poden formar amb cinc lletres és

$$N_a = 15^5.$$

b) Suposem primer que les vocals han d'ocupar les dues primeres posicions a la paraula. Es poden formar aleshores $5^2 \cdot 10^4$ paraules. A cada una d'elles es poden distribuir les vocals de $\binom{6}{2}$ maneres diferents, de manera que

$$N_b = \binom{6}{2} 5^2 10^4 = 3.750.000$$

c) El nombre de paraules de set lletres és 15^7 i el nombre que se'n pot formar sense cap vocal és 10^7, de manera que

$$N_c = 15^7 - 10^7.$$

d) De totes les paraules de cinc lletres d'aquest alfabet, totes les que tenen quatre o més vocals tenen segur dues vocals seguides. Les que tenen tres vocals tenen dues vocals seguides, tret de les de la forma

vcvcv,

de les quals n'hi ha $5^3 10^2$. Les que tenen dues vocals les tenen seguides si no són de la forma

vcvcc
vccvc
vcccv
cvcvc
cvccv
ccvcv

de les quals n'hi ha $6 \cdot 5^2 \cdot 10^3$. Finalment, les paraules que tenen una $(5 \cdot 5^1 \cdot 10^4)$ o cap (10^5) vocal no en tenen dues de seguides. Per tant,

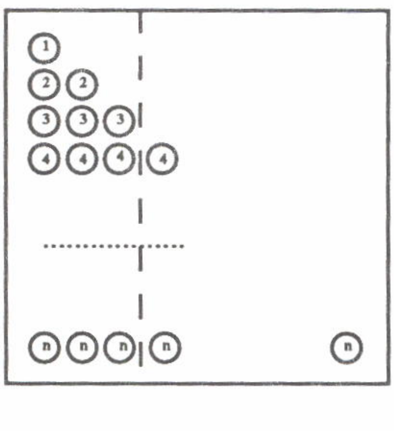
$$N_d = 15^5 - 5^3 10^2 - 6 \cdot 5^2 \cdot 10^3 - 5 \cdot 5^1 \cdot 10^4 - 10^5 = 246.875.$$

9. A una bossa hi ha una bola numerada amb un 1, dues numerades amb un 2, i així fins a n numerades amb una n. Donat k entre 1 i n, quin és el mínim nombre N_k de boles que cal prendre per tal d'assegurar que n'hi haurà k numerades igual?

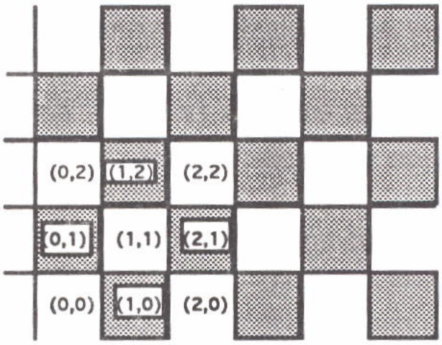
El problema es pot plantejar de manera lleugerament diferent: quin és el nombre màxim de boles que podem extreure sense que n'hi hagi k numerades igual?.

En aquest cas se'n poden treure com a molt $k-1$ de cada classe. Es pot treure l'única marcada amb un 1, les dues marcades amb un 2 i així succesivament fins a les $k-1$ marcades amb $k-1$. A partir d'aquí només podem treure $k-1$ boles de cada una de les classes marcades amb un número entre k i n. Si en treiem una sola més ja n'hi haurà k de marcades amb el mateix número. Així doncs,

$$N_k = (1 + 2 + \ldots + (k-2) + (k-1)(n-k+2)) + 1 = (k-1)(n - \frac{k}{2} + 1) + 1.$$



10. Considerem un tauler d'escacs ilimitat en el qual cada quadre s'identifica per un punt de coordenades enteres com a la figura:



a) Quants camins de llargada mínima pot seguir una torre per anar del quadre $(0, 0)$ fins al (m, n)?

b) Quants camins de llargada mínima pot seguir un alfil per anar del quadre $(0, 0)$ fins al (m, n) i, en aquest cas, quines condicions han de complir m i n?

---

a) Cal fer $m + n$ passos dels quals m són horitzontals i n verticals (amb més passos el camí no és de llargada mínima). Aquests passos es poden repartir de

$$N_a = \binom{m+n}{n}$$

maneres diferents.

b) Com que el quadre de partida i el d'arribada han de ser del mateix color, $m + n$ ha de ser parell. Suposem que m, n són positius (els altres casos són similars). Per arribar a (m, n), l'alfil ha de fer passos $(1, 1)$ i $(-1, 1)$ si $m \leq n$ o bé passos $(1, 1)$ i $(1, -1)$ si $m > n$. En el primer cas, fa un total de n passos dels quals $\frac{m+n}{2}$ són del tipus $(-1, 1)$ i, en el segon, fa un total de m passos dels quals $\frac{m+n}{2}$ són del tipus $(1, 1)$. En qualsevol cas, tots els camins de llargada mínima reparteixen $\frac{m+n}{2}$ d'un tipus en un total de $\max(m, n)$ i

$$N_b = \binom{\max(m,n)}{\frac{m+n}{2}}.$$

11. De quantes maneres es poden aliniar m boles blanques i n de negres, $m \leq n+1$, de manera que no n'hi hagi dues de blanques seguides (les boles d'un mateix color són indistingibles)

Les m boles blanques s'han de distribuir a les $n+1$ posicions de la figura (una com a molt a cada posició), de manera que

$$N = \binom{n+1}{m}.$$

12. Quantes permutacions de $\{1, 2, \ldots, n\}$ hi ha de manera que cap xifra coincideixi amb la seva posició? Quin és el límit d'aquest nombre quan $n \to \infty$?

Si A_n és el conjunt de totes les permutacions; $A_{n,i}$ el de les permutacions en les quals el símbol i està al seu lloc, i B_n el de les permutacions en les que cap xifra està al seu lloc,

$$|B_n| = |A_n| - |A_{n,1} \cup A_{n,2} \cup \ldots \cup A_{n,n}|,$$

on $|A_n| = n!$. Com que els conjunts $A_{n,i}, A_{n,j}$ tenen interseccions no buides, el cardinal de la seva unió s'ha de calcular fent servir el principi d'inclusió-exclusió,

$$\begin{aligned}&|A_{n,1} \cup A_{n,2} \cup \ldots \cup A_{n,n}| = \\ &= \textstyle\sum_{1\le i\le n} |A_{n,i}| - \sum_{1\le i<j\le n} |A_{n,i} \cap A_{n,j}| + \sum_{1\le i<j<k\le n} |A_{n,i} \cap A_{n,j} \cap A_{n,k}| + \ldots \\ &\ldots + (-1)^{n+1}|A_{n,1} \cap A_{n,2} \cap \ldots \cap A_{n,n}|,\end{aligned}$$

on

$$\begin{array}{l} |A_{n,i}| = (n-1)! \\ |A_{n,i} \cap A_{n,j}| = (n-2)! \\ |A_{n,i} \cap A_{n,j} \cap A_{n,k}| = (n-3)! \\ \cdot \\ \cdot \\ |A_{n,1} \cap A_{n,2} \cap \ldots \cap A_{n,n}| = 1 \end{array}$$

Així doncs,

$$\begin{aligned} |B_n| &= n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \binom{n}{3}(n-3)! + \ldots \\ &\quad \ldots + \binom{n}{n-1}(-1)^{n-1}2! + \binom{n}{n}(-1)^n 1! = \\ &= n!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{(-1)^n}{n!}\right). \end{aligned}$$

En particular, quan $n \to \infty$, l'expressió dins el parèntesi tendeix a e^{-1} de manera que

$$B_n \to \frac{n!}{e}.$$

Nota: Comproveu que $b_n = |B_n|$ satisfà l'equació

$$b_n = (n-1)(b_{n-1} + b_{n-2})$$

i interpreteu-la combinatòriament.

13. El billar americà té dues boles blanques, tres de negres i quatre de vermelles. De quantes maneres diferents es poden distribuir les nou boles en els quatre forats? (Boles del mateix color no es distingeixen.)

Aquest problema és com el de posar boles indistingibles en caixes: hi ha $\binom{4+2-1}{2}$ maneres d'entrar les blanques, $\binom{4+3-1}{3}$ d'entrar les negres i $\binom{4+4-1}{4}$ d'entrar les vermelles, de manera que

$$N = \binom{5}{2}\binom{6}{3}\binom{7}{4} = 7000.$$

Capítol 1. Probabilitat: conceptes bàsics

1. Quatre daus, A, B, C i D, tenen les cares rotulades amb els números següents:

$$\begin{array}{llllll} A: & 0, & 0, & 4, & 4, & 4, & 4 \\ B: & 3, & 3, & 3, & 3, & 3, & 3 \\ C: & 2, & 2, & 2, & 2, & 7, & 7 \\ D: & 1, & 1, & 1, & 5, & 5, & 5 \end{array}$$

Un dau guanya un altre quan té probabilitat més gran de treure una puntuació més alta. Demostreu que A guanya B, B guanya C i C guanya D. Es pot afirmar que A guanya D?

- $$P(A > B) = P(A = 4) = \frac{4}{6}.$$

  Per tant, A *guanya* B. (A té probabilitat més gran de treure una puntuació més alta.)

- $$P(B > C) = P(C = 2) = \frac{4}{6}.$$

  Així, B *guanya* C.

- $$\begin{aligned} P(C > D) &= P((C = 2 \textit{ i } D = 1) \textit{ o } (C = 7)) = \\ &= P(C = 2 \textit{ i } D = 1) + P(C = 7) = \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{6} = \frac{4}{6}. \end{aligned}$$

  Per tant, C *guanya* D

Finalment,

$$\begin{aligned} P(D > A) &= P((D = 1 \textit{ i } A = 0) \textit{ o } (D = 5)) = \\ &= P(D = 1 \textit{ i } A = 0) + P(D = 5) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{2} = \frac{4}{6}. \end{aligned}$$

Així, també D *guanya* A. La relació *guanya* no és transitiva.

2. En una habitació hi ha tres bancs amb dos seients cadascun d'ells. Entren dues persones que s'asseuen a l'atzar. Trobeu la probabilitat que les dues persones s'asseguin juntes.

El problema no està correctament formulat. Falta precisar què vol dir "s'asseuen a l'atzar". Per exemple, si és el banc el que s'escull a l'atzar, les dues persones s'asseuen juntes si escullen el mateix banc. Per tant,

$$P = 3\,(\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{3}.$$

En canvi, si és el seient el que s'escull a l'atzar,

$$P = \frac{3.2}{V_6^2} = \frac{3.2}{6.5} = \frac{1}{5},$$

o també,

$$P = P(\text{junts}) = \sum_{i=1}^{6} P(\text{junts} \mid \text{el 1r escull } i)P(\text{el 1r escull } i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{5}.$$

3. Una família té dos fills.

(a) Quina és la probabilitat que ambdós siguin homes si almenys un d'ells ho és?

(b) Quina és la probabilitat que ambdós siguin homes si el més jove ho és?

L'espai mostral Ω és:

$$\Omega = \{(v,v),(v,d),(d,v),(d,d)\}$$

(a) Sigui $A = \{(v,v)\}$ i $B = \{(v,v),(v,d),(d,v)\}$. Així, la probabilitat que ambdós siguin homes si almenys un ho és val:

$$P(A|B) = \frac{P(A\bigcap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}.$$

(b) Sigui $A = \{(v,v)\}$ i $B' = \{(v,v),(v,d)\}$. Per tant, la probabilitat que ambdós siguin homes si el més jove ho és val:

$$P(A|B') = \frac{P(A\bigcap B')}{P(B')} = \frac{P(A)}{P(B')} = \frac{1/4}{2/4} = \frac{1}{2}.$$

4. D'una baralla espanyola amb 40 cartes se n'escullen 5.

(a) Calculeu la probabilitat que entre les 5 cartes escollides hi hagi almenys 2 asos.

(b) Es mira una d'aquestes cartes i resulta ser un as. Trobeu la probabilitat que en les 4 cartes restants hi hagi almenys un altre as.

(c) Calculeu la probabilitat que 3 cartes mostrin un mateix número n_1 i les dues cartes restants mostrin números n_2 i n_3, amb n_1, n_2 i n_3 distints.

Sigui N el nombre d'asos.

(a)

$$P(N \geq 2) = P(N=2) + P(N=3) + P(N=4) =$$
$$= \frac{\binom{4}{2}\binom{36}{3}}{\binom{40}{5}} + \frac{\binom{4}{3}\binom{36}{2}}{\binom{40}{5}} + \frac{\binom{4}{4}\binom{36}{1}}{\binom{40}{5}} = \frac{45396}{658008} \approx 0.069.$$

També

$$P(N \geq 2) = 1 - P(N=0) - P(N=1) = 1 - \frac{\binom{4}{0}\binom{36}{5}}{\binom{40}{5}} - \frac{\binom{4}{1}\binom{36}{4}}{\binom{40}{5}}.$$

(b) Es pot considerar que s'escullen 4 cartes d'una baralla de 39 cartes amb 3 asos i es vol calcular la probabilitat que hi hagi almenys 1 as. Així, si N' és el nombre d'asos:

$$P(N' \geq 1) = 1 - P(N'=0) = 1 - \frac{\binom{3}{0}\binom{36}{4}}{\binom{39}{4}} \approx 0.28.$$

Observeu que la qüestió plantejada a l'apartat (b) *no es resol* calculant $P(N \geq 2 | N \geq 1)$. Aquesta última és la probabilitat que hi hagi almenys 2 asos, en les 5 cartes escollides, sabent que entre elles hi ha almenys 1 as. En efecte,

$$P(N \geq 2 | N \geq 1) = \frac{P(N \geq 2 \text{ i } N \geq 1)}{P(N \geq 1)} = \frac{P(N \geq 2)}{P(N \geq 1)} =$$
$$= \frac{[\binom{4}{2}\binom{36}{3} + \binom{4}{3}\binom{36}{2} + \binom{4}{4}\binom{36}{1}]/\binom{40}{5}}{[\binom{4}{1}\binom{36}{3} + \binom{4}{2}\binom{36}{3} + \binom{4}{3}\binom{36}{2} + \binom{4}{4}\binom{36}{1}]/\binom{40}{5}} = \frac{45396}{281016} \approx 0.16,$$

valor diferent de l'anterior $P(N' \geq 1)$.

(c) Cada pal té 10 números. Així,

- les 3 cartes amb número n_1 repetit es poden escollir de $10.\binom{4}{3}$ formes (4 pals i 10 números);
- les 2 cartes restants amb números n_2 i n_3 diferents i diferents de n_1 es poden seleccionar de $4^2.\binom{9}{2}$ formes (9 números i 4 pals).

  Per tant,

$$P = \frac{10.\binom{4}{3}.4^2.\binom{9}{2}}{\binom{40}{5}} \approx 0.035$$

5. En un estant es disposen de forma aleatòria n volums $V_1, V_2, \ldots, V_n$. Calculeu la probabilitat que els volums $V_1, V_2, \ldots, V_p$, $p \leq n$,

(a) quedin ordenats correlativament (sense tenir en compte l'ordre cíclic);

(b) quedin ordenats correlativament (tenint en compte l'ordre cíclic);

(c) quedin ordenats (és a dir, V_1 abans que V_2, V_2 abans que V_3, etc).

Els n volums es poden disposar de $n!$ maneres distintes (nombre de casos possibles).

(a) El volum V_1 pot ocupar $n-(p-1)$ posicions. Els $n-p$ volums restants $V_{p+1}, V_{p+2}, \ldots, V_n$ poden ordenarse de $(n-p)!$ formes. Per tant, el nombre d'ordenacions en les quals $V_1, V_2, \ldots, V_n$ quedan ordenats correlativament és $(n-p+1)(n-p)!$ (nombre de casos favorables). Així,

$$P = \frac{(n-p+1)(n-p)!}{n!}.$$

(b) Si es considera l'ordre cíclic, V_1 pot ocupar qualsevol posició. Així,

$$P = \frac{n(n-p)!}{n!} = \frac{(n-p)!}{(n-1)!}.$$

(c) Els p volums es poden disposar (de manera que V_1 quedi abans que V_2, V_2 abans que V_3, etc) de $\binom{n}{p}$ formes (seleccionem p posicions). Per tant,

$$P = \frac{\binom{n}{p}(n-p)!}{n!} = \frac{\frac{n!}{(n-p)!p!}(n-p)!}{n!} = \frac{1}{p!}.$$

D'una altra manera: la col·locació dels $n-p$ volums $V_{p+1}, V_{p+2}, \ldots, V_n$ és indiferent i de les $p!$ ordenacions de $V_1, V_2, \ldots, V_p$ només una és la correcta.

6. Un cub format per 27 cubs unitaris blancs ($3 \times 3 \times 3$) es pinta exteriorment de negre de manera que les cares d'un mateix color resulten indistingibles. Calculeu la probabilitat que, al reordenar aleatòriament el cubs unitaris per formar el cub gran, totes les cares d'aquest siguin negres.

Podem distingir els cubs unitaris següents:

- 1 cub amb 0 cares de color negre (centre)
- 6 cubs amb 1 cara de color negre (cares)
- 12 cubs amb 2 cares de color negre (arestes)
- 8 cubs amb 3 cares de color negre (vertexs)

Podem suposar que el cub gran es torna a compondre col·locant en primer lloc el cub unitari central, en segon lloc els 6 cubs centrals de cada cara, a continuació els 12 cubs centrals de cada aresta i finalment els 8 cubs de cada vertex (per què?).

Per tant, la probabilitat de reordenar correctament el cub gran és:

$$P = \underbrace{\frac{1}{\binom{27}{1}}}_{1r} \cdot \underbrace{\frac{1}{\binom{26}{6}}(\frac{1}{6})^6}_{2n} \cdot \underbrace{\frac{1}{\binom{20}{12}}(\frac{1}{12})^{12}}_{3r} \cdot \underbrace{\frac{1}{\binom{8}{8}}(\frac{1}{8})^8}_{4t} \approx 1.83\ 10^{-37}$$

7. Es tenen tres bosses (A, B i C) contenint cadascuna d'ellas una bola blanca i una negra. S'extreu una bola de la bossa A i s'introdueix a la bossa B; després s'extreu una bola de la bossa B i s'introdueix a la bossa C. Finalment, s'extreu una bola de la bossa C. Calcular la probabilitat que aquesta última bola sigui blanca.

Sigui C_b l'esdeveniment "extreure una bola blanca de la bossa C". Sigui X_{ij} l'esdeveniment "i boles blanques i j boles negres en la bossa X" (X=C ó B, $i, j = 1, 2$).

Pel Teorema de la Probabilitat total:

$$P(C_b) = P(C_b|C_{21})P(C_{21}) + P(C_b|C_{12})P(C_{12})$$

on $P(C_b|C_{21}) = \frac{2}{3}$ i $P(C_b|C_{12}) = \frac{1}{3}$.

Però,

$$P(C_{21}) = P(C_{21}|B_{21})P(B_{21}) + P(C_{21}|B_{12})P(B_{12}) = \frac{2}{3}P(B_{21}) + \frac{1}{3}P(B_{12}),$$

(vegeu l'arbre de la figura) i, anàlogament,

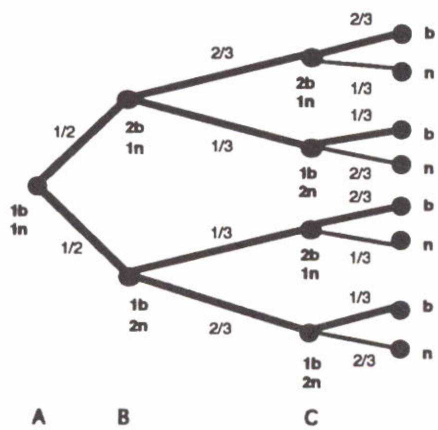
$$P(C_{12}) = \frac{1}{3}P(B_{21}) + \frac{2}{3}P(B_{12})$$

Finalment, $P(B_{21}) = \frac{1}{2}$ i $P(B_{12}) = \frac{1}{2}$

Resumint:

$$P(C_b) = \frac{2}{3}(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}) + \frac{1}{3}(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$$

Observeu que l'expressió anterior s'obté directament de l'arbre de la figura, recorrent les branques marcades.



8. A l'atzar, es tracen n punts en el pla cartesià. Calcular les probabilitats $p(n)$, $n = 2, 3, 4$, que hi hagi n punts en quadrants distints.

- $n = 2$. La probabilitat que els 2 punts estiguin en quadrants diferents és:

$$p(2) = \frac{V_4^2}{4^2} = \frac{4 \cdot 3}{16} = \frac{3}{4}$$

- $n = 3$. En aquest cas:

$$p(3) = \frac{V_4^3}{4^3} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{64} = \frac{3}{8}$$

- $n = 4$. Finalment:

$$p(4) = \frac{P_4}{4^4} = \frac{4!}{256} = \frac{3}{32}$$

9. Vint terminals T_1, T_2, ..., T_{20} treballen en temps compartit amb un ordinador. En un moment donat hi ha deu terminals actius. Quina és la probabilitat que estiguin actius els terminals T_1, T_2, T_{19} i T_{20}. (Suposem que cada terminal té la mateixa probabilitat de treballar amb l'ordinador.)

El sistema té 2^{20} estats equiprobables (cada terminal T_i pot o no estar actiu). L'espai mostral Ω consta de 2^{20} esdeveniments elementals amb probabilitat $\frac{1}{2^{20}}$ cada un d'ells. Designant per B_n l'esdeveniment "n terminals actius":

$$P(B_n) = \frac{\binom{20}{n}}{2^{20}}$$

Si A designa l'esdeveniment "T_1, T_2, T_{19} i T_{20} actius" es té:

$$P(A|B_{10}) = \frac{P(A \cap B_{10})}{P(B_{10})}$$

Però

$$P(A \cap B_{10}) = \frac{\binom{16}{6}}{2^{20}}$$

i, per tant,

$$P(A|B_{10}) = \frac{\binom{16}{6}}{\binom{20}{10}} \approx 0.043$$

Nota:

$$\Omega = \{\omega = (t_1, t_2, \ldots, t_{19}, t_{20});\ t_i = 1 \text{ ó } 0\}, \quad |\Omega| = 2^{20}$$

Els elements de $A \cap B_{10}$ són totes les seqüències ω formades per deu uns i deu zeros amb $t_1 = t_2 = t_{19} = t_{20} = 1$. Per tant, el nombre d'elements de $A \cap B_{10}$ és $\binom{16}{6}$.

10. L'esquema representa els carrers d'una ciutat on suposem que totes les cruïlles estan situades en punts de coordenades enteres. Sortint de $(0,0)$, una persona efectua un recorregut de manera que, en cada cruïlla (x,y), decideix anar a $(x+1,y)$ amb probabilitat p o a $(x,y+1)$ amb probabilitat $q=1-p$. Calculeu:

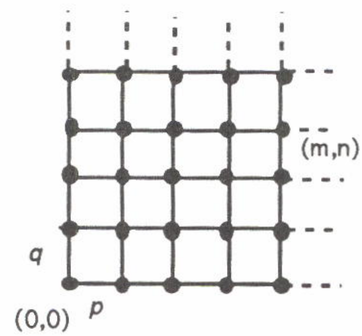
(a) La probabilitat que el camí seguit passi per un punt (m,n) donat.

(b) Els valors de p i q que fan màxima aquesta probabilitat. Quin valor té, en aquest cas, el quocient p/q?

(a) El trajecte seguit passa pel punt de coordenades (m,n) si, dels $m+n$ primers trams, m són horitzontals i n són verticals. Si A denota aquest esdeveniment ("recórrer m trams horitzontals i n verticals en qualsevol ordre") es té:

$$P(A) = \binom{m+n}{n} p^m q^n$$

ja que $\binom{m+n}{n}$ és el nombre de recorreguts des de $(0,0)$ a (m,n) i $p^m q^n$ és la probabilitat que en succeeixi un de determinat.



(b)
- Si $(m,n)=(0,0)$, llavors $P(A)=1$ per a tot $p \in [0,1]$.
- Si $(m,n)=(m,0)$ amb $m \neq 0$, llavors $P(A)=p^m$ i $P(A)=1$ només si $p=1$.
- Si $(m,n)=(0,n)$ amb $n \neq 0$, llavors $P(A)=q^n$ i $P(A)=1$ només si $q=1$.
- *Cas general:* $m \neq 0$ i $n \neq 0$.
  El valor p^* que maximitza la funció $f(p)=p^m(1-p)^n$ verifica:

$$f'(p^*) = m(p^*)^{m-1}(1-p^*)^n - (p^*)^m n(1-p^*)^{n-1} = 0$$

Per tant,

$$p^* = \frac{m}{m+n} \quad \text{i} \quad q^* = 1-p^* = \frac{n}{m+n},$$

i

$$\frac{p^*}{q^*} = \frac{m}{n}.$$

11. Una moneda amb $P(\text{cara}) = p$ i $P(\text{creu}) = q$, $p + q = 1$, es llança n vegades. Calculeu la probabilitat de que surtin, almenys, dues cares o dues creus seguides.

Un resultat ω de l'experiment aleatori és de la forma $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$ amb $\omega_i = c$ (cara) o $\omega_i = x$ (creu). Designant A l'esdeveniment "almenys dues cares o dues creus seguides":

- n parell:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - P\{(c, x, c, x, \ldots, c, x), (x, c, x, c, \ldots, x, c)\} = 1 - 2(pq)^{n/2}$$

- n imparell:

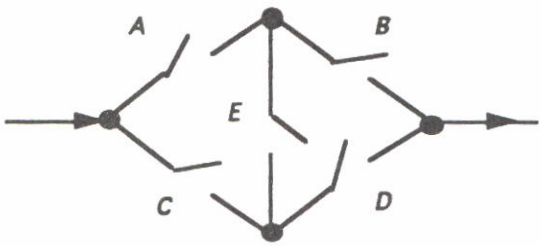
$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - P\{(c, x, c, \ldots, x, c), (x, c, x, \ldots, c, x)\} =$$

$$= 1 - p^{\frac{n+1}{2}} q^{\frac{n-1}{2}} - p^{\frac{n-1}{2}} q^{\frac{n+1}{2}} = 1 - (pq)^{\frac{n-1}{2}}(p + q) = 1 - (pq)^{\frac{n-1}{2}}.$$

12. A la xarxa de commutació de la figura, cada interruptor funciona independentment dels altres i està tancat amb probabilitat p.

(a) Trobeu la probabilitat que un senyal que entra sigui rebut a la sortida.

(b) Si el senyal es rep, quina és la probabilitat que E estigui obert?



Sigui S l'esdeveniment "rebre senyal a la sortida" i X l'esdeveniment "interruptor X tancat" $(X = A, B, C, D, E)$.

(a)

$$P(S) = P(S|E)P(E) + P(S|\overline{E})P(\overline{E}).$$

D'altra banda,

$$P(S|E) = P((A \cup C) \cap (B \cup D)) = P(A \cup C)P(B \cup D) \quad \text{(independència)}.$$

Però,

$$P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C) = P(A) + P(C) - P(A)P(C) = 2p - p^2$$

i, anàlogament, $P(B \cup D) = 2p - p^2$.
Per tant,

$$P(S|E) = (2p - p^2)^2 = 4p^2 - 4p^3 + p^4.$$

Si E és tancat,

$$P(S|\overline{E}) = P((A \cap B) \cup (C \cap D)) = 1 - P(\overline{(A \cap B) \cup (C \cap D)}) =$$
$$= 1 - P(\overline{(A \cap B)} \cap \overline{(C \cap D)}) = 1 - P(\overline{A \cap B})P(\overline{C \cap D}).$$

Però

$$P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - P(A)P(B) = 1 - p^2.$$

Anàlogament, $P(\overline{C \cap D}) = 1 - p^2$.
En conseqüència,

$$P(S|\overline{E}) = 1 - (1 - p^2)^2 = 2p^2 - p^4.$$

Així,

$$P(S) = (4p^2 - 4p^3 + p^4)p + (2p^2 - p^4)(1 - p) = 2p^2 + 2p^3 - 5p^4 + 2p^5.$$

(b)

$$P(\overline{E}|S) = \frac{P(\overline{E} \cap S)}{P(S)} == \frac{P(S|\overline{E})P(\overline{E})}{P(S)}.$$

Per tant,

$$P(\overline{E}|S) = \frac{2p^2 - 2p^3 - p^4 + p^5}{2p^2 + 2p^3 - 5p^4 + 2p^5}.$$

13. La fase final d'un càlcul llarg exigeix l'addició de tres enters a_1, a_2, a_3. Suposeu que: a) els càlculs de a_1, a_2,i a_3 són estocàsticament independents; b) en el càlcul de cada a_i, existeix una mateixa probabilitat p que sigui correcte i la probabilitat de cometre un error igual a $+1$ és la mateixa que la de cometre'l igual a -1; c) no pot cometre's error més gran que $+1$ o més petit que -1. Calculeu la probabilitat que la suma $a_1+a_2+a_3$ sigui correcta.

Sigui ϵ_i l'error comès en el càlcul de a_i, $i = 1, 2, 3$.

$$P(\epsilon_i = 0) = p, \quad P(\epsilon_i = +1) = P(\epsilon_i = -1) = \frac{1-p}{2}.$$

Sigui ϵ l'error comès en $a_1 + a_2 + a_3$. L'error ϵ és 0 si cada ϵ_i és 0, o un dels ϵ_i és 0 i els altres dos es compensen. Així:

$$P(\epsilon = 0) = P(\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = 0) + P(\epsilon_1 = 0, \epsilon_2 = 1, \epsilon_3 = -1) +$$

$$+P(\epsilon_1 = 0, \epsilon_2 = -1, \epsilon_3 = 1) + P(\epsilon_1 = 1, \epsilon_2 = 0, \epsilon_3 = -1) + P(\epsilon_1 = -1, \epsilon_2 = 0, \epsilon_3 = 1) +$$

$$+P(\epsilon_1 = 1, \epsilon_2 = -1, \epsilon_3 = 0) + P(\epsilon_1 = -1, \epsilon_2 = 1, \epsilon_3 = 0) = p^3 + 6p(\frac{1-p}{2})^2.$$

14. (a) Dos jugadors, A i B, jugen alternativament amb probabilitat de guanyar α i β respectivament en cada jugada. El joc s'interromp quan un dels dos aconsegueix la seva primera victòria. Suposant que A és el primer de jugar, establiu una relació entre α i β perquè el joc sigui equitatiu, és a dir que $P(\text{guanyi}A) = P(\text{guanyi}B)$. Si $\alpha = 1/2$, quin és el valor de β?

(b) Una moneda amb $P(\text{cara}) = p$ i P(creu)=q és llançada alternativament pels jugadors anteriors fins que A guanya (treu cara) o B guanya (treu creu). Calculeu p i q imposant les mateixes condicions que en l'apartat anterior.

(a)

$$P(\text{guanyi } A) = P(A \text{ guanya en la } 1a \text{ tirada o } A \text{ guanya en la } 3a \text{ tirada o}$$

$$A \text{ guanya en la } 5a \text{ tirada o } \ldots) = \sum_{k=0}^{\infty} P(A \text{ guanya en la tirada } 2k+1) =$$

$$= \alpha + (1-\alpha)(1-\beta)\alpha + (1-\alpha)^2(1-\beta)^2\alpha + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty}(1-\alpha)^k(a-\beta)^k\alpha =$$

$$= \frac{\alpha}{1-(1-\alpha)(1-\beta)}.$$

Anàlogament,

$$P(\text{guanyi } B) = \sum_{k=1}^{\infty} P(B \text{ guanya en la tirada } 2k) = \sum_{k=0}^{\infty}(1-\alpha)^k(1-\beta)^{k-1}\beta =$$

$$= \frac{(1-\alpha)\beta}{1-(1-\alpha)(1-\beta)}.$$

Per tant, el joc és equitatiu si:

$$\alpha = (1-\alpha)\beta.$$

Per exemple, si $\alpha = 1/2$, β ha de ser 1. En aquest cas el joc equival al de cara i creu. El jugador A llança una moneda "normal". Guanya si surt cara i perd si surt creu.

(b) D'acord amb l'apartat anterior, p i q han de satisfer:

$$p = (1-p)q,$$

i com que $p + q = 1$ es té $q^2 + q - 1 = 0$, d'on s'obté el valor

$$q = \frac{-1+\sqrt{5}}{2},$$

i, per tant,

$$p = \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

15. Trobeu la probabilitat que, en una reunió de n persones, almenys dues celebrin el seu aniversari el mateix dia de l'any.

Si p_n és la probabilitat que en una reunió de n persones totes elles compleixin anys en dies distints, es té:

$$p_n = \frac{365-(n-1)}{365} p_{n-1} = \frac{365-n+1}{365} \cdot \frac{365-n+2}{365} p_{n-2} =$$
$$= \ldots = \frac{(365-n+1)(365-n+2)\ldots 364}{365^{n-1}} p_1, \quad n \leq 365.$$

Però $p_1 = 1$ i, per tant,

$$p_n = \frac{(365-n+1)(365-n+2)\ldots 364 \cdot 365}{365^n} = \frac{V_{365}^n}{365^n}.$$

L'expressió de p_n tanbé s'obté aplicant la definició clàssica de probabilitat.

Així, la probabilitat p que, en una reunió de n persones, almenys dues d'elles celebrin el seu aniversari el mateix dia de l'any és:

$$p = 1 - p_n = 1 - \frac{V_{365}^n}{365^n}.$$

Per exemple, si $n = 20$ aquesta probabilitat és 0.41.

16. (a) Demostreu que, si els esdeveniments A i B són independents, llavors els esdeveniments

i. $\overline{A}$, $\overline{B}$ són independents.

ii. A, $\overline{B}$ són independents.

(b) Demostreu que, si els esdeveniments A_1, A_2 i A_3 són independents, llavors

i. A_1 és independent de $A_2 \cap A_3$.

ii. A_1 és independent de $A_2 \cup A_3$.

(a) Siguin A i B esdeveniments independents, és a dir $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

i.

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) =$$
$$= 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B) = (1 - P(A))(1 - P(B)) = P(\overline{A})P(\overline{B}).$$

ii. Com que $A = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B)$ i $(A \cap \overline{B}) \cap (A \cap B) = \emptyset$, es té:

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A)P(B) =$$
$$= P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(\overline{B}).$$

(b)

$$A_1, A_2 \text{ i } A_3 \text{ independents} \implies \begin{cases} P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2) \\ P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)P(A_3) \\ P(A_2 \cap A_3) = P(A_2)P(A_3) \\ P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) \end{cases}$$

Així,

i.

$$P(A_1 \cap (A_2 \cap A_3)) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) =$$
$$= P(A_1)P(A_2)P(A_3) = P(A_1)P(A_2 \cap A_3).$$

ii.

$$P(A_1 \cap (A_2 \cup A_3)) = P((A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3)) =$$
$$= P(A_1 \cap A_2) + P(A_1 \cap A_3) - P((A_1 \cap A_2) \cap (A_1 \cap A_3)) =$$
$$= P(A_1)P(A_2) + P(A_1)P(A_3) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) =$$
$$= P(A_1)P(A_2) + P(A_1)P(A_3) - P(A_1)P(A_2)P(A_3) =$$
$$= P(A_1)(P(A_2) + P(A_3) - P(A_2)P(A_3)) =$$
$$= P(A_1)(P(A_2) + P(A_3) - P(A_2 \cap A_3)) = P(A_1)P(A_2 \cup A_3).$$

17. Donats els esdeveniments A_1, A_2 i B amb $P(B) \neq 0$, demostreu:

(a) $P(A_1) = P(A_1|B)P(B) + P(A_1|\overline{B})P(\overline{B})$.

(b) $P(A_1 \cup B|B) = 1$; $P(A_1 \cap B|B) = P(A_1|B)$.

(c) $P(A_1 \cup A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B) - P(A_1 \cap A_2|B)$.

(a) $A_1 = (A_1 \cap B) \cup (A_1 \cap \overline{B})$ i $(A_1 \cap B) \cap (A_1 \cap \overline{B}) = \emptyset$. Així,

$$P(A_1) = P(A_1 \cap B) + P(A_1 \cap \overline{B}) = P(A_1|B)P(B) + P(A_1|\overline{B})P(\overline{B}).$$

(b) $B \subset A_1 \cup B$. Per tant,

$$P(A_1 \cup B|B) = \frac{P((A_1 \cup B) \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1.$$

També,

$$P(A_1 \cap B|B) = \frac{P((A_1 \cap B) \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} = P(A_1|B).$$

(c) Siguin $C_1 = A_1 \cap B$ i $C_2 = A_2 \cap B$. Per tant,

$$C_1 \cup C_2 = (A_1 \cup A_2) \cap B \text{ i } C_1 \cap C_2 = (A_1 \cap A_2) \cap B.$$

A més,

$$P(C_1 \cup C_2) = P(C_1) + P(C_2) - P(C_1 \cap C_2).$$

Dividint per $P(B)$:

$$P(A_1 \cup A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B) - P(A_1 \cap A_2|B).$$

18. Siguin A i B dos esdeveniments, $P(B) \neq 0$. Raoneu si les implicacions següents són certes o falses:

(a) $A \cap B = \emptyset \Longrightarrow A$ i B independents.

(b) $A \cap B = \emptyset \Longrightarrow P(A|B) \geq P(A)$.

(c) $A \subset B \Longrightarrow P(A|B) \geq P(A)$.

(d) $P(A|B) > P(A) \Longleftrightarrow P(B|A) > P(B)$.

(e) $\left.\begin{array}{l} A \text{ i } B \text{ independents} \\ P(A) \neq 0,\ P(A) \neq 1,\ P(B) \neq 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow A \cap B$ és distint de $\emptyset$, A i B.

(f) $P(A|B) + P(A|\overline{B}) = 1$.

(a) *Fals.* $A \cap B = \emptyset$ significa que els esdeveniments A i B són mutuament excloents, és a dir, si succeeix A no succeeix B i viceversa.

(b) *Fals.* Si $A \cap B = \emptyset$:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\emptyset)}{P(B)} = 0.$$

(c) *Cert.* Si $A \subset B$, llavors $A \cap B = A$ i:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} \geq P(A).$$

(d) *Cert.* Si $P(A|B) > P(A)$:

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)} > \frac{P(A)P(B)}{P(A)} = P(B), \qquad P(A) \neq 0.$$

Si $P(A) = 0$, $P(B|A)$ no és definit.
Recíprocament, si $P(B|A) > P(B)$ es té $P(A|B) > P(A)$.

(e) *Cert.* Si A i B són independents, $P(A) \neq 0, P(A) \neq 1$ i $P(B) \neq 1$, llavors $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ és distint de 0, de $P(A)$ i de $P(B)$. Per tant, $A \cap B$ és distint de $\emptyset$, de A i de B.

(f) *Fals.*

$$P(A|B) + P(A|\overline{B}) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} + \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})}.$$

L'expressió anterior no és, en general, igual a 1. Per exemple, si $P(B) = 1/2$:

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} + \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{P((A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}))}{\frac{1}{2}} = 2P(A).$$

19. Siguin A, B i C esdeveniments d'un espai de probabilitat tals que $0 < P(A), P(B), P(C) < 1$.

(a) Demostreu

$$P(A|B) = P(A|B \cap C)P(C|B) + P(A|B \cap \overline{C})P(\overline{C}|B)$$

(b) Demostreu que si $P(A|B) = P(A|\overline{B})$ llavors A i B són independents.

(c) Doneu un exemple en el qual l'espai mostral Ω consti de quatre esdeveniments elementals equiprobables, i, a més de la condició donada a l'apartat anterior, també es verifiqui $P(A|B) = P(B|A)$.

(a)

$$\begin{aligned} & P(A|B \cap C)P(C|B) + P(A|B \cap \overline{C})P(\overline{C}|B) = \\ & = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C)} \frac{P(C \cap B)}{P(B)} + \frac{P(A \cap B \cap \overline{C})}{P(B \cap \overline{C})} \frac{P(\overline{C} \cap B)}{P(B)} = \\ & = \frac{P(A \cap B \cap C) + P(A \cap B \cap \overline{C})}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A|B) \end{aligned}$$

(b) Fent servir la condició de l'enunciat:

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A|B)P(B) = P(A|\overline{B})(1 - P(\overline{B})) = \\ &= P(A|\overline{B}) - P(A|\overline{B})P(\overline{B}) = P(A|\overline{B}) - P(A \cap \overline{B}) \end{aligned}$$

Així,

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) = P(A|\overline{B}) = P(A|B),$$

i, per tant, A i B són independents, ja que

$$P(A)P(B) = P(A|B)P(B) = P(A \cap B)$$

(c) Si $\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$ i els quatre esdeveniments elementals són equiprobables, tant A com B han de tenir dos elements i la seva intersecció un. Efectivament, prenent per exemple $A = \{0, 1\}$ i $B = \{0, 2\}$, es satisfan les condicions.

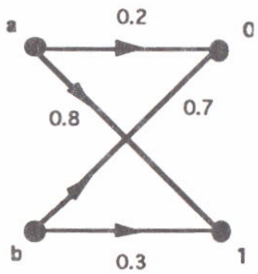
20. Un canal de comunicació fa servir dos símbols d'entrada $\{a, b\}$ i dos símbols de sortida $\{0, 1\}$. Se sap que $P(a) = 0.6$, $P(b) = 0.4$, $P(0|a) = 0.2$ i $P(0|b) = 0.7$. Un cop rebut un dels símbols 0 o 1 es decideix quin símbol s'ha transmès d'acord amb la regla següent:

$$\begin{array}{l} P(a|0) \geq P(b|0), \text{ decidir } a \\ P(a|0) < P(b|0), \text{ decidir } b \end{array}$$

(De forma anàloga si es rep 1)

Calculeu la probabilitat d'error $P(\epsilon)$.

$$P(a|0) = \frac{P(0|a)P(a)}{P(0|a)P(a) + P(0|b)P(b)} = 0.3$$



El denominador de l'expressió anterior és $P(0)$. Per tant,

$$P(b|0) = 1 - P(a|0) = 0.7$$

Així, si es rep el símbol 0 es decideix que s'ha enviat el símbol b.

D'altra banda,

$$P(a|1) = \frac{P(1|a)P(a)}{P(1|a)P(a) + P(1|b)P(b)} = 0.8$$

(El denominador és, ara, $P(1)$.)

$$P(b|1) = 1 - P(a|1) = 0.2$$

Per tant, quan es rep 1 es decideix que s'ha transmès a.

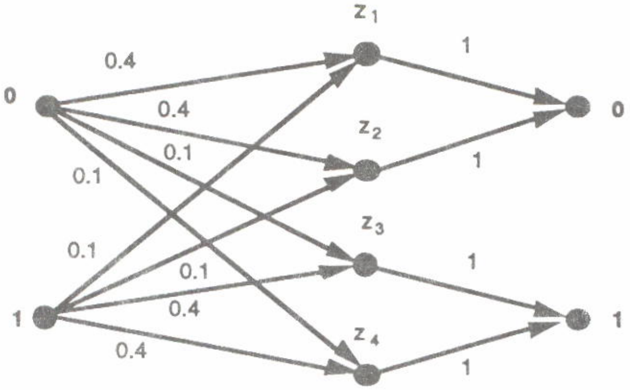
Així,

$$P(\epsilon) = P(\epsilon|a)P(a) + P(\epsilon|b)P(b) = P(0|a)P(a) + P(1|b)P(b) = 0.24$$

La probabilitat d'error també es pot obtenir condicionant pels símbols de sortida:

$$P(\epsilon) = P(\epsilon|0)P(0) + P(\epsilon|1)P(1) = P(a|0)P(0) + P(b|1)P(1) = 0.24$$

21. Donat l'esquema de la figura



i sabent que les probabilitats d'enviar 0 i 1 són iguals, calculeu la probabilitat de rebre 0 i la de rebre 1. Calculeu la probabilitat d'error.

Sigui R_i l'esdeveniment "rebre i", $i = 0, 1$. De l'esquema:

$$P(R_0) = P(z_1 \text{ ó } z_2) = P(z_1) + P(z_2);$$

(els esdeveniments "rebre z_1" i "rebre z_2" són mútuament excloents).

D'altra banda,

$$P(z_1) = P(z_1|0)P(0) + P(z_1|1)P(1) = (0.4)(0.5) + (0.1)(0.5) = 0.25$$

$$P(z_2) = P(z_2|0)P(0) + P(z_2|1)P(1) = (0.4)(0.5) + (0.1)(0.5) = 0.25$$

Així,

$$P(R_0) = 0.5$$

i, anàlogament,

$$P(R_1) = 0.5$$

La probabilitat d'error $P(\epsilon)$ és:

$$P(\epsilon) = P(\epsilon|0)P(0) + P(\epsilon|1)P(1).$$

Però,

$$P(\epsilon|0) = P(R_1|0) = P(z_3 \text{ ó } z_4|0) = P(z_3|0) + P(z_4|0),$$

ja que "rebre z_3" i "rebre z_4" són esdeveniments mútuament excloents.
Així,

$$P(\epsilon|0) = 0.1 + 0.1 = 0.2$$

Per la simetria de l'esquema:

$$P(\epsilon|1) = 0.2,$$

i, per tant,

$$P(\epsilon) = P(\epsilon|0) = 0.2$$

22. D'una caixa amb n boles blanques i m de negres se n'extreu una a l'atzar i, sense mirar-la, s'introdueix en una bossa que ja tenia exactament una bola blanca. També a l'atzar, es treu una bola de la bossa i resulta ser blanca. Trobeu la probabilitat que la bola extreta de la caixa fos blanca.

Sigui B_2 l'esdeveniment "treure de la bossa una bola blanca" i sigui B_1 l'esdeveniment "treure de la caixa una bola blanca".

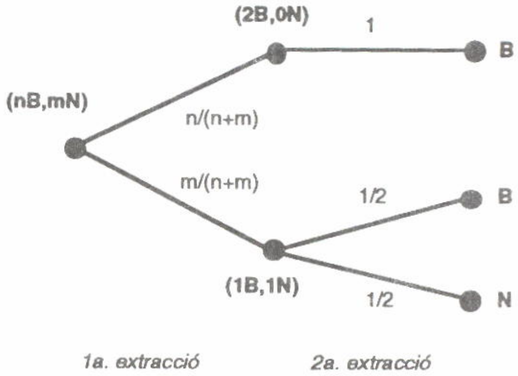
$$P(B_1|B_2) = \frac{P(B_1 \cap B_2)}{P(B_2)}.$$

De l'esquema:

$$P(B_1 \cap B_2) = \frac{n}{n+m},$$

i

$$P(B_2) = \frac{n}{n+m} + \frac{1}{2}\frac{m}{n+m}.$$



Així,

$$P(B_1|B_2) = \frac{\frac{n}{n+m}}{\frac{n}{n+m} + \frac{1}{2}\frac{m}{n+m}} = \frac{2n}{2n+m}.$$

Una altra forma de resoldre el problema és la següent:

Siguin $b_1, b_2, \ldots, b_n$ i $n_1, n_2, \ldots, n_m$ les $n+m$ boles de la caixa, i sigui b la bola blanca de la bossa. Un resultat de l'experiment aleatori es pot designar mitjançant un parell (α, β) on α designa la bola extreta de la caixa i β la bola extreta de la bossa.

Per tant, l'espai mostral és:

$$\begin{aligned}\Omega &= \{(b_1,b_1),(b_1,b),(b_2,b_2),(b_2,b),\ldots,(b_n,b_n),(b_n,b),\\ &\quad (n_1,n_1),(n_1,b),\ldots,(n_m,n_m),(n_m,b)\},\end{aligned}$$

L'esdeveniment $B_1 \cap B_2$ és:

$$B_1 \cap B_2 = \{(b_1,b_1),(b_1,b),(b_2,b_2),(b_2,b),\ldots,(b_n,b_n),(b_n,b)\}.$$

Anàlogament,

$$B_2 = \{(b_1,b_1),(b_1,b),(b_2,b_2),(b_2,b),\ldots,(b_n,b_n),(b_n,b),(n_1,b),\ldots,(n_m,b)\}.$$

Per tant,

$$P(B_1 \cap B_2) = \frac{|B_1 \cap B_2|}{|\Omega|} = \frac{2n}{2n+m},$$

$$P(B_2) = \frac{|B_2|}{|\Omega|} = \frac{2n+m}{2n+2m},$$

i

$$P(B_1|B_2) = \frac{2n}{2n+m}.$$

23. Una urna conté tres boles blanques i tres de negres. Es seleccionen a l'atzar dues boles i, sense mirar-les, s'introdueixen en una altra urna on ja hi ha una bola blanca. D'aquesta segona urna s'extreu una bola a l'atzar i resulta ser blanca. Quina és la probabilitat que en la primera elecció s'hagin tret dues boles blanques.

Sigui B l'esdeveniment "treure una bola blanca de la segona urna" i sigui B' l'esdeveniment "treure dues boles blanques en la primera elecció".

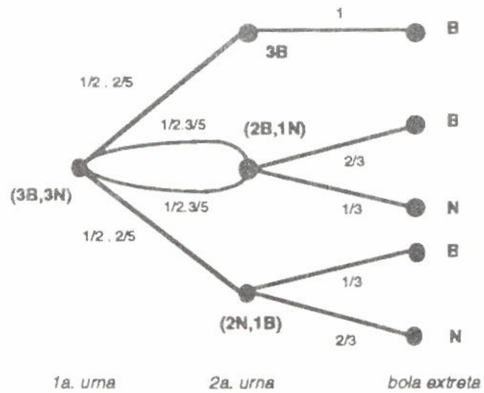
$$P(B'|B) = \frac{P(B' \cap B)}{P(B)}.$$

De l'esquema,

$$P(B' \cap B) = P(B|B')P(B') =$$

$$= 1.\frac{1}{5} = \frac{1}{5},$$

i



$$P(B) = 1.\frac{1}{5} + \frac{2}{3}(\frac{3}{10} + \frac{3}{10}) + \frac{1}{3}.\frac{1}{5} = \frac{2}{3}.$$

Per tant,

$$P(B'|B) = \frac{3}{10}.$$

Nota: Els càlculs anteriors corresponen a haver aplicat el Teorema de Bayes, ja que $P(B)$ s'ha calculat com

$P(B|2$ blanques en la 1a. elecció$)P(2$ blanques en la 1a. elecció$)$ +
$P(B|1$ blanca i 1 negra en la 1a. elecció$)P(1$ blanca i 1 negra en la 1a. elecció$)$ + $P(B|2$ negres en la 1a. elecció$)P(2$ negres en la 1a. elecció$)$.

24. Es tenen dues monedes, una normal i l'altra de dues cares. Se'n pren una, amb probabilitat 3/4 la normal i 1/4 la de dues cares. Es llança n vegades la moneda que s'ha pres i apareixen n cares. Trobeu la probabilitat que es prengués la moneda de dues cares. Que succeeix quan n és molt gran?

Sigui A la moneda normal:

$$P(\text{cara}) \equiv p_A = \frac{1}{2} \text{ i } P(\text{creu}) \equiv q_A = \frac{1}{2}.$$

D'altra banda, sigui B la moneda de dues cares:

$$P(\text{cara}) \equiv p_B = 1 \text{ i } P(\text{creu}) \equiv q_B = 0.$$

L'experiment aleatori consisteix a escollir una de les monedes (amb probabilitat 3/4 la A i amb probabilitat 1/4 la B) i llançar–la n vegades. Sigui X l'esdeveniment "escollir la moneda B" i sigui Y l'esdeveniment "apareixen n cares". S'ha de trobar $P(X|Y)$.

Aplicant el Teorema de Bayes:

$$P(X|Y) = \frac{P(Y|X)P(X)}{P(Y|X)P(X) + P(Y|\overline{X})P(\overline{X})} = \frac{1.\frac{1}{4}}{1.\frac{1}{4} + (\frac{1}{2})^n.\frac{3}{4}} = \frac{2^n}{2^n + 3}.$$

Observeu que $\lim_{n\to\infty} P(X|Y) = 1$.

Nota 1: Usant el llenguatge de la teoria de conjunts, l'espai mostral Ω consta dels $2^n + 1$ elements $\omega_A = (A; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, amb $\alpha_i = c$ (cara) ó $\alpha_i = x$ (creu), i l'element $\omega_B = (B; c, c, \ldots, c)$. L'assignació de probabilitats és la següent:

- Cada esdeveniment elemental ω_A té probabilitat $P(\omega_A) = \frac{3}{4}\frac{1}{2^n}$.
- L'esdeveniment elemental ω_B té probabilitat $P(\omega_B) = \frac{1}{4}$.

L'esdeveniment "escollir la moneda B" és $X = \{\omega_B\}$; i l'esdeveniment "apareixen n cares" és $Y = \{(A; c, c, \ldots, c), \omega_B\}$. Per tant, $P(X) = \frac{1}{4}$ i $P(Y) = \frac{3}{4}\frac{1}{2^n} + \frac{1}{4}$, d'on:

$$P(X|Y) = \frac{P(X \cap Y)}{P(Y)} = \frac{P(X)}{P(Y)} = \frac{2^n}{2^n + 3},$$

com abans.

Nota 2: Per a $n = 1$ el problema equival a tenir tres monedes normals i una de dues cares. N'escollim a l'atzar una de les quatre. Es llança i surt cara. La probabilitat buscada és:

$$p = \frac{\sharp \text{ casos favorables}}{\sharp \text{ casos possibles}} = \frac{2}{5}.$$

25. Tenim dues monedes: la moneda A normal, amb $P(\text{cara}) = P(\text{creu})$, i la moneda B amb $P(\text{cara}) = 3P(\text{creu})$. Per idendificar-les es pren cada una d'elles i es llança $4n$ vegades. El resultat és $2n$ cares i $2n$ creus per a una d'elles i $3n$ cares i n creus per a l'altra. A la vista d'aquest resultat es decideix, naturalment, que la moneda B és aquesta última. Calculeu la probabilitat d'equivocar-se. Què succeeix quan n és molt gran?

Per a la moneda A, $P(\text{cara}) = P(\text{creu}) = \frac{1}{2}$. Per a la moneda B, $P(\text{cara}) = \frac{3}{4}$ i $P(\text{creu}) = \frac{1}{4}$.

Sigui X l'esdeveniment "la 1a. moneda és B i la 2a. és A". Sigui Y l'esdeveniment "$2n$ cares i $2n$ creus per a la 1a i $3n$ cares i n creus per a la 2a.". Així $P(\text{error}) = P(X|Y)$.

Pel Teorema de Bayes:

$$P(\text{error}) = \frac{P(Y|X)P(X)}{P(Y|X)P(X) + P(Y|\overline{X})P(\overline{X})}.$$

Però

$$P(Y|X) = \binom{4n}{2n}(\frac{3}{4})^{2n}(\frac{1}{4})^{2n}\binom{4n}{3n}(\frac{1}{2})^{3n}(\frac{1}{2})^{n},$$

(idependència entre les monedes) i

$$P(Y|\overline{X}) = \binom{4n}{2n}(\frac{1}{2})^{2n}(\frac{1}{2})^{2n}\binom{4n}{3n}(\frac{3}{4})^{3n}(\frac{1}{2})^{n}.$$

També, $P(X) = P(\overline{X}) = \frac{1}{2}$.

Així,

$$P(\text{error}) = \frac{(\frac{3}{4})^{2n}(\frac{1}{4})^{2n}(\frac{1}{2})^{4n}}{(\frac{3}{4})^{2n}(\frac{1}{4})^{2n}(\frac{1}{2})^{4n} + (\frac{1}{2})^{4n}(\frac{3}{4})^{3n}(\frac{1}{4})^{n}} =$$

$$= \frac{(\frac{1}{4})^{n}}{(\frac{1}{4})^{n} + (\frac{3}{4})^{n}} = \frac{1}{1+3^{n}}.$$

Observeu que $\lim_{n\to\infty} P(\text{error}) = 0.$

26. Un jugador A llança repetidament dos daus fins que la suma de punts obtinguts en una tirada és 7, cas en què guanya, o fins que aquesta suma és 8, cas en què perd. Trobeu la probabilitat que A guanyi:

(a) expressant aquesta probabilitat com a suma d'una certa sèrie;

(b) mitjançant un raonament d'altre tipus que condueixi a un càlcul més senzill.

(a) Sigui N_i el nombre de punts obtinguts amb el dau i $(i = 1, 2)$ i sigui $N = N_1 + N_2$.

$$P(N_1 = m, N_2 = n) = P(N_1 = m)P(N_2 = n) = \frac{1}{36}.$$

Per tant,

$$P(7) \equiv P(N = 7) = \sum_{m+n=7} P(N_1 = m, N_2 = n) = \sum_{m+n=7} \frac{1}{36} = \frac{6}{36}.$$

Anàlogament,

$$P(8) \equiv P(N = 8) = \sum_{m+n=8} P(N_1 = m, N_2 = n) = \sum_{m+n=8} \frac{1}{36} = \frac{5}{36}.$$

Així,

$$P(\overline{7}, \overline{8}) \equiv P(N \neq 7 \text{ i } N \neq 8) = 1 - P(N = 7 \text{ ó } N = 8) = 1 - (P(7) + P(8)) = \frac{25}{36},$$

d'on,

$$P(A \text{ guanya}) = P(7) + P(\overline{7}, \overline{8})P(7) + (P(\overline{7}, \overline{8}))^2 P(7) + \ldots = P(7)\sum_{n=0}^{\infty}(P(\overline{7}, \overline{8}))^n =$$

$$= P(7)\frac{1}{1 - P(\overline{7}, \overline{8})} = \frac{6}{11}.$$

(Noteu que

$$P(A \text{ guanya}) = P(A \text{ guanya en la 1a. tirada o } A \text{ guanya en la 2a tirada o } \ldots)$$

(b) A guanya si treu 7 i perd si treu 8. Els altres resultats no cal considerar-los (no influeixen ja que si es dóna algun d'aquest casos es torna a tirar). Llavors,

$$P(A \text{ guanya}) = P(N = 7 | N = 7 \text{ ó } N = 8) = \frac{P(7)}{P(7) + P(8)} = \frac{6}{11}.$$

És a dir, d'11 casos (sobre 36) en què surt 7 o 8, 6 casos corresponen a $N = 7$.

27. Es tenen sis urnes amb dotze boles cadascuna (blanques i negres). Una urna té vuit boles blanques; dues, sis boles blanques, i tres, quatre boles blanques. A l'atzar, s'escull primer una urna i a continuació s'extreuen d'ella tres boles. D'aquestes, dues resulten ser blanques i una negra. Quina és la probabilitat que l'urna escollida contingués sis boles blanques i sis de negres?

---

tipus d'urna	nombre d'urnes	nombre de boles blanques	nombre de boles negres
A	1	8	4
B	2	6	6
C	3	4	8

Sigui X l'esdeveniment "escollir una urna del tipus X", $X = A, B, C$, i sigui Y l'esdeveniment "extreure dues boles blanques i una bola negre".

Aplicant el Teorema de Bayes:

$$P(B|Y) = \frac{P(Y|B)P(B)}{P(Y|A)P(A) + P(Y|B)P(B) + P(Y|C)P(C)} =$$

$$= \frac{\frac{\binom{6}{2}\binom{6}{1}}{\binom{12}{3}}\frac{2}{6}}{\frac{\binom{8}{2}\binom{4}{1}}{\binom{12}{3}}\frac{1}{6} + \frac{\binom{6}{2}\binom{6}{1}}{\binom{12}{3}}\frac{2}{6} + \frac{\binom{4}{2}\binom{8}{1}}{\binom{12}{3}}\frac{3}{6}} = \frac{45}{109}.$$

28. Una moneda amb $P(\text{cara}) = p$ es llança n vegades. Trobeu la probabilitat, p_n, que el nombre de cares obtingudes sigui parell.

(a) Directament.

(b) Mitjançant una fórmula recursiva que relacioni p_n amb p_{n-1}.

(a) Sigui X_n el nombre de cares obtingudes en els n llançaments de la moneda.

i. n parell:

$$P(X_n \text{ parell}) = P(X_n = 0 \text{ o } X_n = 2 \text{ o } \ldots \text{ o } X_n = n) =$$
$$= \binom{n}{0} q^n + \binom{n}{2} p^2 q^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n} p^n,$$

on $q = 1 - p$.
Però, pels desenvolupaments de $(q+p)^n$ i de $(q-p)^n$:

$$\binom{n}{0} q^n + \binom{n}{2} p^2 q^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n} p^n =$$
$$= \frac{(q+p)^n + (q-p)^n}{2} = \frac{1 + (1-2p)^n}{2}.$$

ii. n imparell:

$$P(X_n \text{ parell}) = P(X_n = 0 \text{ o } X_n = 2 \text{ o } \ldots \text{ o } X_n = n-1) =$$
$$= \binom{n}{0} q^n + \binom{n}{2} p^2 q^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n-1} p^{n-1} q =$$
$$= \frac{(q+p)^n + (q-p)^n}{2} = \frac{1 + (1-2p)^n}{2},$$

com en el cas anterior. Així, per a tot n, $p_n = \frac{1+(1-2p)^n}{2}$.

(b)

$$p_n = P(X_n \text{ parell}) = P(\text{cara}|X_{n-1} \text{ imparell}) P(X_{n-1} \text{ imparell}) +$$
$$+ P(\text{creu}|X_{n-1} \text{ parell}) P(X_{n-1} \text{ parell}).$$

Però,

$$P(\text{cara}|X_{n-1} \text{ imparell}) = P(\text{cara}) = p;$$
$$P(X_{n-1} \text{ imparell}) = 1 - P(X_{n-1} \text{ parell}) = 1 - p_{n-1};$$
$$P(\text{creu}|X_{n-1} \text{ parell}) = P(\text{creu}) = 1 - p;$$
$$P(X_{n-1} \text{ parell}) = p_{n-1}.$$

Així,

$$p_n = p(1 - p_{n-1}) + (1-p)p_{n-1} = p + (1-2p)p_{n-1}.$$

A més $p_0 = 1$. Per tant,

$$\begin{aligned}
p_n &= p + (1-2p)p_{n-1} = p + (1-2p)(p + (1-2p)p_{n-2}) = \\
&= p + (1-2p)p + (1-2p)^2 p_{n-2} = \ldots = \\
&= p(1 + (1-2p) + (1-2p)^2 + \ldots + (1-2p)^{n-1}) + (1-2p)^n p_0 = \\
&= p\frac{1-(1-2p)^n}{1-(1-2p)} + (1-2p)^n = \frac{1-(1-2p)^n}{2} + (1-2p)^n = \\
&= \frac{1+(1-2p)^n}{2} \qquad\qquad (p \neq 0).
\end{aligned}$$

(Si $p = 0$, el nombre de cares $X_n = 0$ per a tot n i, per tant, $p_n = 1$.)

29. Una persona estalvia per comprar un automòbil que val N pessetes. Disposa de k $(0 \leq k \leq N)$ pessetes i tracta d'aconseguir les que li falten mitjançant el joc següent amb el seu banquer. Es llança repetidament una moneda. Si surt cara, el banquer li paga una pesseta, però, si surt creu, ell paga al banquer una pesseta. El joc continua fins que la persona s'arruïna o guanya prou per comprar l'automòbil. Calculeu la probabilitat de que s'arruïni.

Sigui A_k l'esdeveniment "arruïnar-se disposant inicialment de k pessetes".

Sigui B l'esdeveniment "surt cara en la primera tirada". Així,

$$P(A_k) = P(A_k|B)P(B) + P(A_k|\overline{B})P(\overline{B}).$$

Però,

$$P(A_k|B) = P(A_{k+1}),$$
$$P(A_k|\overline{B}) = P(A_{k-1}.$$

Per tant, si $p_k \equiv P(A_k)$, es té la següent equació recurrent:

$$p_k = \frac{1}{2}(p_{k+1} + p_{k-1}), \quad 0 < k < N$$

amb les "condicions de contorn":

$$p_0 = 1 \text{ i } p_N = 0.$$

Per resoldre aquesta eqüació observem que:

$$p_{k+1} - p_k = p_k - p_{k-1}, \quad 0 < k < N,$$

d'on, si $d_k \equiv p_k - p_{k-1}$:

$$d_k = d_{k-1} = \ldots = d_1 = d,$$

i, per tant,

$$p_k = kd + p_0 = kd + 1, \quad 0 \leq k \leq N.$$

A més a més, com que $p_N = 1$, es té $d = -\frac{1}{N}$.

Per tant,

$$p_k = P(A_k) = 1 - \frac{k}{N}, \quad 0 \leq k \leq N.$$

30. Dos jugadors α i β juguen repetidament amb probabilitat de guanyar un punt p i $q = 1 - p$ respectivament, $0 < p < 1$. Calculeu la probabilitat que té cada jugador de guanyar el joc si:

(a) guanya el joc qui primer aconsegueix un avantatge de dos punts sobre l'adversari;

(b) guanya el joc qui primer aconsegueix guanyar dos punts consecutius.

(a) Designem per:

aa: α guanya els dos primers punts.
ab: α guanya el primer punt i β el segon.
ba: β guanya el primer punt i α el segon.
bb: β guanya els dos primers punts.
Així,

$$P(aa) = p^2, \quad P(ab) = P(ba) = pq, \quad P(bb) = q^2.$$

Si A és l'esdeveniment "α guanya el joc":

$$P(A) = P(A|aa)P(aa) + P(A|ab)P(ab) + P(A|ba)P(ba) + P(A|bb)P(bb).$$

Però,

$$P(A|aa) = 1, \quad P(A|bb) = 0.$$

A més a més,

$$P(A|ab) = P(A|ba) = P(A),$$

ja que, havent guanyat cadascun dels jugadors un punt, els jugadors estan empatats i és com si el joc tornés a començar. Per tant,

$$P(A) = p^2 + 2pqP(A),$$

d'on

$$P(A) = \frac{p^2}{1-2pq} = \frac{p^2}{p^2+q^2}.$$

La probabilitat $P(B)$ que β guanyi el joc és:

$$P(B) = 1 - P(A) = \frac{q^2}{p^2+q^2}.$$

Nota: Si $p = q = \frac{1}{2}$, $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$.

(b) Sigui

a: α guanya el primer punt.
b: β guanya el primer punt.

$$P(a) = p, \quad P(b) = q.$$

Els esdeveniments aa, ab, ba i bb es defineixen com en l'apartat anterior. Per tant,

$$P(A) = P(A|a)P(a) + P(A|b)P(b) = P(A|a)p + P(A|b)q. \qquad (1)$$

Però,

$$P(A|a) = P(A|aa, a)P(aa|a) + P(A|ab, a)P(ab|a),$$

on

$$P(A|aa, a) = P(A|aa) = 1, \; P(A|ab, a) = P(A|ab) = P(A|b),$$
$$P(aa|a) = p, \; P(ab|a) = q.$$

i, per tant,

$$P(A|a) = p + P(A|b)q. \qquad (2)$$

Anàlogament,

$$P(A|b) = P(A|ba, b)P(ba|b) + P(A|bb, b)P(bb|b),$$

on

$$P(A|ba, b) = P(A|ba) = P(A|a), \; P(A|bb, b) = P(A|bb) = 0,$$
$$P(ba|b) = p, \; P(bb|b) = q.$$

i, així,

$$P(A|b) = P(A|a)p. \qquad (3)$$

Resolent les equacions (2) i (3) s'obté:

$$P(A|a) = \frac{p}{1 - pq}, \quad P(A|b) = \frac{p^2}{1 - pq}.$$

Finalment, substituint en (1):

$$P(A) = p\frac{p}{1 - pq} + q\frac{p^2}{1 - pq} = \frac{p^2(1 + q)}{1 - pq}.$$

La probabilitat que guanyi el joc el jugador β és:

$$P(B) = 1 - P(A) = \frac{q^2(1+p)}{1-pq}.$$

Nota: Si $p = q = \frac{1}{2}$, $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$.
Nota: Una altra forma de resoldre aquest apartat del problema és la següent:
El casos en què guanya α, amb les seves respectives probabilitats, són:

$$\begin{array}{ll}
aa & p^2 \\
abaa & p^3 q \\
ababaa & p^4 q^2 \\
\dots & \dots \\
 & \\
baa & p^2 q \\
babaa & p^3 q^2 \\
bababaa & p^4 q^3 \\
\dots & \dots
\end{array}$$

Sigui A, a: "guanya α i el primer punt l'ha guanyat α", i sigui A, b: "guanya α i el primer punt l'ha guanyat β".

$$\begin{aligned}
P(A) &= F(A,a) + P(A,b) = \\
&= (p^2 + p^3 q + p^4 q^2 + \dots) + (p^2 q + p^3 q^2 + p^4 q^3 + \dots) = \\
&= p^2 \frac{1}{1-pq} + p^2 q \frac{1}{1-pq} = \frac{p^2(1+q)}{1-pq}.
\end{aligned}$$

Problemes proposats

31. S'escull a l'atzar una corda d'un cercle. Quina és la probabilitat que la seva longitud sigui més gran que la del radi?

32. Es llancen N daus, on N pren els valors $1, 2, 3, \ldots$ amb $P(N = i) = 2^{-i}$, i la suma dels punts obtinguts és S. Calculeu la probabilitat que:

(a) $N = 2$ condicionat a $S = 4$ i el primer dau treu 1.

(b) $S = 4$ condicionat a N és parell.

33. En una mà de bridge es reparteixen cinquanta–dues cartes (tretze cartes de cada un dels quatre colls) entre quatre jugadors. Sigui A l'esdeveniment que, en una mà donada, cada jugador rebi un as. Trobeu la probabilitat que A succeixi almenys una vegada en set mans.

34. L'entrada d'un teatre val 500 pessetes i, al començar a vendre les entrades, la taquillera no té canvi. La meitat dels $2n$ espectadors paguen amb una moneda de 500 pessetes, i l'altra meitat amb un bitllet de mil.

(a) Calculeu la probabilitat que a la taquillera no li falti mai canvi.

(b) Quina seria aquesta probabilitat si, al començar la venda d'entrades, la taquillera tingués $m \leq n$ monedes de 500 ptes.

35. Es llancen sis monedes de una pesseta i una de cinc pessetes. Sabent que almeny tres monedes surten cara, trobeu la probabilitat que la moneda de cinc pessetes surti creu.

36. A una urna hi ha set boles blanques i tres de negres. Tres jugadors extreuen per torn una bola cada un, miren el color de la bola i la tornen a l'urna. Guanya el joc el primer jugador que treu per primera vegada una bola negra. Trobeu la probabilitat $P(A)$ que guanyi el joc el jugador que comença a jugar,

(a) directament, sumant una certa sèrie;

(b) a partir d'una equació que relacioni $P(A)$ amb ella mateixa, justificant–ne l'obtenció.

37. Un jugador tira dos daus i observa la suma dels dos nombres que apareixen. Si aquesta suma és 7 o 11, el jugador guanya immediatament. Si la suma és 2, 3 o 12, el jugador perd immediatament. En altre cas, els dos daus es llancen (a la vegada) successivament fins que s'obtingui una suma igual a 7 o fins que s'obtingui altre cop la suma obtinguda en el primer llançament. Si la suma 7 s'obté abans que la del primer llançament, el jugador perd i, en cas contrari, guanya. Calculeu la probabilitat de que el jugador guanyi.

38. En un lot de deu articles, l són defectuosos. Per fer una inspecció se seleccionen a l'atzar tres articles. Si la probabilitat que exactament dos dels articles seleccionats siguin defectuosos és 0.3, trobeu l.

39. Hi ha k caixes, cada una de les quals conté n boles iguals numerades de 1 a n de manera que cada una té la mateixa probabilitat de ser escollida. S'escull una bola de cada caixa. Calculeu la probabilitat que el número més gran que s'ha extret sigui m.

40. Es tenen dues urnes U i V. L'urna U conté dues boles blanques i una bola negra. L'urna V conté una bola blanca i dues boles negres. S'extreuen a l'atzar dues boles de cada urna i s'introdueixen dins d'una bossa. Tot seguit i també a l'atzar s'extreuen dues boles d'aquesta bossa (sense reposició). Quina és la probabilitat que ambdues siguin negres?

41. Es tenen n urnes, cadascuna amb α boles blanques i β boles negres. Es fa passar una bola de la primera urna a la segona, després, una de la segona a la tercera, etc. Finalment, s'extreu una bola de l'última urna. Calculeu la probabilitat que aquesta bola sigui blanca.

42. A i B juguen llançant alternativament dos daus fins que la suma dels dos resultats mostrats pels daus val 7. Calcular la probabilitat que perdi qui comença el joc.

43. La sortida S d'un circuit lògic correspon a la funció booleana $S = A \cdot B + \overline{C}$ ($\cdot$ i $+$ denoten, respectivament, les funcions lògiques *and* i *or*. Les entrades A, B i C són independents i prenen els valors 0 i 1 amb igual probabilitat. Si a la sortida s'observa el valor lògic 1, calculeu la probabilitat que $A = 1$.

44. Considereu el mateix canal de comunicació que en el problema 20, però amb $P(a) = 0.8$ i $P(b) = 0.2$.

(a) Trobeu la probabilitat d'error quan la regla de decisió és:

$$\text{rebut } i \ (i = 0, 1) \quad \begin{cases} \text{si } P(i|a) \geq P(i|b) & \text{es decideix } a \\ \text{si } P(i|a) < P(i|b) & \text{es decideix } b \end{cases}$$

(receptor ML o de *màxima versemblança*).

(b) Trobeu la probabilitat d'error quan la regla de decisió és la mateixa que en el problema 20, és a dir:

$$\text{rebut } i \ (i = 0, 1) \quad \begin{cases} \text{si } P(a|i) \geq P(b|i) & \text{es decideix } a \\ \text{si } P(a|i) < P(b|i) & \text{es decideix } b \end{cases}$$

(receptor MPP o de *màxima probabilitat a posteriori*).

Quina regla de decisió és la millor?

45. Una moneda amb $P(\text{cara}) = p$ i $P(\text{creu}) = q$ es llança reiteradament. Trobeu la probabilitat que surtin r (≥ 1) cares seguides abans que surtin s (≥ 1) creus seguides.

46. Dos jugadors, A i B, llancen alternativament dos daus. A guanya si treu, entre els dos daus, 10 punts abans que B n'obtingui 8. En cas contrari guanya B. Suposant que comença a tirar A, calculeu la probabilitat $P(A)$ que guanyi A,

(a) directament sumant una certa sèrie;

(b) relacionant el valor de $P(A)$ amb ell mateix mitjançant el teorema de la probabilitat total.

47. Es tenen dos jocs de n cartes. Un d'ells s'estén i l'altre, després de barrejar les cartes, s'estén damunt del primer. Calculeu la probabilitat p_n que no hi hagi cap coincidència.

48. Quatre ciutats estan situades en els vèrtexs d'un quadrat. Un transportista realitza viatges entre elles. Des de cada ciutat viatja a la següent (sentit horari) amb probabilitat p i a la anterior (sentit antihorari) amb probabilitat $q = 1 - p$. Trobeu la probabilitat que el primer retorn a la ciutat de sortida es faci per la ciutat oposada a la primera que es va visitar (després de la de sortida).

Respostes

31. Problema mal definit que pot tenir infinites solucions (vegeu el problema anàlog en l'exemple 1-1 del llibre de A. Papoulis).

32. (a) $\dfrac{144}{169} \approx 0.85$

(b) $\dfrac{433}{6912} \approx 0.06$

33. 0.5418

34. (a) $\frac{1}{n+1}$

(b) $\begin{cases} 1 - \frac{(n!)^2}{(n-m+1)!(n-m-1)!} = 1 - \frac{V_n^{m+1}}{V_{n+m+1}^{m+1}}, & m < n \\ 0, & \text{m=n} \end{cases}$

35. $\dfrac{42}{99}$ (< 0.5)

36. $P(A) = \dfrac{300}{657} = 0.457$

37. $\dfrac{244}{495} = 0.493$

38. $l = 4$ ó $l = 9$.

39. $\dfrac{m^k - (m-1)^k}{n^k}$.

40. $\dfrac{11}{54}$.

41. $\dfrac{\alpha}{\alpha + \beta}$.

42. $\dfrac{5}{11}$.

43. 0.6

44. (a) $P(\epsilon) = 0.22$

(b) $P(\epsilon) = 0.2$. En aquest cas el receptor sempre decideix que s'ha enviat el símbol a.

El receptor MPP és òptim.

45. $\dfrac{p^{r-1}(1-q^s)}{p^{r-1} + q^{s-1} - p^{r-1}q^{s-1}}$.

46. $\dfrac{108}{273} = 0.396$.

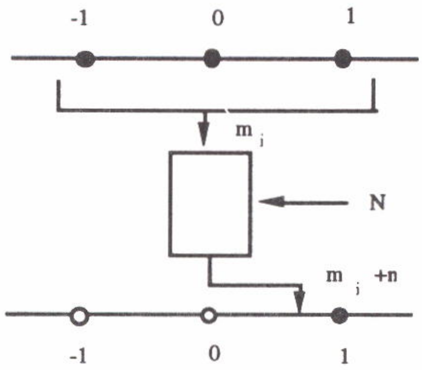
47. $p_n = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}$

Curiosament, $\lim_{n\to\infty} p_n = e^{-1}$.

48. $\frac{p^4 + q^4}{1 - 2pq}$.

Capítol 2. Variables aleatòries unidimensionals

1. Un transmissor envia els missatges $m_{-1} = -1$, $m_0 = 0$, $m_1 = 1$ amb la mateixa probabilitat. A causa del soroll, al transmetre m_i es reb $x = m_i + n$, on n és el valor d'una v.a. N gausiana normalitzada ($N(0,1)$). El receptor decideix que s'ha enviat el missatge més proper a x, és a dir, $\min\{| x - m_i |, i = -1, 0, 1\}$. Calculeu la probabilitat d'error en termes de la funció erf.



Exemple: Si es rep 0.8 es decideix que s'ha enviat m_1.

Diem E={ hi ha hagut error en la interpretació del missatge }. Observem que és fàcil calcular

$$P(E \mid m_{-1}) = P(N \geq \frac{1}{2}) = 1 - F_N(\frac{1}{2}) = 1 - (\frac{1}{2} + erf(\frac{1}{2})) = \frac{1}{2} - erf(\frac{1}{2})$$

Similarment,

$$P(E \mid m_1) = P(N \leq -\frac{1}{2}) = F_N(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} + erf(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} - erf(\frac{1}{2})$$

$$P(E \mid m_0) = P(\mid N \mid \geq \frac{1}{2}) = P(N \geq \frac{1}{2}) + P(N \leq -\frac{1}{2}) = 1 - 2erf(\frac{1}{2})$$

Per a calcular la probabilitat d'error amb aquesta informació podem fer servir la Fórmula de la Probabilitat total.

$$\begin{aligned} P(E) &= P(E \mid m_{-1})P(m_{-1}) + P(E \mid m_0)P(m_0) + P(E \mid m_1)P(m_1) = \\ &= \frac{1}{3}(2 - 4erf(\frac{1}{2})) \simeq 0,4114. \end{aligned}$$

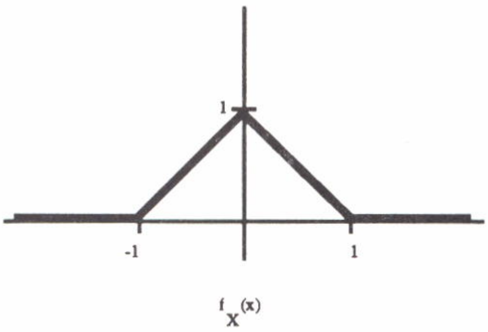
2. La v.a. X té per funció densitat

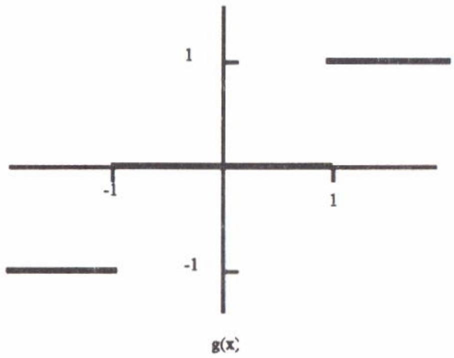
$$f_X(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \in (-1,0] \\ -x+1 & \text{si } x \in (0,1] \\ 0 & \text{si } x \in (-\infty,-1] \cap (1,\infty) \end{cases}$$

Es defineix la v.a. $Y = g(X)$, on g és la funció

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in (1/2,\infty) \\ 0 & \text{si } x \in (-1/2,1/2] \\ -1 & \text{si } x \in (-\infty,-1/2] \end{cases}$$

Trobeu la funció de probabilitat i de distribució de Y.





La v.a. Y és discreta i prèn els valors $\{-1,0,1\}$ amb probabilitats

$$P(Y=-1) = P(X < -1/2) = \int_{-\infty}^{-1/2} f_X(x)dx = \int_{-1}^{-1/2} (x+1)dx = 1/8$$

De manera similar,

$$P(Y=1) = P(X > 1/2) = \int_{1/2}^{1} (-x+1)dx = 1/8$$

Finalment,

$$P(Y=0) = 1 - (P(Y=-1) + P(Y=1)) = 3/4.$$

La funció de distribució de Y és

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \in (-\infty,-1) \\ 1/8 & \text{si } y \in [-1,0) \\ 7/8 & \text{si } y \in [0,1) \\ 1 & \text{si } y \in [1,\infty) \end{cases}$$

3. Sigui X una variable aleatòria contínua amb distribució uniforme a l'interval $(0,1)$. Trobeu les funcions de densitat de probabilitat de les variables aleatòries $Y = g(X)$ i $Z = h(X)$ on $g(x) = 8x^3$ i $h(x) = (x-1/2)^2$.

La funció $y = g(x) = 8x^3$ és bijectiva i la seva inversa és $x = g^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}/2$, de manera que

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y))|(g^{-1})'(y)| = \begin{cases} \frac{1}{6\sqrt[3]{y^2}} & \text{si } y \in (0,8) \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}.$$

Per a cada valor positiu de z la equació $z = (x-\frac{1}{2})^2$ té les dues solucions $x_1 = \frac{1}{2}+\sqrt{z} = h_1^{-1}(z)$ i $x_2 = \frac{1}{2} - \sqrt{z} = h_2^{-1}(z)$, de manera que

$$f_Z(z) = f_X(h_1^{-1}(z))|(h_1^{-1})'(z)| + f_X(h_2^{-1}(z))|(h_2^{-1})'(z)| = \begin{cases} 2\frac{1}{2\sqrt{z}} & \text{si } z \in (0,1/4) \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}.$$

4. Trobeu una funció estrictament creixent que transformi una variable aleatòria uniforme a $(0,1)$ en una variable aleatòria exponencial de paràmetre λ.

Sigui X la variable aleatòria que té distribució uniforme a $(0,1)$ i g la funció que es busca tal que $Y = g(X)$ tingui una distribució exponencial de paràmetre λ. Com que g ha de ser bijectiva, si $h = g^{-1}$,

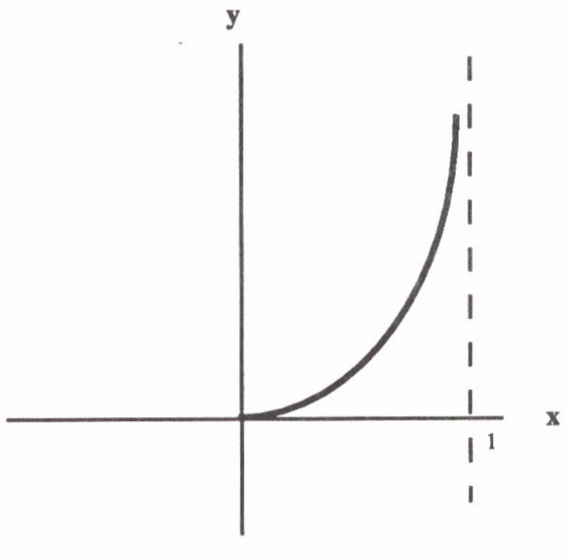
$$f_Y(y) = f_X(h(y))|h'(y)| = \begin{cases} |h'(y)| & \text{si } h(y) \in (0,1) \\ 0 & \text{altrament} \end{cases} = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda y} & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

Com que g ha de ser estrictament creixent, tenim $|h'(y)| = h'(y) = \lambda e^{-\lambda y}$, $y > 0$, o sigui

$$h(y) = k - e^{-\lambda y}$$

on k és una constant d'integració. D'altra banda, g ha de transformar l'interval $(0,1)$ en $(0,\infty)$, de manera s'ha de satisfer $h(0) = 0$ i $\lim_{y\to\infty} h(y) = 1$. Ambdues condicions es satisfan amb $k = 1$ de manera que la funció buscada és

$$g(x) = h^{-1}(x) = -\frac{\ln(1-x)}{\lambda}\ , x \in (0,1).$$



La funció $g(x)$.

5. A una bossa hi ha dues monedes de 100 pessetes, quatre de 50 i quatre de 25.

(a) Treiem tres monedes a l'atzar. Quina és la probabilitat de treure 150 pessetes?

(b) Repetim l'experiment anterior quatre vegades (retornant cada vegada les monedes a la bossa). Quina és la probabilitat d'haver tret 150 pessetes tres vegades?

(a) Hi ha deu monedes, de manera que cada extracció de tres monedes té probabilitat $\frac{1}{\binom{10}{3}}$. Per obtenir 150 pessetes cal treure o bé tres monedes de 50 ($\binom{4}{3}$ possibilitats), o bé una de 100 i dues de 25 ($\binom{2}{1}\binom{4}{2}$ possibilitats). Així doncs,

$$P(\text{treure 150 pessetes}) = \frac{\binom{4}{3} + \binom{2}{1}\binom{4}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{2}{15}.$$

(b) Si X conta el nombre de vegades que s'obtenen 150 pessetes en quatre extraccions, X segueix una llei $Bin(4, 2/15)$. La probabilitat de treure 150 pessetes tres vegades és

$$P(X = 3) = \binom{4}{3}\left(\frac{2}{15}\right)^3 \frac{13}{15} = \frac{416}{15^4}.$$

6. Trobeu l'esperança i la variància de les variables aleatòries

a) $X \sim Bernouilli(p)$

b) $Y \sim Bin(n, p)$

c) $Z \sim Poisson(\lambda)$

d) $T \sim Geom(p)$.

(a) Tenim $P(X = 1) = p$ i $P(X = 0) = 1 - P(X = 1) = 1 - p = q$, d'on

$$\begin{aligned} E(X) &= 0P(X=0) + 1P(X=1) = p. \\ E(X^2) &= 0^2P(X=0) + 1^2P(X=1) = p. \\ Var(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq. \end{aligned}$$

(b) Ara

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}\, 0 \leq k \leq n,$$

de manera que

$$E(Y) = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Per tal d'obtenir una expressió senzilla d'aquest sumatori es pot fer el següent. De

$$(a+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k a^{n-k}$$

obtenim, derivant respecte de x,

$$n(a+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} x^{k-1} a^{n-k} \qquad (1).$$

Posant $x = p$ i $a = q$ a aquesta darrera expressió i multiplicant per p obtenim

$$E(Y) = np(q+p)^{n-1} = np.$$

D'altra banda,

$$E(Y^2) = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

Multiplicant l'expressió (1) per x i derivant una altra vegada obtenim

$$n(a+x)^{n-2}((n-1)x + (a+x)) = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} x^{k-1} a^{n-k} \qquad (2).$$

Multiplicant aquesta expressió per x i posant $a = q$ i $x = p$ tenim

$$E(Y^2) = np((n-1)p+1) = (np)^2 + npq$$

de manera que,

$$Var(Y) = E(Y^2) - E^2(Y) = npq.$$

Observació: Hi ha una manera força més simple d'obtenir aquest resultat interpretant una variable aleatòria binomial com a suma de variables de Bernouilli. Aquesta interpretació es veurà més endavant.

(c) Per a una variable aleatòria de Poisson tenim

$$P(Z = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, k = 0, 1, 2\ldots,$$

de manera que

$$E(Z) = \sum_{k\geq 0} ke^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\lambda\sum_{k\geq 1}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda.$$

D'altra banda,

$$\begin{aligned} E(Z^2) &= \sum_{k\geq 0} k^2 e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\lambda\sum_{k\geq 0} k\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \\ &= e^{-\lambda}\lambda\left[\sum_{k\geq 1}(k-1)\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} + \sum_{k\geq 1}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\right] = \\ &= e^{-\lambda}\lambda\left[\lambda\sum_{k\geq 2}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + e^{\lambda}\right] = \lambda(\lambda+1). \end{aligned}$$

d'on

$$Var(Z) = E(Z^2) - E^2(Z) = \lambda.$$

(d) Finalment, per a una variable aleatòria geomètrica,

$$P(T = k) = pq^{k-1},\ k = 1, 2, 3, \ldots,\ q = 1-p,$$

i aleshores

$$E(T) = \sum_{k\geq 1} kpq^{k-1} = p\sum_{k\geq 1} kq^{k-1}.$$

Aquest sumatori es pot posar de forma senzilla fent el següent. De

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k\geq 0} x^k$$

derivant respecte de x,

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k\geq 1} kx^{k-1}$$

d'on, posant $x = q = 1 - p$,

$$E(X) = p\frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}.$$

D'altra banda,

$$E(X^2) = \sum_{k\geq 1} k^2pq^{k-1} = p\left[\sum_{k\geq 1}(k+1)kq^{k-1} - \sum_{k\geq 1} kq^{k-1}\right].$$

El primer d'aquests dos sumatoris es pot calcular a partir de

$$\frac{x}{1-x} = \sum_{k\geq 0} x^{k+1}$$

derivant dues vegades respecte de x i posant $x = q$,

$$\frac{2}{p^3} = \sum_{k\geq 0}(k+1)kq^{k-1}$$

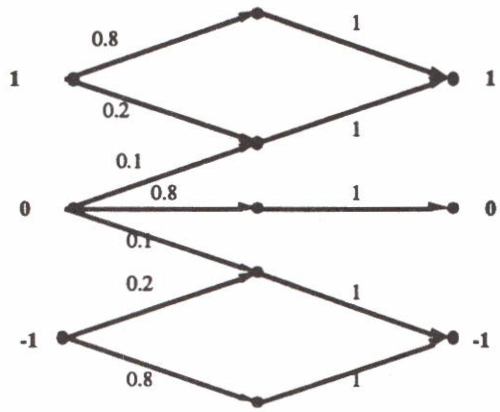
mentre que el segon dels sumatoris ja s'ha calculat abans, d'on

$$E(X^2) = p\left[\frac{2}{p^3} - \frac{1}{p}\right].$$

D'aquí,

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X) = (\frac{2}{p^2} - \frac{1}{p}) - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}.$$

7. Un sistema de transmissió emet els dígits $-1, 0$ i 1. Quan es transmet el símbol i, es rep el símbol j d'acord amb les probabilitats expressades en el diagrama següent



i es diu que s'ha produït una distorsió $(i-j)^2$. Quin és el valor mitjà de la distorsió?

De l'esquema deduïm que $i-j$ pren els valors $-1, 0$ i 1 amb probabilitats

$$\begin{aligned} P(i-j=1) &= \sum_{k=-1}^{1} P(i-j=1|i=k)P(i=k) = P(i-j=1|i=0)P(i=0) = \\ &= P(j=-1|i=0)P(i=0) = \frac{1}{10}\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

De manera similar,

$$P(i-j=-1) = \frac{1}{30}$$

i aleshores,

$$P(i-j=0) = 1-(P(i-j=-1)+P(i-j=1)) = \frac{28}{30}$$

Així doncs,

$$E[(i-j)^2] = \sum_{k=-1}^{1} k^2 P(i-j=k) = \frac{1}{15}.$$

8. Sigui X la variable aleatòria que conta el nombre de vegades que cal tirar un dau perquè surti el 5 o el 6. Quina és la funció de probabilitat de X? Fent servir la desigualtat de Txebyshev, determineu el nombre de tirades pel qual s'obté un 5 o un 6 amb probabilitat (a) 0,95 i (b) 0,99.

És clar que X segueix una llei geomètrica de paràmetre $p = P(\text{surt un 5 o un 6}) = 1/3$ (suposem que totes les cares tenen probabilitat 1/6 de aparèixer). Així doncs,

$$P(X = k) = (\frac{2}{3})^{k-1}\frac{1}{3}.$$

D'acord amb el problema 5 d'aquest capítol, el valor mitjà de X és $E(X) = \frac{1}{p} = 3$

Per resoldre la segona questió observem que $P(\text{surti un 5 o un 6 en } k \text{ tirades}) > c$ és equivalent al fet que $P(X > k) < 1 - c$. D'acord amb la desigualtat de Txebishev,

$$P(|X - 3| > a) \leq \frac{Var(X)}{a^2}$$

on, segons el problema 5, $Var(X) = q/p^2 = 6$. Així doncs, per a $6/a^2 \leq 1 - c$, és a dir, per a $a \geq (6/1 - c)^{1/2}$, tenim $P(X - 3| > a) \leq 1 - c$.

Per a $c = 0.95$, tenim $a \geq 11$ i $P(|X - 3| > 11) = P(X > 14) \leq 0,05$, de manera que en 14 tirades la probabilitat de treure un 5 o un 6 és més gran o igual que $0,95$. De forma similar, en 28 tirades la probabilitat de treure un 5 o un 6 és més gran o igual que $0,99$.

9. Tenim dues bosses amb deu monedes cada una. A la primera hi ha dues monedes falses i a la segona quatre.

a) S'escullen tres monedes a l'atzar de la primera bossa. Quina és l'esperança i la variància de la variable aleatòria X que conta el nombre de monedes falses que surten?

b) S'escull una de les bosses a l'atzar i se'n treu una moneda. Després es treuen dues monedes de l'altra bossa. Quina és la probabilitat d'haver tret almenys una moneda autèntica?

c) S'escull una bossa a l'atzar, es treuen tres monedes a l'atzar i resulten no ser falses. Quina és la probabilitat que procedeixin de la primera bossa?

(a) Tots els grups de tres monedes tenen la mateixa probabilitat $\frac{1}{\binom{10}{3}}$ de ser extretes. Hi ha $\binom{8}{3}$ possibilitats de treure tres monedes autèntiques, de manera que

$$P(X=0) = \frac{\binom{8}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{7}{15}$$

De manera semblant,

$$P(X=1) = \frac{\binom{8}{2}\binom{2}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{7}{15}\, P(X=2) = \frac{\binom{8}{1}\binom{2}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{15}.$$

D'aquí,

$$\begin{aligned} E(X) &= 1(7/15) + 2(1/15) = 3/5 \\ E(X^2) &= 1^2(7/15) + 2^2(1/15) = 11/15 \\ Var(X) &= E(X^2) - E^2(X) = 28/75 \end{aligned}$$

(b) Si

$$A = \{\text{ha sortit almenys una moneda autèntica}\}$$

i

$$B_i = \{\text{la primera moneda s'extreu de la bossa } i\},$$

aleshores

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2)$$

on

$$P(B_1) = P(B_2) = 1/2$$

i

$$P(A|B_1) = 1 - P(A^c|B_1) = 1 - \frac{\binom{2}{1}\binom{4}{2}}{\binom{10}{1}\binom{10}{2}} = \frac{219}{225}$$

$$P(A|B_2) = 1 - P(A^c|B_2) = 1 - \frac{\binom{2}{2}\binom{4}{1}}{\binom{10}{2}\binom{10}{1}} = \frac{223}{225}$$

de manera que la probabilitat buscada és

$$P(A) = 221/225 \simeq 0.982$$

(c) Sigui B_i = {s'ha escollit la bossa i} i C = { les tres monedes són autèntiques}. D'acord amb la fórmula de Bayes,

$$P(B_1|C) = \frac{P(C|B_1)P(B_1)}{P(C|B_1)P(B_1) + P(C|B_2)P(B_2)}$$

on

$$P(B_1) = P(B_2) = 1/2\,,\ P(C|B_1) = \frac{\binom{8}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{7}{15} \text{ i } P(C|B_2) = \frac{\binom{6}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{6}$$

d'on

$$P(B_1|C) = \frac{14}{19}.$$

10. Sigui X una variable aleatòria de Poisson amb valor mitjà λ i $Y = g(X)$, on

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & x \text{ és un enter parell} \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

Quina és la funció de probabilitat de Y i la seva esperança?

La variable aleatòria Y pren només valors enters o nuls. Per a k enter,

$$P(Y = k) = P(X = 2k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^{2k}}{(2k)!}$$

mentre que

$$P(Y = 0) = P(X = 0 \cup \left(\bigcup_{k>0} X = 2k - 1\right)) =$$

$$= e^{-\lambda} + \sum_{k>0} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{2k-1}}{(2k-1)!} = e^{-\lambda}(1 + \sinh\lambda),$$

de manera que

$$E(Y) = \sum_{k=0}^{\infty} kP(Y = k) = \sum_{k=1}^{\infty} ke^{-\lambda}\frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} = \frac{\lambda e^{-\lambda}}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{2k-1}}{(2k-1)!} = \frac{\lambda e^{-\lambda}}{2}\sinh\lambda.$$

11. Es tiren deu daus equilibrats. Quin és el nombre mitjà de cares que apareixen?

Sigui N la variable aleatòria que conta el nombre de cares diferents que apareixen als deu daus i X_i, $1 \leq i \leq 6$ una variable aleatòria que val 1 si al tirar els deu daus surt almenys una cara i i val 0 en cas contrari (X_i és la variable aleatòria *indicadora* del succés *ha sortit la cara i*). Està clar que $N = X_1 + X_2 + \ldots + X_6$ i que cada una de les X_i és una variable aleatòria de Bernouilli amb probabilitat d'éxit

$$p = P(X_i = 1) = 1 - P(X_i = 0) = 1 - (5/6)^{10}$$

de manera que N té per esperança

$$E(N) = E(X_1) + E(X_2) + \ldots + E(X_n) = 6p = 6\left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{1} 0\right) \simeq 5.03.$$

12. Cent boles es distribueixen aleatòriament en noranta caixes. Quin és el nombre mitjà de caixes buides?

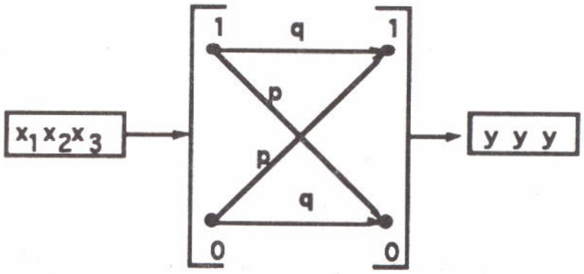
Sigui X_i la variable aleatòria indicadora del succés $A_i = \{$la caixa i està buida $\}$, és a dir, $\{X_i = 1\} = A_i$ i $\{X_i = 0\} = A_i^c$. Sigui X la variable aleatòria que conta el nombre de caixes buides. Aleshores,

$$X = X_1 + X_2 + \dots X_{90}$$

on cada X_i és una variable aleatòria de Bernouilli de paràmetre $p = P(X_i = 1) = (89/90)^{100}$. Així, raonant com en el problema anterior:

$$E(X) = 90\left(\frac{89}{90}\right)^{100} \simeq 29.4$$

13. Una font binària emet de manera equiprobable i independentment un bloc de tres dígits (0 o 1) cada segon. De cada bloc s'envia a un canal de transmissió un 0 si al bloc hi ha més zeros que uns i un 1 en cas contrari. El canal transmet el dígit amb una probabilitat d'error p (vegeu el diagrama)



i el receptor reconstrueix la terna repetint tres vegades el dígit que s'ha rebut. Quin és el nombre mitjà de bits erronis per bloc? Quina hauria de ser la probabilitat p per tal que aquest valor mitjà no fos més gran que 1?

Sigui N la variable aleatòria que conta el nombre de bits erronis per bloc. Observem que només si hi ha error de transmissió, la variable aleatòria N pren valors 2 o 3 i, si no n'hi ha, pren els valors 0 o 1. Així doncs,

$$\begin{aligned}
P(N=0) &= P((x_1x_2x_3) \in \{000,111\} \cap \text{no hi ha error de transmissió}) = \\
&= (2/8)(1-p) \\
P(N=1) &= P((x_1x_2x_3) \notin \{000,111\} \cap \text{no hi ha error de transmissió}) = \\
&= (6/8)(1-p) \\
P(N=2) &= P((x_1x_2x_3) \notin \{000,111\} \cap \text{hi ha error de transmissió}) = \\
&= (6/8)p \\
P(N=3) &= P((x_1x_2x_3) \in \{000,111\} \cap \text{hi ha error de transmissió}) = \\
&= (2/8)p
\end{aligned}$$

El valor mitjà és

$$E(N) = 1(6/8)(1-p) + 2(6/8)p + 3(2/8)p = 3/4 + (3/2)p.$$

Per tal que aquest valor mitjà no sigui més gran que 1 cal doncs que la probabilitat d'error del canal satisfaci $p \leq 1/6$.

14. Sigui X una variable aleatòria amb esperança m_X i variància σ_X^2. Quina és l'expressió de l'esperança i variància de $Y = aX + b$ en termes de les de X? Es poden trobar valors a i b de manera que $E(Y) = 0$ i $Var(Y) = 1$ (variable aleatòria *normalitzada*) ?

Tenim

$$E(Y) = E(aX + b) = aE(X) + b = am_X + b$$

i

$$\begin{aligned} Var(Y) &= E[(Y - E(y))^2] = E[(aX + b - (am_X + b))^2] = E(a^2(X - m_X)^2) = \\ &= a^2 E[(X - m_X)^2] = a^2\sigma_X^2. \end{aligned}$$

En particular, si $b = -am_X$ i $a = 1/\sigma_X$, és a dir, si $Y = \frac{X - m_X}{\sigma_X}$, aleshores $E(Y) = 0$ i $Var(Y) = 1$.

15. Sigui X una variable aleatòria contínua tal que la seva funció de densitat de probabilitat té un eix de simetria a la recta $y = k$. Si X té esperança, quin és el seu valor?

Que la funció densitat de X tingui un eix de simetria a la recta $y = k$ vol dir que

$$f_X(k + x) = f_X(k - x) \forall x \in \mathbf{R}.$$

Fent el canvi de variables $u = x - k$,

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (k + u) f_X(k + u) du = \\ &= k \int_{-\infty}^{\infty} f_X(k + u) du + \int_{-\infty}^{\infty} u f_X(k + u) du. \end{aligned}$$

La primera d'aquestes integrals és la de la funció densitat sobre tota la recta i val 1, mentre que la segona és la d'una funció imparell en un interval simètric (convergent ja que X té esperança) i és per tant nul·la. Així doncs, tal i com resulta intuïtivament raonable, $E(X) = k$.

16. Trobeu el valor mitjà i la variància de les variables aleatòries

a) $X \sim U(a, b)$.

b) $Y \sim Exp(\lambda)$.

c) $Z \sim N(m, \sigma^2)$.

d) $T \sim Ray(\alpha)$.

(a) La funció densitat d'una variable aleatòria uniforme a l'interval (a, b) té un eix de simetria a la recta $y = \frac{a+b}{2}$. D'acord amb el problema 16 d'aquest capítol,

$$E(X) = \frac{a+b}{2}.$$

D'altra banda,

$$\begin{aligned} Var(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \frac{a+b}{2})^2 f_X(x)dx = \int_a^b (x - \frac{a+b}{2})^2 \frac{1}{b-a} dx = \\ &= \frac{1}{b-a}\frac{1}{3}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^3\Bigg]_a^b = \frac{(b-a)^2}{12}. \end{aligned}$$

(b) La funció densitat de Y és

$$f_Y(y) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda y} & \text{si } y \geq 0 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}.$$

de manera que

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_0^{\infty} y\lambda e^{-\lambda y} dy, \\ Var(Y) &= \int_0^{\infty} y^2 \lambda e^{-\lambda y} dy. \end{aligned}$$

Per calcular aquestes integrals resulta útil el canvi $u = \lambda y$, ja que

$$\int_0^{\infty} y^n \lambda e^{-\lambda y} dy = \frac{1}{\lambda^{n+1}} \int_0^{\infty} u^n e^{-u} du = \frac{\Gamma(n+1)}{\lambda^{n+1}},$$

on $\Gamma(n+1) = n!$ és la funció gamma. Així,

$$E(Y) = \frac{1}{\lambda} \text{ i } E(Y^2) = \frac{2}{\lambda^2},$$

de manera que

$$Var(Y) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

(c) Considerem primer una variable aleatòria normal normalitzada $N \sim N(0,1)$. La seva funció de densitat és

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

que és una funció parell, de manera que $E(Z) = 0$.
D'altra banda, fent el canvi $z = \sqrt{2u}$,

$$\begin{aligned} Var(Z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} z^2 e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} u^{1/2} e^{-u} du = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 1. \end{aligned}$$

Finalment, si $Z_1 = \sigma Z + m$, aleshores Z_1 té una distribució normal $N(m, \sigma^2)$ de manera que, d'acord amb el problema 14 d'aquest capítol,

$$E(Z_1) = m \text{ i } Var(Z_1) = \sigma^2.$$

Observació: Al problema 46 d'aquest capítol es suggereix un altre procediment per calcular els moments d'una variable aleatòria normal.

(d) La funció densitat d'una variable aleatòria Rayleigh de paràmetre α és

$$f_T(t) = \begin{cases} \frac{t}{\alpha^2} e^{-\frac{t^2}{2\alpha^2}} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

Per calcular les integrals que donen els moments de T resulta útil el canvi $u = \frac{t^2}{2\alpha^2}$ ja que

$$\int_0^{\infty} t^n e^{-\frac{t^2}{2\alpha^2}} dt = \alpha^{n+1} \sqrt{2^n - 1} \int_0^{\infty} u^{n-1/2} e^{-u} du = \alpha^{n+1} \sqrt{2^{n-1}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right), n > 1$$

D'aquí,

$$E(T) = \int_0^{\infty} t \frac{t}{\alpha^2} e^{-\frac{t^2}{2\alpha^2}} dt = \alpha \sqrt{2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \alpha \frac{1}{\sqrt{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \alpha \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

D'altra banda,

$$E(T^2) = \int_0^{\infty} t^2 \frac{t}{\alpha^2} e^{-\frac{t^2}{2\alpha^2}} dt = \alpha^2 2 \Gamma\left(\frac{4}{2}\right) = 2\alpha^2$$

D'on

$$Var(T) = E(T^2) - E^2(T) = \frac{4 - \pi}{2} \alpha^2.$$

17. La variable aleatòria X segueix una llei normal $N(m, \sigma^2)$. Sabent que $m = 5\sigma$ i que $P(X < 6) = 0.8413$,

(a) quan valen l'esperança i la variància de X?

(b) Quina és la funció de distribució de $Y = 3 - X^2$ i la seva esperança?

Indicació: erf(1)=0.3413

(a) Com que X segueix una llei normal,

$$P(X < 6) = P(\frac{X-m}{\sigma} < \frac{6-m}{\sigma}) = 0.5 + erf(\frac{6-m}{\sigma}) = 0.8413,$$

d'on $erf(\frac{6-m}{\sigma}) = 0.3413$ i, d'acord amb l'indicació, $\frac{6-m}{\sigma} = 1$. Fent servir ara la relació $m = 5\sigma$ tenim $\sigma = 1$ i $m = 5$.

(b) Tenim

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(3 - X^2 \leq y) = P(X^2 > 3 - y) = \\ &= 1 - P(X^2 \leq 3 - y) = 1 - P(-\sqrt{3-y} \leq X \leq \sqrt{3-y}) = \\ &= 1 - \left(F_X(\sqrt{3-y}) - F_X(-\sqrt{3-y})\right) == 1 - erf(\sqrt{3-y} - 5) = \\ &= erf(-\sqrt{3-y} - 5). \end{aligned}$$

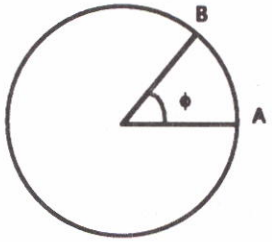
L'esperança de Y es pot calcular directament fent,

$$E(Y) = E(3 - X^2) = 3 - E(X^2).$$

Com que $1 = Var(X) = E(X^2) - E^2(X) = E(X^2) - 25$, tenim

$$E(Y) = -23.$$

18. Sigui A un punt fix a una circumferència de radi r i ϕ una variable aleatòria amb distribució uniforme a $(-\pi, \pi)$. Calculeu la funció distribució i l'esperança de la variable aleatòria Y que dóna la distància de A a B a la figura.



La relació entre Y i ϕ ve donada per

$$Y = |2r \sin(\phi/2)|$$

de manera que Y pren valors a l'interval $(0, 2r)$. Per a $y \in (0, 2r)$,

$$\begin{aligned}
F_Y(y) &= P(Y \le y) = P(|2r \sin(\phi/2)| \le y) = P(|\sin(\phi/2)| \le \frac{y}{2r}) = \\
&= P(-\frac{y}{2r} \le \sin\frac{\phi}{2} \le \frac{y}{2r}) = P(2\arcsin(-\frac{y}{2r}) \le \phi \le 2\arcsin(\frac{y}{2r})) = \\
&= F_\phi(2\arcsin(\frac{y}{2r})) - F_\phi(2\arcsin(-\frac{y}{2r})) = \\
&= \frac{1}{2\pi} 4\arcsin(\frac{y}{2r}).
\end{aligned}$$

Així doncs,

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ \frac{2}{\pi}\arcsin(\frac{y}{2r}) & y \in (0, 2r) \\ 1 & y > 2r \end{cases}$$

La funció densitat de Y es pot calcular, o bé derivant $F_Y(y)$,

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi r\sqrt{1-(\frac{y}{2r})^2}} & y \in (0, 2r) \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

o bé directament de la funció densitat de ϕ de la manera següent. Donat que la funció

$$y = |2r \sin(\phi/2)|$$

té dues solucions per a cada $y \in (0, 2r)$, $\phi_1 = 2\arcsin(\frac{y}{2r})$ i $\phi_2 = 2\arcsin(-\frac{y}{2r})$,

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \left|\frac{1}{r\sqrt{1-(\frac{y}{2r})^2}}\right| f_\phi(2\arcsin(\frac{y}{2r})) + \left|\frac{-1}{r\sqrt{1-(\frac{y}{2r})^2}}\right| f_\phi(2\arcsin(\frac{-y}{2r})) = \\ &= 2\frac{1}{r\sqrt{1-(\frac{y}{2r})^2}}\frac{1}{2\pi} \quad \text{si } y \in (0, 2r) \end{aligned}$$

De manera semblant, l'esperança de Y es pot calcular de dues maneres, o bé a partir de la funció densitat de Y que hem obtingut,

$$E(Y) = \int_0^{2r} \frac{1}{\pi r\sqrt{1-(\frac{y}{2r})^2}} dy = \frac{-4r}{\pi}\sqrt{1-(\frac{y}{2r})^2}\Big|_0^{2r} = \frac{4r}{\pi},$$

o bé directament de la funció densitat de ϕ fent servir el teorema de l'esperança,

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} y f_\phi(\phi) d\phi = \int_{-\pi}^{\pi} |2r\sin(\phi/2)| \frac{1}{2\pi} d\phi = \\ &= \frac{2r}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(\phi/2) d\phi = \frac{4r}{\pi}. \end{aligned}$$

19. Sigui X una variable aleatòria amb funció densitat

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x & x \in (0,1) \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}.$$

Determineu $E(\sqrt{X})$

a) A partir de la funció densitat de $Y = \sqrt{X}$.

b) Fent servir el Teorema de l'esperança.

(a) Per a cada $x \in (0,1)$, l'equació $y = \sqrt{x}$ té una única solució per a y, de manera que

$$f_Y(y) = |2y| f_X(y^2) = \begin{cases} 4y^3 & y \in (0,1) \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}.$$

D'on

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy = \int_0^1 4y^4 dy = \frac{4}{5}.$$

(b) Directament, a partir del teorema de l'esperança,

$$E(Y) = E(\sqrt{X}) = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{x} f_X(x) dx = \int_0^1 \sqrt{x} 2x dx = \frac{4}{5}.$$

20. El percentil 90 d'una variable aleatòria X és el valor x_{90} pel qual $F_X(x_{90}) = P(X \leq x_{90}) = 0.90$. De forma similar, el percentil 50 és el valor x_{50} que satisfà $P(X \leq x_{50}) = 0.50$ i s'anomena *mediana*. Quins són aquests dos valors per a una variable aleatòria exponencial de valor mitjà 10?

Diem x_k al percentil corresponent a $P(X \leq x_k) = k10^{-2}$, $0 < k < 10$. Aleshores,

$$\int_{-\infty}^{x_k} f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{x_k} \lambda e^{-\lambda x} dx = -e^{-\lambda x}\Big|_0^{x_k} = 1 - e^{-\lambda x_k} = k10^{-2}$$

de manera que

$$x_k = -\frac{\ln(1 - k10^{-2})}{\lambda}.$$

Com que $\frac{1}{\lambda} = E(X) = 10$, tenim $\lambda = 10^{-1}$. D'aquí,

$$\begin{aligned} x_{90} &= -10\ln(0.1) \simeq 23.0585 \\ x_{50} &= -10\ln(0.5) \simeq 6.93147 \end{aligned}$$

Nota: Observeu que la mediana no coincideix amb el valor mitjà. Els dos valors coincideixen en canvi per a una variable aleatòria normal o, més generalment, quan la funció densitat té un eix de simetria.

21. La probabilitat que un component electrònic que no ha fallat fins a l'instant t falli a l'interval $(t, t + dt)$ és $10^{-2}dt$. Si ha estat funcionant fins a $t = 30$, quina és la probabilitat que funcioni almenys fins a $t = 40$?

Sigui T la variable aleatòria que indica l'instant en què el component falla. El sentit precís de l'enunciat és que

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t < T \leq t + \Delta t | T > t)}{\Delta t} = 10^{-2},\ t > 0.$$

Aquest límit se l'anomena ***raó de fallada condicionada***, $\beta(t)$, i en general és una funció del temps. Aquí, $\beta(t) = 10^{-2}$ és constant. Posant

$$P(t < T \leq t + \Delta t | T > t) = \frac{P(t < T \leq t + \Delta t)}{P(T > t)} = \frac{F_T(t + \Delta t) - F_T(t)}{1 - F_T(t)} t > 0$$

es pot expressar el límit anterior en termes de $F_T(t)$,

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \frac{F_T(t + \Delta t) - F_T(t)}{1 - F_T(t)} = \frac{F_T'(t)}{1 - F_T(t)} = 10^{-2} t > 0$$

d'on

$$\ln(1 - F_T(t)) = 10^{-2}t\,, t > 0$$

i aleshores,

$$\begin{aligned} F_T(t) &= 1 - e^{-\lambda t}, t > 0 \\ f_T(t) &= \lambda e^{-\lambda t} t > 0 \end{aligned}$$

on $\lambda = 10^{-2}$, és a dir, T segueix una llei exponencial de valor mitjà 100. En particular,

$$\begin{aligned} P(T \geq 40 | T \geq 30) &= \frac{P(T \geq 40)}{P(T \geq 30} = \\ &= \frac{1 - F_T(40)}{1 - F_T(30)} = \frac{e^{-0.4}}{e^{-0.3}} = \\ &= e^{-0.1} = 1 - F_T(10) \simeq 0,90. \end{aligned}$$

Observeu que $P(T \geq 40 | T \geq 30) = P(T > 40 - 30)$. Això és el que es vol indicar quan es diu que la variable aleatòria exponencial no té memòria.

22. Tres ordinadors, cada un amb una raó de fallada condicionada $\beta(t) = \lambda$, funcionen independentment per prestar un servei determinat, de manera que aquest només s'interromp si han fallat dos ordinadors. Trobeu la funció densitat i l'esperança de la variable aleatòria T que dóna el temps de funcionament del sistema

---

Diguem X_i, $i = 1,2,3$ a les variables aleatòries que donen el temps de servei dels ordinadors $1,2$ i 3 respectivament. De manera semblant a com s'ha fet al problema anterior, es dedueix que cada una de les variables aleatòries X_i segueix una llei exponencial de valor mitjà $1/\lambda$. Aleshores,

$$F_T(t) = P(T \leq t) = P((X_1 \leq t) \cap (X_2 \leq t) \cup (X_1 \leq t) \cap (X_3 \leq t) \cup (X_2 \leq t) \cap (X_3 \leq t))$$

Si diem $A_{ij} = \{(X_i \leq t) \cap (X_j \leq t)\}$, tenim

$$\begin{aligned} F_T(t) &= P(A_{12}) + P(A_{13}) + P(A_{23}) - P(A_{12} \cap A_{13}) - P(A_{12} \cap A_{23}) - \\ &\quad P(A_{13} \cap A_{23}) + P(A_{12} \cap A_{13} \cap A_{23}) \end{aligned}$$

on, essent independent el funcionament dels ordinadors,

$$P(A_{ij}) = P((X_i \leq t) \cap (X_j \leq t)) = P(X_i \leq t)P(X_j \leq t) = (1 - e^{-\lambda t})^2$$

i

$$P(A_{12} \cap A_{13} \cap A_{23}) = P(A_{12} \cap A_{13}) = P(A_{12} \cap A_{23}) = P(A_{13} \cap A_{23}) = (1 - e^{-\lambda t})^3.$$

Així doncs,

$$F_T(t) = 3(1 - e^{-\lambda t})^2 - 2(1 - e^{-\lambda t})^3 = (1 - e^{-\lambda t})^2(1 + e^{-\lambda t}),\ t > 0$$

$$f_T(t) = 6\lambda e^{-2\lambda t}(1 - e^{-\lambda t}),\ t > 0$$

i

$$E(T) = \int_0^{\infty} t6\lambda e^{-2\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})dt = \frac{5}{6\lambda}.$$

23. La resposta d'una cèl·lula fotoelèctrica a la freqüència de la radiació incident ve donada per

$$i(\omega) = \begin{cases} \frac{\frac{\omega}{\omega_0}}{1+(\frac{\omega}{\omega_0})^2}, & \omega > 0 \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases},$$

amb $\omega_0 > 0$. La freqüència de radiació que arriba a la cèl·lula és una variable aleatòria contínua Ω tipus Rayleigh, i.e. $f_\Omega(\omega) = \frac{\omega}{\omega_0^2} e^{-\frac{\omega^2}{2\omega_0^2}}$, $\omega \geq 0$.

(a) Determineu la funció distribució de probabilitat de la resposta $I = I(\omega)$ de la cèl·lula.

(b) Si $I < 2/5$, quina és la probabilitat que la freqüència Ω sigui inferior a $\frac{1}{2}\omega_0$?

(c) Si Ω és ara uniforme en $(0, 2\omega_0)$, trobeu el valor mitjà de I comprovant que és independent de ω_0.

(a) Observem que la funció $i(\omega) = \frac{\frac{\omega}{\omega_0}}{1+(\frac{\omega}{\omega_0})^2}$ és positiva per a $\omega > 0$, creix fins a $\omega = \omega_0$ on $i(\omega_0) = 1/2$, decreix a (ω_0, ∞) i té límit 0 per a $\omega \to \infty$.
Així,

$$F_I(i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i > 1/2 \\ P(\frac{\frac{\Omega}{\omega_0}}{1+(\frac{\Omega}{\omega_0})^2} < i) & \text{si } 0 < i \leq 1/2 \\ 0 & \text{si } i \leq 0 \end{cases}.$$

Si diem $h_1(i) = \omega_0 \frac{1-\sqrt{1-4i^2}}{2i}$ i $h_2(i) = \omega_0 \frac{1+\sqrt{1-4i^2}}{2i}$, tenim, per a $0 < i \leq 1/2$:

$$\begin{aligned} P(\frac{\frac{\Omega}{\omega_0}}{1+(\frac{\Omega}{\omega_0})^2} < i) &= P(\Omega < h_1(i)) + P(\Omega > h_2(i)) = \\ &= F_\Omega(h_1(i)) + 1 - F_\Omega(h_2(i)), \end{aligned}$$

essent $F_\Omega(\omega) = \int_{-\infty}^{\omega} f_\Omega(t)\, dt$. Així, si $\omega > 0$, $F_\Omega(\omega) = \int_0^{\omega} \frac{t}{\omega_0^2} e^{-\frac{t^2}{2\omega_0^2}} = 1 - e^{-\frac{\omega^2}{2\omega_0^2}}$

(b) Observem que $\{I < \frac{2}{5}\} = \{\Omega > \frac{1}{2}\omega_0\} \cup \{\Omega > 2\omega_0\}$, de manera que

$$\begin{aligned} P(\Omega < \frac{1}{2}\omega_0 | I < \frac{2}{5}) &= \frac{P(\Omega < 1/2\omega_0)}{P(\{\Omega < \frac{1}{2}\omega_0\} \cup \{\Omega > 2\omega_0\})} = \\ &= \frac{F_\Omega(\frac{1}{2}\omega_0)}{F_\Omega(\frac{1}{2}\omega_0) + 1 - F_\Omega(2\omega_0)} = \frac{1 - e^{-\frac{1}{8}}}{1 - e^{-\frac{1}{8}} + e^{-4}}. \end{aligned}$$

(c)

$$E(I) = \int_{-\infty}^{\infty} i(\omega) f_{\Omega}(\omega)\, d\omega = \int_{0}^{2\omega_0} \frac{\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + (\frac{\omega}{\omega_0})^2} \frac{1}{2\omega_0}\, d\omega =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{t}{1+t^2}\, dt = \frac{1}{4} \ln 5$$

Problemes proposats

24. Una moneda amb probabilitat de cara $p = 1/3$ es tira repetidament fins que han sortit dues cares. Diem Y a la variable aleatòria que conta el nombre de vegades que es tira la moneda. Quina és la funció de probabilitat de Y?

25. Considereu proves repetides de Bernouilli amb probabilitat d'èxit p. Sigui Y la variable aleatòria que conta la quantitat de proves que cal fer fins que s'obtenen r èxits. Quina és la funció de probabilitat de Y?

26. D'un lot de deu peces n'hi ha tres de defectuoses. Prenem una mostra aleatòria de sis peces i diem X a la variable aleatòria que conta el nombre de peces defectuoses a la mostra. Quina és la funció de probabilitat de X?

27. A una urna hi ha b boles blanques i v de vermelles, $N = b + v$. Treiem sense reposició n boles de la urna ($n \leq N$) i diem X a la variable aleatòria que conta el nombre de boles blanques que treiem.

(a) Quin és el recorregut de X?

(b) Quina és la funció de probabilitat de X?

(c) Calculeu $\lim_{N\to\infty} P(X = k)$ si $\lim_{N\to\infty} b/N = p$ i $\lim_{N\to\infty} v/N = q$. Interpreteu el resultat.

28. S'agafen dos xips d'un lot de quinze en el qual n'hi ha cinc que són defectuosos. Trobeu la probabilitat que se n'hagi pres almenys un de defectuós.

29. Sigui X una variable aleatòria discreta amb funció de probabilitat $P(X = k) = a/2^k$, $k \geq 1$. Determineu la constant a i la probabilitat que X sigui parell.

30. Els autobusos d'una línia arriben a una parada cada deu minuts, el primer a la una i el darrer a les dues. Una persona arriba a la parada entre les 0h 30m i les 2h a un instant t que segueix una llei uniforme. Calculeu la probabilitat que hagi d'esperar menys de cinc minuts fins que arribi un autobús.

31. El nombre de vegades que un ordinador demana accés a la memòria en un interval (t_1, t_2) segueix una llei de Poisson de paràmetre $\lambda = \mu(t_2 - t_1)$, on μ és una constant positiva. Sigui T la variable aleatòria que dóna l'instant t (a partir d'un origen de temps) en el qual s'han realitzat k accessos a la memòria. Quina és la funció de distribució de T

(a) quan $k = 1$.

(b) quan $k > 1$.

32. Sigui X una variable aleatòria que pren valors a l'interval $[1, 2]$ i que satisfà l'equació $f_X(x)F_X(x) = 1/2$, $x \in (1, 2)$. Trobeu la funció de densitat i de distribució de probabilitat de X. Calculeu $P(X \leq 3/2)$.

33. Sigui X una variable aleatòria amb funció de distribució de probabilitat F_X estrictament creixent. Trobeu, en funció d'aquesta, les funcions de distribució i de densitat de les variables $Y = F_X(X)$ i $Z = -\ln F_X(X)$.

34. Sigui X una variable aleatòria amb funció densitat

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda(x-1)} & x > 1 \\ 0 & x \leq 1 \end{cases}$$

i sigui g la funció

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 2x & 0 \leq x \leq 2 \\ 6 & x > 2 \end{cases}$$

Trobeu la funció de distribució de probabilitat de $Y = g(X)$ i dibuixeu-ne la gràfica.

35. Si X segueix una llei de Cauchy amb paràmetre α, determineu la funció de densitat i de distribució de probabilitat de $Y = g(X)$ i de $Z = h(X)$ on $g(x) = 1/x$ i $h(x) = 1 + x^n$.

36. Sigui X una variable aleatòria contínua amb funció de densitat de probabilitat $f_X(x) = ae^{-|x|}$. Determineu el valor de a i $P(|X| + |X-3| \leq 3)$.

37. Sigui X una variable aleatòria de Poisson amb paràmetre λ. Sigui $Y = g(X)$ on $g(x) = (-1)^{\lfloor x \rfloor}$, $x > 1$ ($\lfloor x \rfloor$ denota la part entera de x). Determineu la funció de densitat i de distribució de probabilitat de Y.

38. L'estudi de les distribucions de funcions de variables aleatòries es pot interpretar com l'anàlisi de la sortida d'un dispositiu que realitza la funció quan a l'entrada hi ha un senyal aleatori:

$$X \longrightarrow \boxed{\quad g(x) \quad} \longrightarrow Y=g(X)$$

Determineu la funció de distribució de probabilitat de Y en termes de la de X quan

(a) el dispositiu és un rectificador d'ona completa ($g(x) = |x|$).

(b) el dispositiu és un quantificador ($g(x) = \lfloor x \rfloor$)

39. Una urna té set boles numerades de l'1 al 7. Treiem 4 boles a l'atzar i diem X a la variable aleatòria que dóna el número més gran que ha sortit. Doneu la funció de probabilitat de X i la seva esperança.

40. Es tiren simultàniament un dau equilibrat i una moneda, aquesta amb $P(cara) = p$, $0 < p < 1$. La puntuació del dau es multiplica per $1-p$ si surt cara a la moneda i per p si surt creu. Sigui X la variable aleatòria que dóna el resultat del joc. Doneu la funció de probabilitat de X i la seva esperança.

41. Es tiren dos daus 900 vegades. Sigui X la variable aleatòria que conta el nombre de vegades que s'obté la mateixa puntuació als dos daus. Doneu la funció de probabilitat de X i $E(X)$.

42. Tenim un segment dividit en 50 trossos iguals i s'hi situen 25 punts a l'atzar (és a dir, amb distribució uniforme). Sigui X la variable aleatòria que conta el nombre de trossos sense cap punt. Quin és el valor mitjà de X?

43. La demanda X d'un determinat producte segueix una llei exponencial de valor mitjà 1. Si se'n ven una quantitat x, es produeix un guany $2x$, mentre que la quantitat z sobrant en un estoc produeix una pèrdua de $3z$. Determineu la quantitat c de proveïment del producte per tal que l'esperança del guany sigui màxima.

44. Determineu els moments m_k d'una variable aleatòria X que segueix una llei normal $N(0,\sigma^2)$ en termes del paràmetre σ.

Indicació: Dieu $t = 1/2\sigma^2$ i feu servir el resultat següent: Si $h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,t)dx$, aleshores $h'(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)dx$ sota certes condicions sobre f que aquí es satisfan.

45. La variable aleatòria X pren valors $-1, 0, 1$ amb probabilitats p, p i $1-2p$ respectivament. Quina és la seva variancia?

46. La variable aleatòria X segueix una llei uniforme a l'interval $(0,3)$. Doneu l'esperança de $Y = g(X)$, on

$$g(x) = \begin{cases} x & x \in [0,1] \\ 2-x & x \in (1,2] \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

47. La variable aleatòria X pren només els valors -1 i 1 amb probabilitats p i p^2 respectivament. Calculeu la variància de $Z = X^2 - X$.

48. Fent servir la desigualtat de Txebyshev, proveu que $Var(X) = 0$ si i només si X prèn un valor constant amb probabilitat 1.

49. Un sistema de transmissió envia símbols $\{0,1\}$ un a un de forma independent. Cada símbol es transmet per dos canals iguals i independents. Per a cada canal,

$$P(\text{ rebre } 0 | \text{ s'envia } 0) = P(\text{ rebre } 1 | \text{ s'envia } 1) = p$$

i

$$P(\text{ rebre } 0 | \text{ s'envia } 1) = P(\text{ rebre } 1 | \text{ s'envia } 0) = 1 - p = q$$

on $0 < p < 1$. Si les sortides dels dos canals coincideixen, el receptor accepta el símbol i en cas contrari el fa retransmetre. Si X és la variable aleatòria que conta el nombre de símbols erronis quan el receptor ha acceptat n símbols, i R és la variable aleatòria que conta el nombre de transmissions que han calgut per rebre aquests n símbols,

(a) Per a quins valors de p el valor mitjà de X és inferior a $\frac{1}{10}n$ i el de R és inferior a $\frac{16}{10}n$?

(b) Quina és la funció de probabilitat de X i la de R?

Respostes

24. $P(Y = k) = (k-1)(\frac{1}{3})^2(\frac{2}{3})^{k-2}$.

25. Si X_{n-1} és una variable aleatòria $Bin(n-1, p)$,

$$P(Y = n) = P(X_{n-1} = r-1) \cdot p = \binom{n-1}{r-1} p^r q^{n-r}.$$

Aquesta distribució s'anomena de Pascal. La variable aleatòria que conta el nombre de fracassos fins que surten r èxits té una distribució que s'anomena Binomial negativa i la seva funció de probabilitat es calcula de forma similar.

26. $P(Y = k) = \frac{1}{210}\binom{3}{k}\binom{7}{6-k}$, $0 \leq k \leq 3$.

27. $P(X = k) = \frac{\binom{b}{k}\binom{v}{n-k}}{\binom{N}{n}}$, $\max(0, n-v) \leq k \leq \min(b, n)$.

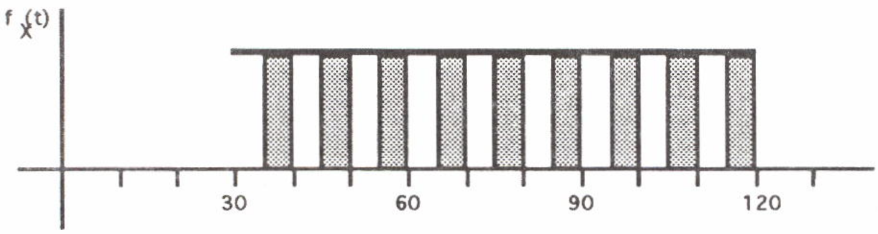
Observació: Aquesta distribució s'anomena hipergeomètrica

28. Si X conta el nombre de xips defectuosos, $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = \frac{4}{7}$

29. $a = 1$ i $P(X parell) = \sum_{k \geq 1} P(X = 2k) = \frac{1}{3}$

30. Si X denota l'instant en què arriba el viatjer i T el temps d'espera,

$$P(T < 5) = P(55 < X \leq 60) + P(65 < X \leq 70) + \ldots + P(115 < X \leq 120) = \frac{7}{18}$$



31. Si X_t dóna el nombre d'accessos a l'interval $(0, t)$,

$$F_T(t) = P(T \leq t) = P(X_t \geq k) = 1 - F_{X_t}(k) = 1 - \sum_{r=0}^{k-1} \frac{\lambda^r}{r!} e^{-\lambda}$$

(a) T segueix una llei exponencial de valor mitjà μ.

(b) T té una funció de densitat $f_T(t) = \frac{\mu^k}{(k-1)!} t^{k-1} e^{-\mu t}$ (distribució Gamma $\gamma(\mu, k)$).

32.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \sqrt{x-1} & 1 \le x \le 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$$

$$P(X \le 3/2) = 1/\sqrt{2}$$

33. Y segueix una llei uniforme $U(0,1)$ i Z una llei exponencial $Exp(1)$.

34.

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \le 2 \\ 1 - e^{-\frac{\lambda}{2}(y-2)} & 2 \le y < 4 \\ 1 - e^{-\lambda} & 4 \le y < 6 \\ 1 & y \ge 6 \end{cases}$$

35. Y segueix una llei de Cauchy de paràmetre $\frac{1}{\alpha}$, mentre que

$$F_Z(z) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \arctan \frac{\sqrt[n]{z-1}}{\alpha} & n \text{ parell}, z > 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan \frac{\sqrt[n]{z-1}}{\alpha} & n \text{ senar} \end{cases}$$

36. $a = 1/2$ i $P(|X| + |X-3| \le 3) = P(0 < X < 3) = \frac{(1-e^{-3})}{2}$.

37. $P(Y = -1) = e^{-\lambda} \sinh \lambda$ i $P(Y = 1) = e^{-\lambda} \cosh \lambda$.

38. (a) $F_Y(y) = \begin{cases} F_X(y) - F_X(-y) & y \ge 0 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$

(b) $F_Y(y) = F_X(\lfloor y \rfloor + 1)$.

39. $P(X = 1) = P(X = 2) = P(X = 3) = 0$, $P(X = 4) = \frac{1}{\binom{7}{4}}$, $P(X = 5) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{7}{4}}$, $P(X = 6) = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{7}{4}}$, $P(X = 7) = \frac{\binom{6}{3}}{\binom{7}{4}}$.

$$E(X) = 6,4$$

Observació: En general, si hi ha N boles numerades d' 1 a N i se'n treuen n, $P(X = i) = \frac{\binom{i-1}{i-n}}{\binom{N}{n}}$, $n \le i \le N$ i $E(X) = \frac{n}{n+1}(N+1)$.

40. $P(X = kp) = q/6$ i $P(X = kq) = p/6$, $1 \le k \le 6$, $q = 1 - p$.
$E(X) = \sum_{k=1}^{6} kpq/6 + \sum_{k=1}^{6} kqp/6 = 7pq$

41. X segueix una llei $Bin(900, 1/6)$ i $E(X) = 150$.

42. $E(Y) = 50(\frac{49}{50})^{25}$.

43. Si G mesura el guany corresponent a una provisió c, $G = g_c(X)$, on

$$g_c = \begin{cases} 2x - 3(c - x) & 0 < x < c \\ 2c & x > c. \end{cases}$$

Aleshores $E(G) = -5e^{-c} + 5 - 3c$ que pren un valor màxim per a $c = \ln(\frac{5}{3})$.

44. $m_k = \begin{cases} 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (k-1)\sigma^k & \text{k parell} \\ 0 & k \text{ imparell} \end{cases}$

45. $E(X) = 1 - 3p$, $Var(X) = p(5 - 9p)$.

46. $E(Y) = \frac{1}{3}$.

47. $E(Z) = 2p$, $Var(Z) = 4p^3$.

49. a) $\frac{3}{4} < p < 1$.

b) $X \simeq Bin(n, q^2)$ i $P(R = k) = \binom{k-1}{n-1}(\alpha)^{n-1}(1-\alpha)^{k-n}$, $k \geq n$, on α és $1 - 2pq$.

Capítol 3. Variables aleatòries n-dimensionals

1. Les variables aleatòries X i Y són independents. ¿Quina és la probabilitat de la unió dels esdeveniments

$$A_1 = \{1 < X < 2,\ -\infty < Y < \infty\}$$
$$A_2 = \{-\infty < X < \infty,\ 1 < Y < \infty\}$$

si X i Y són variables aleatòries uniformes a $[0,3]$?

Tenim

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2),$$

on, essent X i Y independents,

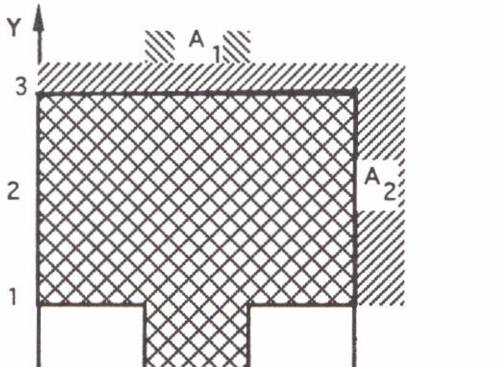
$$P(A_1) = P(1 < X < 2)P(-\infty < Y < \infty) = \int_1^2 f_X(x)dx \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y)dy = \frac{1}{3}.$$

De forma similar, $P(A_2) = P(-\infty < X < \infty)P(1 < Y < \infty) = \frac{2}{3}$. Finalment,

$$P(A_1 \cap A_2) = P(1 < X < 2)P(1 < Y < \infty) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

Així doncs,

$$P(A_1 \cup A_2) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}.$$



Una altra manera de resoldre el problema és la següent. Com que hi ha independència,

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x) f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{9}, & x,y \in [0,3] \\ 0, & \text{altrament} \end{cases} .$$

L'esdeveniment $A_1 \cup A_2$ correspon aleshores a la regió $\mathcal{R}$ amb ratllat doble a la figura anterior, i

$$P(A_1 \cup A_2) = \iint_{\mathcal{R}} f_{XY}(x,y)\, dx dy = \frac{1}{9}(\text{Area de } \mathcal{R}) = \frac{7}{9}.$$

2. Un sistema de transmissió transmet amb igual probabilitat un dels dos missatges $m_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ i $m_2 = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. A causa del soroll, al transmetre m_i és rep $(z_1, z_2) = m_i + (n_1, n_2)$, on (n_1, n_2) és el valor que pren la variable aleatòria (N_1, N_2), on N_1 i N_2 són uniformes a $(-1, 1)$ i independents entre elles. Quan es rep (z_1, z_2), el receptor decideix el missatge que s'ha enviat segons una de les dues regles de decisió següents:

$$d_1(z_1, z_2) = \begin{cases} (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), & \text{si } z_1 + z_2 > 0 \\ (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}), & \text{altrament} \end{cases}$$

o bé

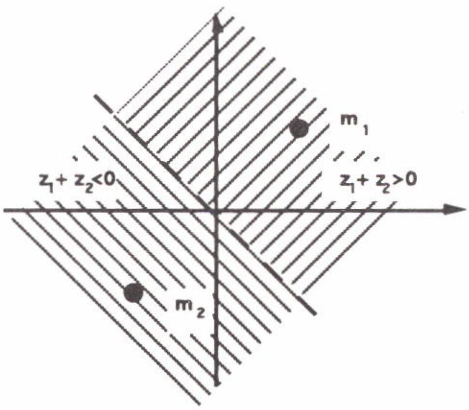
$$d_2(z_1, z_2) = \begin{cases} (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), & \text{si } z_1,\ z_2 > 0 \\ (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}), & \text{si } z_1,\ z_2 < 0 \\ \begin{cases} m_1 \text{ amb probabilitat } \frac{1}{2} \\ m_2 \text{ amb probabilitat } \frac{1}{2} \end{cases}, & \text{altrament} \end{cases}$$

Quina és la probabilitat d'error de cada una d'aquestes regles de decisió?

Diem $P(\epsilon)$ a la probabilitat d'error i $P(m_i)$ a la probabilitat de transmetre el missatge m_i. En els dos casos tenim

$$P(\epsilon) = P(\epsilon|m_1)P(m_1) + P(\epsilon|m_2)P(m_2).$$

Fent servir la regla d_1, tenim el diagrama següent:



i

$$P(\epsilon|m_1) = P(z_1 + z_2 \le 0|m_1) = P(\frac{1}{2} + N_1 + \frac{1}{2} + N_2 \le 0) = P(N_1 + N_2 \le -1).$$

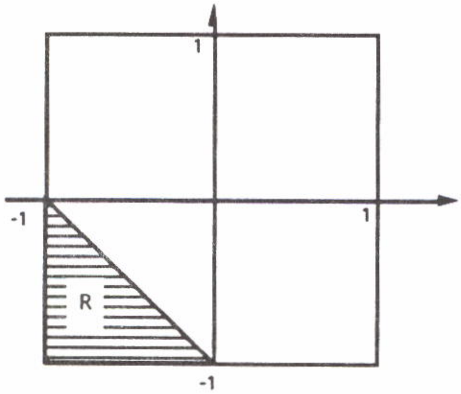
Com que N_1 i N_2 són independents,

$$f_{N_1N_2}(n_1,n_2) = f_{N_1}(n_1)f_{N_2}(n_2) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & n_1, n_2 \in (-1,1) \\ 0, & \text{altrament} \end{cases}$$

i, aleshores,

$$P(N_1 + N_2 \leq -1) = \int_{\mathcal{R}} f_{N_1N_2}(n_1,n_2)\, dn_1 dn_2 = \frac{1}{4}(\text{ àrea de } \mathcal{R}) = \frac{1}{8}$$

on $\mathcal{R}$ és la regió ratllada a la figura,



Per simetria,

$$P(\epsilon|m_2) = P(\epsilon|m_1)$$

d'on la probabilitat d'error amb la primera regla és

$$P(\epsilon) = \frac{1}{8}.$$

Fent servir la segona regla, tenim

$$P(\epsilon|m_1) = P(z_1 < 0, z_2 < 0|m_1) + \frac{1}{2}\left(P(z_1 < 0, z_2 > 0|m_1) + P(z_1 > 0, z_2 < 0|m_1)\right).$$

Així,

$$P(z_1 < 0, z_2 < 0|m_1) = P(\frac{1}{2} + n_1 < 0, \frac{1}{2} + n_2 < 0) = P(n_1 < -\frac{1}{2}, n_2 < -\frac{1}{2}) = \frac{1}{16}$$

$$P(z_1 < 0, z_2 > 0|m_1) = P(\frac{1}{2} + n_1 < 0, \frac{1}{2} + n_2 > 0) = P(n_1 < -\frac{1}{2}, n_2 > -\frac{1}{2}) = \frac{3}{16}$$

i, semblantment,

$$P(z_1 > 0, z_2 < 0|m_1) = \frac{3}{16}$$

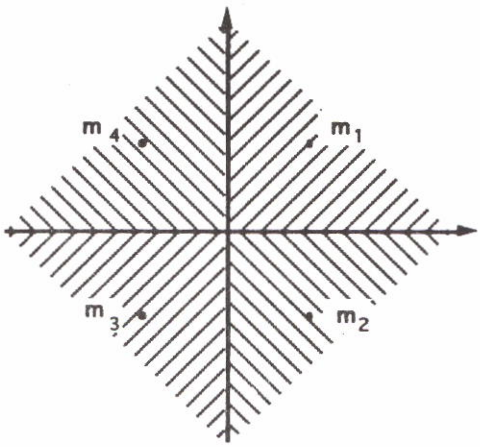
Per simetria,

$$P(\epsilon|m_2) = P(\epsilon|m_1)$$

de manera que

$$P(\epsilon) = \frac{1}{2}(\frac{1}{16} + \frac{3}{16}) + \frac{1}{2}(\frac{1}{16} + \frac{3}{16}) = \frac{1}{4}.$$

3. Un sistema de comunicació transmet un dels quatre missatges $m_1 = (1,1)$, $m_2 = (-1,1)$, $m_3 = (-1,-1)$ o $m_4 = (1,-1)$. El receptor rep el missatge $(z_1, z_2) = m_i + (n_1, n_2)$, on m_i és el missatge transmès i (n_1, n_2) és el valor que pren la variable aleatòria (N_1, N_2), on N_1 i N_2 són gaussianes normalitzades independents. El receptor decideix que s'ha enviat el missatge m_i si (z_1, z_2) està al quadrant i (vegeu la figura). Quina és la probabilitat d'error en termes de $I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_1^\infty e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$?



Diem $P(\epsilon)$ a la probabilitat d'error i $P(m_i) = 1/4$ a la probabilitat que es transmeti el missatge m_i. Tenim,

$$P(\epsilon) = \sum_{i=1}^{4} P(\epsilon|m_i)P(m_i) = P(\epsilon|m_1)$$

ja que , per la simetria del problema,

$$P(\epsilon|m_i) = P(\epsilon|m_j),\ 1 \le i,j \le 4.$$

D'altra banda,

$$\begin{aligned} P(\epsilon|m_1) &= P(1 + N_1 < 0 \text{ ó } 1 + N_2 < 0) = \\ &= P(N_1 < -1) + P(N_2 < -1) - P(N_1 < -1, N_2 < -1) = \\ &= 2I - P(N_1 < -1)P(N_2 < -1) = 2I - I^2, \end{aligned}$$

on hem fet servir

$$P(N_i < -1) = \int_{-\infty}^{-1} f_{N_i}(n_i)\, dn_i = \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}n_i^2}\, dn_i = \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx = I.$$

4. Siguin X i Y dues variables aleatòries. Quines de les afirmacions següents són certes i perquè?

(a) $F_{XY}(-\infty,-\infty) = F_{XY}(x,-\infty) = 0$.

(b) $F_{XY}(\infty,\infty) = F_{XY}(x,\infty) = 1$.

(c) Si X i Y són incorrelades, aleshores $g(X)$ i $h(Y)$ ho són per a funcions f i g qualssevol.

(d) Si X i Y són incorrelades no gaussianes, aleshores la variància de la suma és la suma de variàncies.

(e) $|\sigma_X| = |\sigma_Y| \Rightarrow X+Y, X-Y$ incorrelades.

(a)

$$F_{XY}(-\infty,-\infty) = P(X \leq -\infty, Y \leq -\infty) = P(\emptyset) = 0$$

i

$$F_{XY}(x,-\infty) = P(X \leq x, Y \leq -\infty) = P(\{X \leq x\} \cap \emptyset) = 0$$

de manera que l'afirmació (a) és certa.

(b)

$$F_{XY}(\infty,\infty) = P(X \leq \infty, Y \leq \infty) = P(\Omega) = 1$$

i

$$F_{XY}(x,\infty) = P(X \leq x, Y \leq \infty) = P(X \leq x)$$

on aquesta darrera probabilitat no val 1 en general (falsa).

(c) De $E(XY) = E(X)E(Y)$ no es dedueix en general que $E(g(X)h(Y)) = $
$= E(g(X))E(h(Y))$.
La part (c) és per tant falsa.

(d) Si $E(XY) = E(X)E(Y)$,

$$\begin{aligned} Var(X+Y) &= E[(X+Y)^2] - E^2(X+Y) = \\ &= E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2) - E^2(X) - 2E(X)E(Y) - E^2(Y) = \\ &= Var(X) + Var(Y). \end{aligned}$$

de manera que l'afirmació (d) és certa.

(e) De $|\sigma_X| = |\sigma_Y|$ tenim $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ i, aleshores, $E(X^2) - E(Y^2) = E^2(X) - E^2(Y)$ o sigui

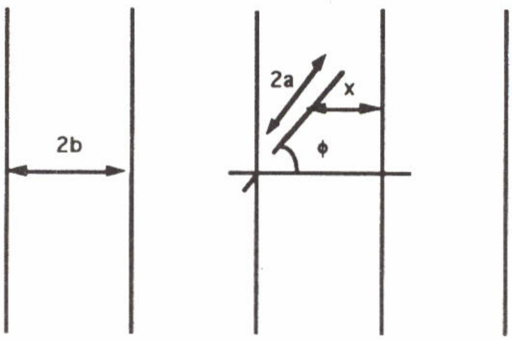
$$E[(X+Y)(X-Y)] = E(X+Y)E(X-Y),$$

de manera que $(X+Y)$ i $(X-Y)$ són incorrelades i l'afirmació (e) és certa.

5. (Problema de l'agulla de Buffon)

Una agulla de llargada $2a$ es deixa caure aleatòriament sobre una superfície plana que té dibuixades línies paralcdotleles separades una distància $2b, (b > a)$. Quina és la probabilitat que l'agulla trepitgi alguna de les línies?

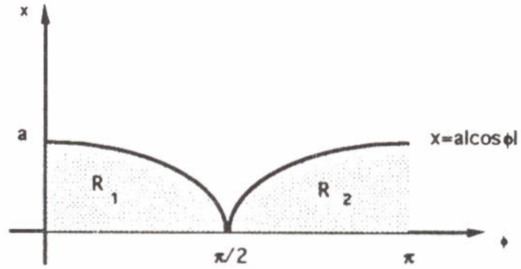
Diem X a la variable aleatòria que dóna la distància del centre de l'agulla a la línia més pròxima i Φ a la que dóna l'angle que forma l'agulla respecte a una perpendicular a les línies (vegeu la figura).



La variable aleatòria X segueix una llei uniforme a $[0, b]$ i Φ segueix una llei uniforme a $[0, \pi]$. A més, X i Φ són independents. Per tant, si $I = \{$ l'agulla intersecta alguna línia $\}$,

$$P(I) = P(|a\cos\Phi| \geq X) = \int\int_{R_1 \cup R_2} f_{X\Phi}(x, \phi)\,dx\,d\phi,$$

on R_1 i R_2 són les regions indicades a la figura següent:



i

$$f_{X\Phi}(x, \phi) = f_X(x) f_\Phi(\phi) = \frac{1}{b}\frac{1}{\pi},$$

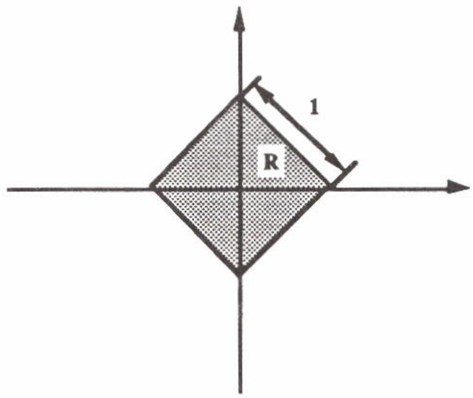
d'on

$$P(I) = 2\frac{1}{\pi b}\iint_{R_1} dx d\phi = \frac{2}{\pi b}\int_0^{\pi/2} d\phi \int_0^{a\cos\phi} dx = \frac{2a}{\pi b}\int_0^{\pi/2} \cos\phi d\phi = \frac{2a}{\pi b}.$$

Observació: El resultat proporciona un mètode per trobar valors aproximats del nombre π. Prenem una agulla de llargada 1 i posem les línies separades per una distància 2. Si repetim n vegades l'experiència i contem el nombre de vegades, n', que l'agulla trepitja alguna línia, aleshores $\frac{n'}{n}$ prendrà un valor aproximat a $P(I) = \frac{1}{\pi}$.

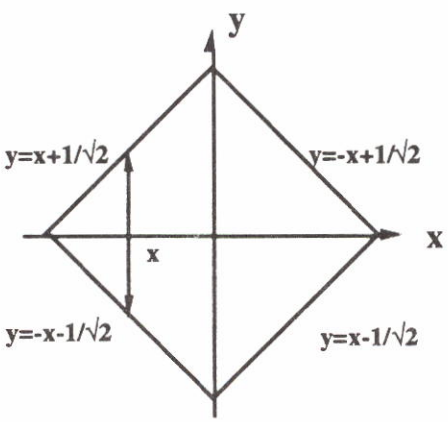
6. Sigui (X,Y) una variable aleatòria amb funció de densitat conjunta

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 1, & (x,y) \in R \\ 0, & \text{altrament} \end{cases} .$$

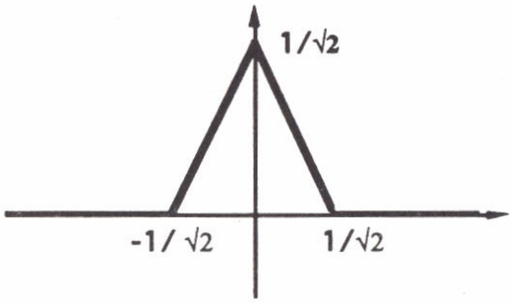


Trobeu la funció de densitat marginal $f_X(x)$.

D'acord amb la figura,



$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \displaystyle\int_{-x-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{x+\frac{1}{\sqrt{2}}} dy = 2x + \sqrt{2}, & -\frac{1}{\sqrt{2}} \le x \le 0 \\ \displaystyle\int_{x-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{-x+\frac{1}{\sqrt{2}}} dy = -2x + \sqrt{2}, & 0 \le x \le \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0, & x > \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$



La funció $f_X(x)$.

7. La vida mitjana d'una bombeta és de dos mesos. L'instant X en què es fon ve donat per una variable aleatòria exponencial. El dia 1 de cada mes es canvien les dues bombetes d'un llum (encara que no estiguin foses). Trobeu

(a) Probabilitat de trobar les dues bombetes foses el dia 1 del mes següent.

(b) Probabilitat que l'esdeveniment anterior no passi cap vegada en un any.

(c) Quina diferència hi hauria en els casos (a) i (b) si només es canvien les bombetes que estan foses?

Nota: considereu tots els mesos de la mateixa duració.

(a) La variable aleatòria X té per funció densitat

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \; x \geq 0$$

on λ s'obté de

$$2 = E(X) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda},$$

d'on $\lambda = 1/2$.
Diem $B_i = \{$la bombeta i s'ha fos abans d'un mes $\}$. Aleshores,

$$P(B_i) = P(X \leq 1) = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-\frac{1}{2}x} dx = 1 - e^{-\frac{1}{2}} \simeq 0.393 \;, \; i = 1, 2.$$

Com que B_1 i B_2 són esdeveniments independents,

$$P(B_1 \cap B_2) = P(B_1)P(B_2) = p \simeq 0.155.$$

(b) La probabilitat de no quedar-se a les fosques en un període de 12 mesos és

$$(1-p)^{12} \simeq 0.133.$$

(c) Si només es canvien les bombetes foses, la probabilitat que es fongui una bombeta en un mes si no estava fosa el dia 1 és

$$\begin{aligned} P(X \leq k | X > k-1) &= \frac{P(k-1 < X \leq k)}{P(X > k-1)} = \\ &= \frac{\frac{1}{2}\int_{k-1}^{k} e^{-\frac{1}{2}x} dx}{\frac{1}{2}\int_{k-1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x} dx} = \frac{e^{-\frac{k-1}{2}} - e^{-\frac{k}{2}}}{e^{-\frac{k-1}{2}}} = \\ &= 1 - e^{-\frac{1}{2}} = P(X \leq 1); \end{aligned}$$

de manera que la solució és la mateixa que amb el procediment anterior (la igualtat en aquesta darrera expressió és el que vol dir que la variable aleatòria exponencial no té memòria).

8. Sigui $u(t)$ la funció esglaó unitat, $u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$. Proveu que si X i Y són dues variables aleatòries que satisfan,

$$E\left[u(X-a)u(Y-b)\right] = E\left[u(X-a)\right] E\left[u(Y-b)\right],$$

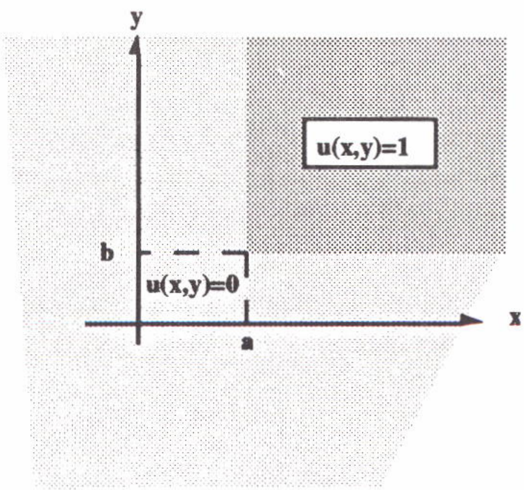
per a qualssevols $a, b \in \mathbf{R}$, aleshores X i Y són independents.

Tenim

$$u(x-a) = \begin{cases} 1, & x > a \\ 0, & x \leq a \end{cases} \text{ i } u(x-b) = \begin{cases} 1, & x > b \\ 0, & x \leq b \end{cases},$$

de manera que

$$z(x,y) = u(x-a)u(y-b) = \begin{cases} 1, & x > a, y > b \\ 0, & \text{altrament} \end{cases}.$$



$Z = z(X,Y)$ és per tant una variable aleatòria discreta amb $E(Z) = P(Z = 1)$. D'aquí,

$$\begin{aligned} E\left[u(X-a)u(Y-b)\right] &= E(Z) = \\ &= P(X > a, Y > b) = 1 - P(\{X \leq a\} \cup \{X \leq b\}) = \\ &= 1 - [P(X \leq a) + P(Y \leq b) - P(X \leq, Y \leq b)] = \\ &= 1 - F_X(a) - F_Y(b) + F_{XY}(a,b), \end{aligned}$$

mentre que

$$\begin{aligned} E\left[u(X-a)\right] &= P(X > a) = 1 - F_X(a) \\ E\left[u(X-b)\right] &= P(X > b) = 1 - F_X(b). \end{aligned}$$

Per tant, la igualtat de dalt implica

$$\begin{aligned} &1 - F_X(a) - F_Y(b) + F_{XY}(a,b) = \\ &\quad = (1 - F_X(a))(1 - F_Y(b)) = 1 - F_X(a) - F_Y(b) + F_X(a)F_Y(b) \quad \forall a, b \in \mathbf{R}, \end{aligned}$$

i X i Y són independents.

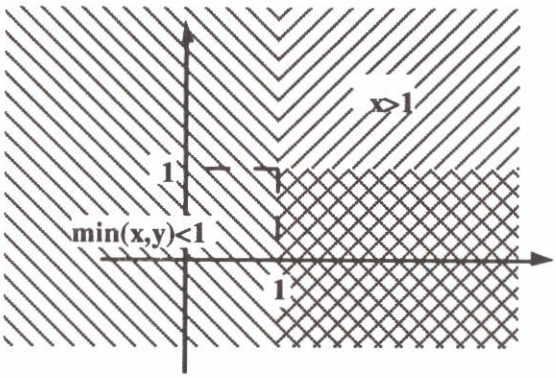
9. Si X i Y són variables aleatòries independents i exponencials de paràmetre $\lambda = 1$, quina és la probabilitat de $\{X \geq 1\}$ si $\min(X,Y) \leq 1$?

Tenim
$$P(X \geq 1 | \min(X,Y) \leq 1) = \frac{P(X \geq 1, \min(X,Y) \leq 1)}{P(\min(X,Y) \leq 1)},$$
on

$$\begin{aligned} P(\min(X,Y) \leq 1) &= P(\{X \leq 1\} \cup \{Y \leq 1\}) = \\ &= P(X \leq 1) + P(Y \leq 1) - P(X \leq 1, Y \leq 1) = \\ &= F_X(1) + F_Y(1) - F_{XY}(1,1) \overset{(*)}{=} F_X(1)(2 - F_X(1)). \end{aligned}$$

D'altra banda,
$$P(X \geq 1, \min(X,Y) \leq 1) = P(Y \leq 1) - P(X \leq 1, Y \leq 1) =$$
$$= F_Y(1) - F_{XY}(1,1) \overset{(*)}{=} F_X(1)(1 - F_X(1)).$$

A les igualtats $\overset{(*)}{=}$ es fa servir que X i Y tenen la mateixa distribució i són independents.



Per tant,
$$P(X \geq 1 | \min(X,Y) \leq 1) = \frac{F_X(1)(2 - F_X(1))}{F_X(1)(1 - F_X(1))} = \frac{e^{-1}}{1 - e^{-1}} = \frac{1}{1+e} \simeq 0.27\,.$$

10. Tenim una successió de variables aleatòries de Bernouilli $\ldots, X_{i-1}, X_i, X_{i+1}, \ldots$ que satisfan

$$P(X_{i+1} = 0|X_{i-1} = 0, X_i = 0) = 4P(X_{i+1} = 1|X_{i-1} = 0, X_i = 0);$$

i també les relacions següents (abreujant la notació)

$$P(0|01) = P(1|01), \quad P(0|10) = P(1|10), \quad 4P(0|11) = P(1|11).$$

Sabent que la probabilitat $P(X_{i-1} = \alpha, X_i = \beta)$ només depèn de α i β però no de i, quina és la probabilitat $P(00)$ que apareguin dos zeros seguits.

Per a cada parell $\alpha, \beta \in \{0, 1\}$ tenim

$$P(1|\alpha\beta) + P(0|\alpha\beta) = 1,$$

d'on

$$\begin{aligned}
P(0|00) = 4P(1|00) \quad &\Rightarrow \quad P(0|00) = \frac{4}{5}, \; P(1|00) = \frac{1}{5} \\
P(0|01) = P(1|01) \quad &\Rightarrow \quad P(0|01) = P(1|01) = \frac{1}{2} \\
P(0|10) = P(1|10) \quad &\Rightarrow \quad P(0|10) = P(1|10) = \frac{1}{2} \\
4P(0|11) = P(1|11) \quad &\Rightarrow \quad P(0|11) = \frac{1}{5}, \; P(1|11) = \frac{4}{5}.
\end{aligned}$$

Fent servir la fórmula de la probabilitat total,

$$\begin{aligned}
P(00) &= P(0|00)P(00) + P(0|10)P(10) = 0,8P(00) + 0,5P(10) && (1) \\
P(01) &= P(1|00)P(00) + P(1|10)P(10) = 0,2P(00) + 0,5P(10) && (2) \\
P(10) &= P(0|01)P(01) + P(0|11)P(11) = 0,5P(01) + 0,2P(11) && (3) \\
P(11) &= P(1|01)P(01) + P(1|11)P(11) = 0,5P(01) + 0,8P(11) && (4)
\end{aligned}$$

D'aquestes quatre equacions n'hi ha només tres de linealment independents que juntament amb

$$P(00) + P(01) + P(10) + P(11) = 1$$

formen un sistema lineal del qual s'obté

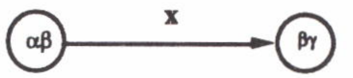
$$P(10) = P(01) = \frac{1}{7}$$

$$P(00) = P(11) = \frac{5}{2}P(10) = \frac{5}{14}.$$

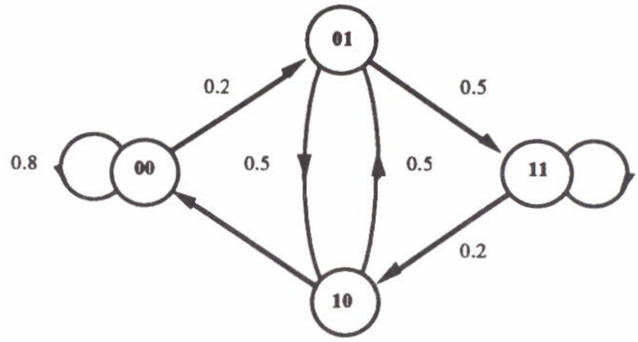
En aquest problema podem representar gràficament les probabilitats

$$P(\gamma|\alpha\beta) = x, \;\; \alpha, \beta, \gamma \in \{0, 1\}$$

en l'esquema



de manera que el problema es pot expressar gràficament amb el diagrama



Aquest s'anomena *diagrama de transicions*; cada node correspon a un *estat* i les probabilitats de pas d'un estat a un altre s'anomenen *probabilitats de transició*. Aquesta terminologia prové de la teoria de les *cadenes de Markov* que estudia seqüències d'estats aleatoris en els quals la probabilitat de cada estat depèn de l'anterior. Amb l'ajuda del diagrama es poden interpretar les equacions anteriors en termes de la condició d'equilibri

$$\text{flux entrant al node } \alpha\beta = \text{ flux sortint del node } \alpha\beta.$$

D'aquí es dedueix també que cada una de les equacions (1)(2)(3) i (4) s'obté sumant les altres tres, de manera que n'hi ha una de redundant.

11. Es tira repetidament una moneda amb probabilitat de cara p. Diem X_n a la variable aleatòria que conta el nombre de tirades fins que surt cara per n-èsima vegada. Quina és l'esperança de X_n?

Diem Y_k al nombre de tirades entre la $(k-1)$-èsima cara i la k-èsima cara. Aleshores,

$$X_1 = Y_1$$

i

$$X_n = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n;$$

de manera que

$$E(X_n) = E(Y_1) + E(Y_2) + \ldots + E(Y_n).$$

Tenim $X_1 = Y_1$ i, a més, les variables aleatòries Y_k, $k = 1, 2, \ldots$ tenen la mateixa distribució geomètrica de paràmetre p. Així,

$$E(Y_k) = E(Y_1) = E(X_1) = \frac{1}{p},$$

i, per tant,

$$E(X_n) = \frac{n}{p}.$$

12. Es tiren 10 daus. Quin és el nombre mitjà de cares diferents que surten?

Diem I_k a la variable indicadora de l'esdeveniment {en 10 tirades la cara k ha sortit almenys una vegada}.

Per la simetria del dau, totes les variables $I_k, 1 \le k \le 6$, tenen la mateixa distribució

$$P(I_k = 0) = \left(\frac{5}{6}\right)^{10} \text{ i } P(I_k = 1) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{10}$$

i

$$E(I_k) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{10}.$$

El nombre de cares diferents que apareixen és aleshores

$$N = I_1 + I_2 + \ldots + I_6,$$

i, per tant,

$$E(N) = E(I_1) + E(I_2) + \ldots + E(I_6) = 6E(I_1) = 6\left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{10}\right) \simeq 5.03$$

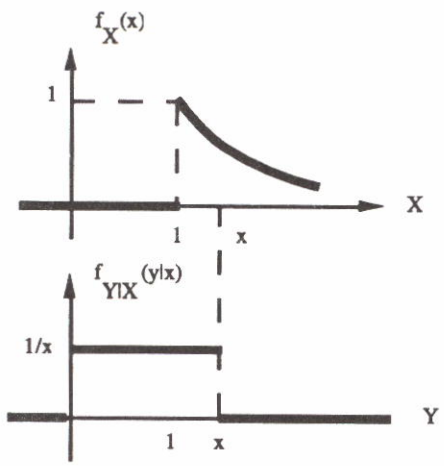
13. Sigui X una variable aleatòria amb funció densitat

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}, & x \geq 1 \\ 0, & x < 1. \end{cases}$$

Per a cada valor x que pren la variable aleatòria X es considera la variable aleatòria Y amb distribució uniforme a l'interval $[0, x]$. Quines són les funcions de distribució i de densitat de Y?

D'acord amb l'enunciat del problema, per a cada x:

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & 0 < y < x \\ 0, & \text{altrament} \end{cases} .$$



Fent servir el teorema de la probabilitat total per al cas continu,

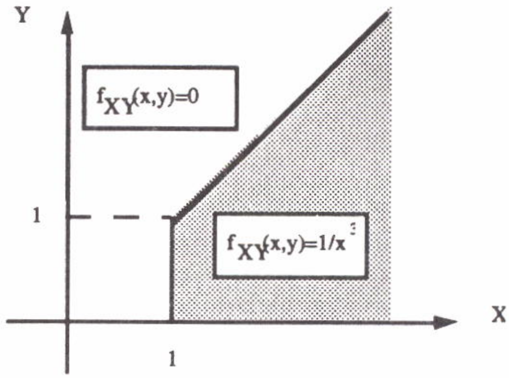
$$f_{XY}(x, y) = f_{Y|X}(y|x) f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^3}, & x \in R_1 \\ 0, & x \in R_2 \end{cases} .$$

Finalment

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{Y|X}(y|x) f_X(x)\, dx = \\ &= \begin{cases} 0, & y < 0 \\ \int_1^{\infty} \frac{1}{x^3} dx = \frac{1}{2}, & 0 \leq y \leq 1 \\ \int_y^{\infty} \frac{1}{x^3} dx = \frac{1}{y^2}, & y > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Pel que fa a la funció de distribució de Y,

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(u)du = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ \int_0^y \frac{1}{2}du = \frac{y}{2}, & 0 \leq y \leq 1 \\ \frac{1}{2} + \int_1^y \frac{1}{2u^2}du = 1 - \frac{1}{2y}, & y > 1. \end{cases}$$



14. Siguin X_1 i X_2 variables aleatòries de Bernouilli independents i tals que $P(X_i = 0) = P(X_i = 1), i = 1, 2$. Siguin Y_1 i Y_2 dues altres variables de Bernouilli independents del parell anterior i definim $Z_1 = X_1 \oplus Y_1$ i $Z_2 = X_2 \oplus Y_2$, on $\oplus$ denota la suma mòdul 2. Proveu que Z_1 i Z_2 són dues variables aleatories de Bernouilli independents igualment distribuides amb $P(Z_i = 1) = 1/2$.

Les variables Z_1 i Z_2 només prenen els valors 0 i 1, de manera que són variables de Bernouilli. Tenim

$$\begin{aligned} P_{Z_1}(0) &= P(Z_1 = 0) = P((\{X_1 = 0\} \cap \{Y_1 = 0\}) \cup (\{X_1 = 1\} \cap \{Y_1 = 1\})) = \\ &= P(X_1 = 0)P(Y_1 = 0) + P(X_1 = 1)P(Y_1 = 1) = \\ &= \frac{1}{2}(P(Y_1 = 0) + P(Y_1) = 1) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Per tant, $P_{Z_1}(1) = 1 - P_{Z_1}(0) = 1/2$. De forma similar s'obté també $P_{Z_2}(0) = P_{Z_2}(1) = 1/2$.

Per veure que Z_1 i Z_2 són independents calculem la funció de probabilitat conjunta de les dues variables,

$$\begin{aligned} P_{Z_1Z_2}(\alpha, \beta) &= P(X_1 \oplus Y_1 = \alpha, X_2 \oplus Y_2 = \beta) = \\ &= \sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1} P_{X_1X_2Y_1Y_2}(i, j, i \oplus \alpha, i \oplus \beta) = \\ &= \sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1} P_{X_1X_2}(i, j)P_{Y_1Y_2}(i \oplus \alpha, j \oplus \beta) = \\ &= \frac{1}{4}\sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1} P_{Y_1Y_2}(i \oplus \alpha, j \oplus \beta) = \frac{1}{4} = \\ &= P_{Z_1}(\alpha)P_{Z_2}(\beta). \end{aligned}$$

Observació: Noteu que el resultat no depèn del valor de $P(Y_i = 0)$.

15. Siguin X, Y variables aleatòries de Poisson independents de paràmetres λ_x i λ_y respectivament. Quina és la funció de probabilitat de $X + Y$?

Tenim

$$P_Z(k) = P(X + Y = k) = \sum_{h=0}^{k} P_{XY}(h, k-h) = \sum_{h=0}^{k} P_X(h) P_Y(k-h) = P_X(k) * P_Y(k).$$

Substituint al sumatori els valors de la probabilitat per a variables aleatòries de Poisson,

$$\begin{aligned} P_Z(k) &= \sum_{h=0}^{k} e^{-\lambda_x} \frac{\lambda_x^h}{h!} e^{-\lambda_y} \frac{\lambda_y^{k-h}}{(k-h)!} = \\ &= \frac{e^{-(\lambda_x+\lambda_y)}}{k!} \sum_{h=0}^{k} \binom{k}{h} \lambda_x^h \lambda_y^{k-h} = \\ &= e^{-(\lambda_x+\lambda_y)} \frac{(\lambda_x + \lambda_y)^k}{k!}. \end{aligned}$$

Per tant, doncs, $Z = X + Y$ segueix una llei de Poisson de paràmetre $\lambda = \lambda_x + \lambda_y$.

16. Siguin X i Y variables aleatòries independents que segueixen lleis exponencials de paràmetres a i b respectivament. Considerem la variable aleatòria

$$Z = \begin{cases} X - Y, & X \geq Y \\ 0, & X < Y \end{cases}.$$

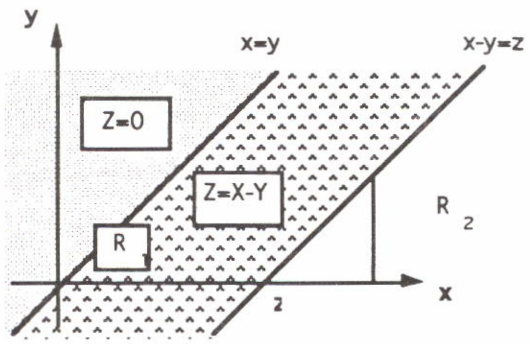
Quina és la funció de distribució de Z?

La funció de distribució de Z és

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ P(X - Y \leq z), & z \geq 0 \end{cases},$$

on , per a $z \geq 0$,

$$\begin{aligned} P(X - Y \leq z) &= 1 - P(X - Y > z) = 1 - \iint_{R_2} f_{XY}(x, y)\, dx dy = \\ &= 1 - \iint_{R_2} f_X(x) f_Y(y)\, dx dy = \\ &= 1 - \int_z^{\infty} a e^{-ax} \left(\int_0^{x-z} b e^{-by} dy \right) dx = \\ &= 1 - e^{-az} \frac{b}{a+b}. \end{aligned}$$



D'on

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ 1 - \frac{be^{-az}}{a+b}, & z \geq 0 \end{cases}.$$

Observeu que F_Z té una discontinuïtat de salt a $z = 0$ de manera que

$$P(Z = 0) = F_Z(0^+) - F_Z(0^-) = \frac{a}{a+b}.$$

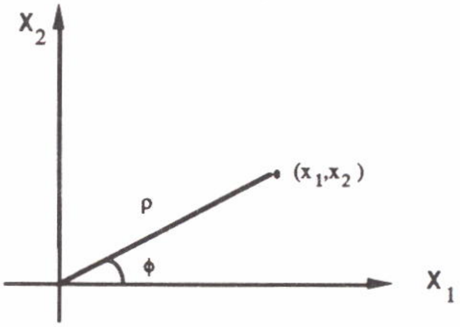
17. Siguin X_1 i X_2 dues variables aleatòries gaussianes independents de mitjana 0 i variància σ^2. Quina és la funció de densitat de $P = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$?

Indicació: feu servir coordenades polars.

D'acord amb la indicació, diem

$$(\rho, \phi) = g(x_1, x_2) = (\sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \arctan \frac{x_2}{x_1}),$$

on prenem la determinació usual de l'arctangent.



Si

$$(P, \Phi) = g(X_1, X_2),$$

es tractarà de buscar la densitat marginal

$$f_P(\rho) = \int_0^{2\pi} f_{P\Phi}(\rho, \phi) d\phi.$$

La densitat conjunta de P i Φ es pot obtenir de la de X_1 i X_2 fent

$$f_{P\Phi}(\rho, \phi) = f_{X_1 X_2}(g^{-1}(\rho, \phi)) |J(g^{-1}(\rho, \phi))|,$$

on $g^{-1}(\rho, \phi) = (\rho \cos \phi, \rho \sin \phi) = (x_1, x_2)$ i el seu jacobià és $J(g^{-1}(\rho, \phi)) = \rho$, mentre que

$$\begin{aligned} f_{X_1 X_2}(x_1, x_2) &= f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1}{\sigma}\right)^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_2}{\sigma}\right)^2} = \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{1}{2}\frac{x_1^2 + x_2^2}{\sigma^2}}, \end{aligned}$$

de manera que

$$f_{P\Phi}(\rho,\phi)=\frac{\rho}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\rho}{\sigma}\right)^2},\quad \rho>0,\ 0\leq\phi\leq 2\pi.$$

D'aquí,

$$\begin{aligned} f_P(\rho) &= \int_0^{2\pi} f_{P\Phi}(\rho,\phi)d\phi=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\rho}{\sigma}\right)^2}\rho\, d\rho= \\ &= \frac{\rho}{\sigma^2}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\rho}{\sigma}\right)^2},\ \rho\geq 0, \end{aligned}$$

i $f_P(\rho)=0$ si $\rho<0$. Aquesta funció densitat rep el nom de *Rayleigh* de paràmetre σ.

18. Si X i Y són variables aleatòries gaussianes incorrelades de valor mitjà 0 i variància σ^2, proveu que les variables $P = \sqrt{X^2 + Y^2}$ i $\Phi = \arctan \frac{Y}{X}$ són independents.

Tal i com s'ha fet al problema anterior,

$$\begin{aligned} f_{P\Phi}(\rho, \phi) &= \rho f_{XY}(\rho\cos\phi, \rho\sin\phi) = \rho f_X(\rho\cos\phi) f_Y(\rho\sin\phi) = \\ &= \rho \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{1}{2}\frac{\rho^2\cos^2\phi + \rho^2\sin^2\phi}{\sigma^2}} = \rho \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\rho}{\sigma}\right)^2} \quad \text{si } \rho \geq 0, 0 \leq \phi < 2\pi \end{aligned}$$

D'altra banda, d'acord també amb el problema anterior,

$$f_P(\rho) = \frac{\rho}{\sigma^2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\rho}{\sigma}\right)^2}, \quad \rho \geq 0.$$

mentre que

$$f_\Phi(\phi) = \int_0^\infty f_{P\Phi}(\rho, \phi)\, d\rho = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty f_P(\rho)\, d\rho = \frac{1}{2\pi}, \quad 0 \leq \phi < 2\pi,$$

de manera que $f_{P\Phi}(\rho, \phi) = f_P(\rho) f_\Phi(\phi)$ i les dues variables aleatòries són independents.

19. Siguin X_1 i X_2 dues variables aleatòries independents. Proveu que, aleshores, $Y_1 = f_1(X_1)$ i $Y_2 = f_2(X_2)$, on f_1 i f_2 són dues funcions contínues, són també independents.

Com que la σ-àlgebra de Borel que es considera a $\mathbf{R}^2$ és la generada pels subconjunts de la forma $I_1 \times I_2$, on I_1 i I_2 són intervals oberts de la recta real, n'hi ha prou amb veure que

$$P(Y_1 \in I_1, Y_2 \in I_2) = P(Y_1 \in I_1)P(Y_2 \in I_2),$$

per a qualssevol intervals I_1, I_2.

Com que X_1 i X_2 són independents,

$$\begin{aligned} P(Y_1 \in I_1, Y_2 \in I_2) &= P(X_1 \in f_1^{-1}(I_1), X_2 \in f_2^{-1}(I_2)) = \\ &= P(X_1 \in f_1^{-1}(I_1))P(X_2 \in f_2^{-1}(I_2)) = P(Y_1 \in I_1)P(Y_2 \in I_2). \end{aligned}$$

on $f_i^{-1}(I_i) = \{x \in \mathbf{R} : f_i(x) \in I_i\}$.

De fet n'hi ha prou que les funcions f_i siguin mesurables perquè el resultat sigui cert. En el cas que f_1 i f_2 siguin bijectives i diferenciables i les variables aleatòries X_1 i X_2 siguin contínues, podeu provar també l'enunciat escrivint $(Y_1, Y_2) = (f_1(X_1), f_2(X_2))$, d'on

$$\begin{aligned} f_{Y_1Y_2}(y_1, y_2) &= f_{X_1X_2}(x_1, x_2)\frac{1}{\left| det \begin{pmatrix} f_1'(x_1) & 0 \\ 0 & f_2'(x_2) \end{pmatrix} \right|} = \\ &= \frac{f_{X_1}(x_1)}{|f_1'(x_1)|}\frac{f_2(x_2)}{|f_2'(x_2)|} = f_{Y_1}(y_1)f_{Y_2}(y_2). \end{aligned}$$

20. **Considereu les variables aleatories contínues X_1, X_2, X_3 independents. Proveu que $X_1 + X_2$ i X_3 són independents.**

Diem $Y_1 = X_1 + X_2$, $Y_2 = X_2$ i $Y_3 = X_3$. Es tracta de veure que Y_1 i Y_3 són independents. Si

$$g(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2, x_3),$$

tenim

$$(Y_1, Y_2, Y_3) = g(X_1, X_2, X_3),$$

d'on

$$\begin{aligned} f_{Y_1Y_2Y_3}(y_1, y_2, y_3) &= f_{X_1X_2X_3}(y_1 - y_2, y_2, y_3)\left| det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \\ &= f_{X_1}(y_1 - y_2) f_{X_2}(y_2) f_{X_3}(y_3). \end{aligned}$$

D'aquí podem obtenir la funció densitat conjunta de Y_1 i Y_3,

$$\begin{aligned} f_{Y_1Y_3}(y_1, y_3) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{Y_1Y_2Y_3}(y_1, y_2, y_3)\, dy_2 = \\ &= f_{X_3}(y_3) \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(y_1 - y_2) f_{X_2}(y_2)\, dy_2 = f_{Y_3}(y_3) \left[f_{X_1}(y_1) * f_{X_2}(y_1) \right] = \\ &= f_{Y_3}(y_3) f_{X_1+X_2}(y_1) = f_{Y_3}(y_3) f_{Y_1}(y_1) \end{aligned}$$

21. Siguin X_1 i X_2 dues variables aleatòries gaussianes independents i normalitzades. Proveu que $Y_1 = X_1 + X_2$ i $Y_2 = X_1 - X_2$ són independents.

Diem $g(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2)$. Aleshores,

$$(Y_1, Y_2) = g(X_1, X_2).$$

El valor absolut del jacobià de g^{-1} és

$$|J(g^{-1}(y_1, y_2))| = \left| det \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \right| = 1/2$$

de manera que

$$\begin{aligned}
f_{Y_1Y_2}(y_1, y_2) &= \frac{1}{2} f_{X_1X_2}(\frac{1}{2}(y_1 + y_2), \frac{1}{2}(y_1 - y_2)) = \\
&= \frac{1}{2} f_{X_1}(\frac{1}{2}(y_1 + y_2)) f_{X_2}(\frac{1}{2}(y_1 - y_2)) = \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_1-y_2}{2}\right)^2\right]} = \\
&= \frac{1}{4\pi} e^{-\frac{1}{4}y_1^2} e^{-\frac{1}{4}y_2^2} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y_1}{\sqrt{2}}\right)^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y_2}{\sqrt{2}}\right)^2} = \\
&= f_{Y_1}(y_1) f_{Y_2}(y_2).
\end{aligned}$$

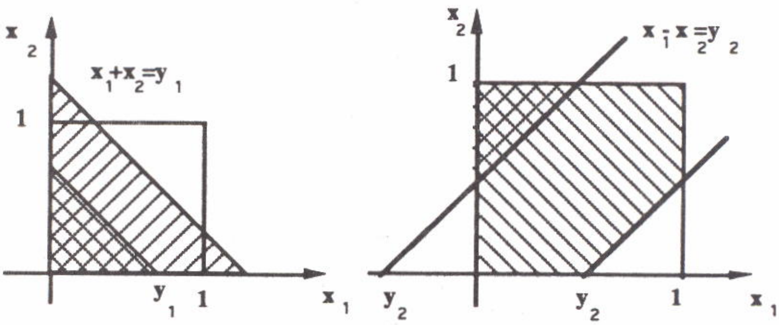
Una manera més senzilla de veure el resultat aprofitant propietats de les variables aleatòries gaussianes és la següent. Pel fet de ser X_1 i X_2 variables aleatòries gaussianes independents, Y_1 i Y_2 també són gaussianes. A més, $E(Y_i) = 0$ i $Var(Y_i) = 2$. Per tant, per veure que són independents n'hi ha prou amb veure que són incorrelades, és a dir,

$$\begin{aligned}
Cov(Y_1, Y_2) &= E(Y_1Y_2) - E(Y_1)E(Y_2) = E\left[(X_1 + X_2)(X_1 - X_2)\right] \\
&= E(X_1^2) - E(X_2^2) = 0.
\end{aligned}$$

22. Sigui X_1 i X_2 dues variables aleatòries independents amb distribució uniforme a $[0,1]$. Quines són les funcions de distribució i de densitat de les variables $Y_1 = X_1 + X_2$ i $Y_2 = X_1 - X_2$? Són independents?

Tenim

$$F_{Y_1}(y_1) = P(X_1 + X_2 \le y_1) = \begin{cases} 0, & y_1 < 0 \\ \frac{y_1^2}{2}, & 0 \le y_1 \le 1 \\ 1 - \frac{(2-y_1)^2}{2}, & 1 < y_1 \le 2 \\ 1, & 2 < y_1 \end{cases}$$

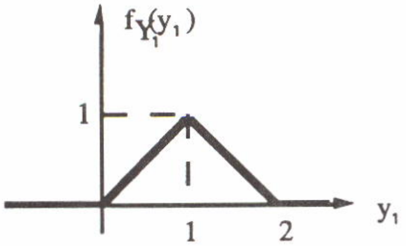


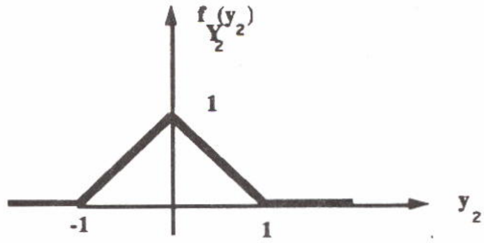
i

$$f_{Y_1}(y_1) = \begin{cases} 0, & y_1 < 0 \\ y_1, & 0 \le y_1 \le 1 \\ 2 - y_1, & 1 < y_1 \le 2 \\ 0, & 2 < y_1 \end{cases}$$

D'altra banda,

$$F_{Y_2}(y_2) = P(X_1 - X_2 \le y_2) = \begin{cases} 0, & y_2 < -1 \\ \frac{(1+y_2)^2}{2}, & -1 \le y_2 \le 0 \\ 1 - \frac{(1-y_2)^2}{2}, & 0 < y_2 \le 1 \\ 1, & 1 < y_1 \end{cases}$$



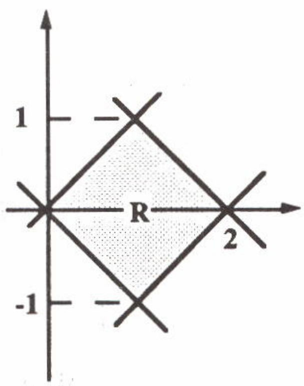


mentre que

$$f_{Y_2}(y_2) = \begin{cases} 0, & y_2 < -1 \\ 1 + y_2, & -1 \leq y_2 \leq 0 \\ 1 - y_2, & 0 < y_2 \leq 1 \\ 0, & 1 < y_2 \end{cases}$$

Finalment, la distribució conjunta de Y_1 i Y_2 és

$$\begin{aligned} f_{Y_1Y_2}(y_1, y_2) &= f_{X_1X_2}\left(\frac{y_1+y_2}{2}, \frac{y_1-y_2}{2}\right) \left| det \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \right| = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2}, & (y_1, y_2) \in R \\ 0, & \text{altrament} \end{cases} \end{aligned}$$



que no coincideix amb $f_{Y_1}(y_1) f_{Y_2}(y_2)$, de manera que Y_1 i Y_2 no són independents.

23. Considereu les variables aleatòries X_1 i X_2 amb funció de densitat conjunta

$$f_{X_1X_2}(x_1,x_2)=\frac{1}{\sqrt{2}\pi}e^{-(x_1^2-\sqrt{2}x_1x_2+x_2^2)}.$$

Definim les variables $Y_1=aX_1+X_2$ i $Y_2=X_1$. Determineu el valor de a per tal que Y_1 i Y_2 siguin independents.

Diem $(y_1,y_2)=g(x_1,x_2)=(ax_1+x_2,x_1)$ de manera que $g^{-1}(y_1,y_2)=(y_2,y_1-ay_2)$ i

$$|J(g^{-1}(y_1,y_2))|=\left|det\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -a\end{pmatrix}\right|=1.$$

Aleshores,

$$\begin{aligned}f_{Y_1Y_2}(y_1,y_2) &= f_{X_1X_2}(y_2,y_1-ay_2)=\frac{1}{\sqrt{2}\pi}e^{-(y_2^2-\sqrt{2}y_2(y_1-ay_2)+(y_1-ay_2)^2)}=\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}\pi}e^{-(y_1^2-(\sqrt{2}+2a)y_1y_2+(1+\sqrt{2}a+a^2)y_2^2)}.\end{aligned}$$

Així doncs, Y_1 i Y_2 només poden ser independents si $\sqrt{2}+2a=0$, és a dir, $a=-\frac{1}{\sqrt{2}}$, en el qual cas es comprova fàcilment que $f_{Y_1Y_2}(y_1,y_2)=f_{Y_1}(y_1)f_{Y_2}(y_2)$.

24. Siguin $X \sim N(0,\sigma_x)$ i $Y \sim N(0,\sigma_y)$ dues variables aleatòries gaussianes independents. Fent servir el teorema de convolució, proveu que $Z = X + Y$ és una variable aleatòria gaussiana $N(0,\sigma)$, on $\sigma^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$.

A partir d'aquest resultat proveu que si $X \sim N(m_x, \sigma_x)$ i $Y \sim N(m_y, \sigma_y)$ són independents, aleshores $Z = X + Y \sim N(m_x + m_y, \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2})$.

Fent servir el teorema de convolució, si $Z = X + Y$,

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= f_X(z) * f_Y(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-t) f_Y(t)\, dt = \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{z-t}{\sigma_x}\right)^2 + \left(\frac{t}{\sigma_y}\right)^2\right]} dt. \end{aligned}$$

Per tal de calcular aquesta integral completem quadrats a l'exponent,

$$\begin{aligned} &\left(\frac{z-t}{\sigma_x}\right)^2 + \left(\frac{t}{\sigma_y}\right)^2 = \\ &= \frac{(t\sigma)^2 - 2tz\sigma_y^2 + (z\sigma_y)^2}{(\sigma_x\sigma_y)^2} = \\ &= \frac{\left(t\sigma - z\frac{\sigma_y^2}{\sigma}\right)^2 - z^2\left(\frac{\sigma_y^2}{\sigma}\right)^2 + (z\sigma_y)^2}{(\sigma_x\sigma_y)^2} = \\ &= \left(t\frac{\sigma}{\sigma_x\sigma_y} - z\frac{\sigma_y}{\sigma\sigma_x}\right)^2 + \left(\frac{z}{\sigma}\right)^2 \end{aligned}$$

que permet escriure la integral de la forma

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z}{\sigma}\right)^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(t\frac{\sigma}{\sigma_x\sigma_y} - z\frac{\sigma_y}{\sigma\sigma_x}\right)^2} \left(\frac{\sigma}{\sigma_x\sigma_y}\right) dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z}{\sigma}\right)^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}u^2} du = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z}{\sigma}\right)^2} \end{aligned}$$

que correspon a la funció de densitat d'una variable aleatòria normal de valor mitjà 0 i variància σ^2.

En general, si X i Y tenen mitjanes m_x i m_y respectivament, les variables

$$X' = X - m_x$$

i

$$Y' = Y - m_y$$

són gaussianes independents amb mitjana zero, i , d'acord amb el que acabem de veure,

$$Z' = X' + Y'$$

és una variable aleatòria gaussiana $N(0, \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2})$. Així doncs, $Z = Z' + (m_x + m_y)$ de manera que

$$f_Z(z) = f_{Z'}(z - (m_x + m_y)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-(m_x+m_y)}{\sigma}\right)^2}$$

que correspon a una variable aleatòria gaussiana de mitjana $m = m_x + m_y$ i variància $\sigma^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$.

25. Sigui $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ una variable aleatòria gaussiana 2-dimensional amb matriu de mitjanes $\begin{pmatrix} m_x \\ m_y \end{pmatrix}$ i matriu de covariàncies $\begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \mu_{11} \\ \mu_{11} & \sigma_y^2 \end{pmatrix}$. Proveu que X condicionada a Y és una variable aleatòria gaussiana de mitjana $m_{X|Y} = m_x + \rho\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - m_y)$ i desviació tipus $\sigma_{X|Y} = \sigma_x\sqrt{1-\rho^2}$, on ρ denota el coeficient de correlació.

Tenim

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}$$

amb

$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}\sigma_x\sigma_y} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}u(x,y)}$$

on

$$u(x,y) = \left[\left(\frac{x-m_x}{\sigma_x}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-m_x}{\sigma_x}\right)\left(\frac{y-m_y}{\sigma_y}\right) + \left(\frac{y-m_y}{\sigma_y}\right)^2\right],$$

i

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-m_y}{\sigma_y}\right)^2}.$$

d'on

$$\begin{aligned} f_{X|Y}(x|y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}\sigma_x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\rho^2}u(x,y) - \left(\frac{y-m_y}{\sigma_y}\right)^2\right)} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}\sigma_x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m_x}{\sigma_x\sqrt{1-\rho^2}} - \frac{y-m_y}{\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}}\rho\right)^2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}\sigma_x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m_x-[(y-m_y)\rho\sigma_x/\sigma_y]}{\sigma_x\sqrt{1-\rho^2}}\right)^2} \end{aligned}$$

que correspon a una variable aleatòria gaussiana de mitjana $m_x + \rho\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - m_y)$ i desviació tipus $\sigma_{X|Y} = \sigma_x\sqrt{1-\rho^2}$.

26. Dues persones s'han citat entre les 10 i les 11 del matí. Arriben a la cita aleatòriament i independent una de l'altra. Quina és la mitjana del temps d'espera del primer que arriba,

a) trobant la funció de densitat de la variable aleatòria que dóna el temps d'espera.

b) fent servir el teorema de l'esperança.

Diem X i Y a les variables aleatòries que donen el temps d'arribada de cada persona. D'acord amb l'enunciat, X i Y són independents i uniformement distribuïdes a l'interval $[10, 11]$ (sense pèrdua de generalitat suposarem que l'interval és $[0, 1]$). Així doncs,

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 1, & 0 < x, y < 1 \\ 0, & \text{altrament} \end{cases} .$$

El temps d'espera de la persona que arriba primer a la cita és

$$T = |X - Y|.$$

a) Calcularem primer la funció de distribució de T.

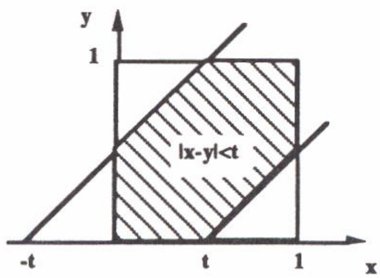
$$\begin{aligned} F_T(t) &= P(|X-Y| \leq t) = P(-t \leq X - Y \leq t) = \\ &= \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1 - 2\frac{(1-t)^2}{2} = 2t - t^2, & 0 \leq t < 1 \\ 1, & t \geq 1 \end{cases} , \end{aligned}$$

d'on

$$f_T(t) = \begin{cases} 2(1-t), & 0 \leq t < 1 \\ 0, & \text{altrament} \end{cases}$$

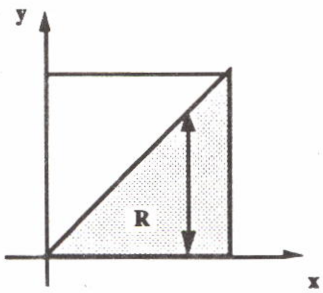
i

$$E(T) = \int_0^1 t f_T(t)\, dt = 2\int_0^1 t(1-t)\, dt = \frac{1}{3}.$$



b) Directament fent servir el teorema de l'esperança:

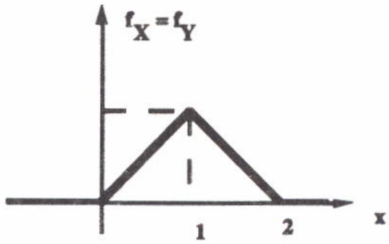
$$
\begin{aligned}
E(T) &= E(|X-Y|) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |x-y| f_{XY}(x,y)\,dxdy = \\
&= \int_0^1\int_0^1 |x-y|\,dxdy = 2\iint_R (x-y)\,dxdy = \\
&= 2\int_0^1 dx \int_0^x (x-y)\,dy = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$



27. Dues persones s'han citat entre les 0 h i les 2 h i arriben a la cita en instants aleatoris X i Y independents i que segueixen una llei amb funció densitat

$$f_X(t) = f_Y(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1 \\ 2-t, & 1 \leq t < 2 \end{cases}.$$

(i $f_X(t) = f_Y(t) = 0$ si $t \notin [0,2]$).

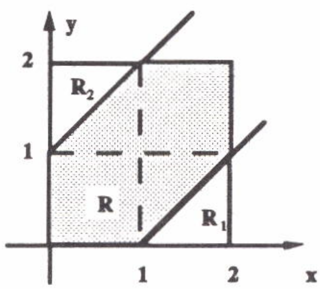


Si la primera que arriba espera durant una hora, quina és la probabilitat que es trobin?

La probabilitat que es trobin és

$$P(|X-Y| \leq 1) = P(-1 \leq X - Y \leq 1) = \int\int_R f_{XY}(x,y)\,dxdy,$$

on R és l'àrea ratllada a la figura



i

$$f_{XY}(x,y)\,dxdy = f_X(x)f_Y(y) = \begin{cases} xy, & x,y \in [0,1) \\ x(2-y), & x \in [0,1),\ y \in [1,2] \\ (2-x)y, & x \in [1,2],\ y \in [0,1) \\ (2-x)(2-y), & x,y \in [1,2] \\ 0, & \text{altrament} \end{cases}$$

Així doncs,

$$\begin{aligned}
P(|X-Y|\le 1) &= \iint_R f_{XY}(x,y)\,dxdy = 1-\iint_{R_1\cup R_2} f_{XY}(x,y)\,dxdy \;= \\
&= 1-2\iint_{R_2} f_{XY}(x,y)\,dxdy = 1-2\int_{x=1}^{2}(2-x)\,dx\int_{y=0}^{x-1} y\,dy = \\
&= 1-\int_1^2 (2-x)(x-1)^2\,dx = \frac{11}{12}.
\end{aligned}$$

28. Siguin $X_1, \ldots X_n$ variables aleatòries independents igualment distribuïdes amb funció densitat f_X i funció distribució F_X. Definim

$$Y_1 = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$$

i

$$Y_2 = \min\{X_1, \ldots, X_n\}.$$

(a) Determineu f_{Y_1} i f_{Y_2} en termes de n, f_X i F_X.

(b) Determineu $E(Y_1)$ si $n = 2$ i X_1, X_2 són exponencials de paràmetre λ.

(c) Determineu $E(Y_2)$ si les X_i's segueixen una llei exponencial de paràmetre λ.

(a) Determinem primer la funció distribució de Y_1,

$$\begin{aligned} F_{Y_1}(y) &= P(Y_1 \leq y) = P(\max\{X_1, \ldots, X_n\} \leq y) = \\ &= P(X_1 \leq y, \ldots, X_n \leq y) = P(X_1 \leq y) \cdot \ldots \cdot P(X_n \leq y) = (F_X(y))^n; \end{aligned}$$

d'on

$$f_{Y_1}(y) = F'_{Y_1}(y) = n(F_X(y))^{n-1} f_X(y).$$

Per al mínim tenim

$$\begin{aligned} F_{Y_2}(y) &= P(Y_2 \leq y) = P(\min\{X_1, \ldots, X_n\} \leq y) = \\ &= P(\{X_1 \leq y\} \cup \ldots \cup \{X_n \leq y\}) = 1 - P(X_1 > y, \ldots, X_n > y) = \\ &= 1 - (P(X_1 > y))^n = 1 - (1 - F_X(y))^n; \end{aligned}$$

d'on

$$f_{Y_2}(y) = -n(1 - F_X(y))^{n-1}(-f_X(y)) = n f_X(y)(1 - F_X(y))^{n-1}.$$

(b) Si les X_i segueixen una llei exponencial,

$$f_{Y_1}(y) = 2F_X(y) f_X(y) = \begin{cases} 2(1 - e^{-\lambda y})\lambda e^{-\lambda y}, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases},$$

de manera que

$$\begin{aligned} E(Y_1) &= 2\int_0^\infty y(1 - e^{-\lambda y})\lambda e^{-\lambda y}\, dy = \\ &= 2\int_0^\infty y\lambda e^{-\lambda y}\, dy - \int_0^\infty y(2\lambda)e^{-(2\lambda)y}\, dy = \\ &= 2\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2\lambda} = \frac{3}{2\lambda}. \end{aligned}$$

(c) Ara,

$$f_{Y_2}(y) = n\lambda e^{-\lambda y}(e^{-\lambda y})^{n-1} = n\lambda e^{-n\lambda y} \ , y > 0$$

i $f_{Y_2}(y) = 0$ si $y \leq 0$, de manera que Y_2 segueix una llei exponencial de paràmetre $n\lambda$ i

$$E(Y_2) = \frac{1}{n\lambda}.$$

29. Siguin X i Y dues variables aleatòries independents amb distribució exponencial de mitjana $1/\lambda$. Es defineix $U = \max\{X, Y\}$ i $V = \min\{X, Y\}$.

(a) Proveu que U té la mateixa distribució que $X + \frac{1}{2}Y$.

(b) Trobeu la mitjana i la variància de X fent servir l'apartat anterior.

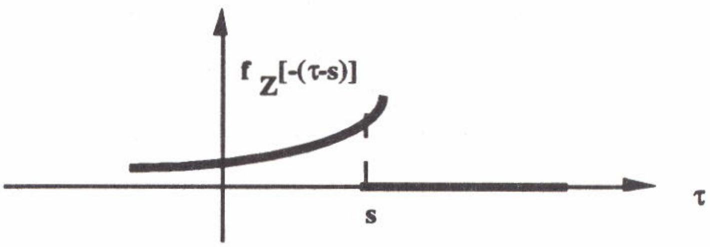
(c) Trobeu les funcions de densitat i distribució de (U, V).

(d) Determineu si U i V són independents.

(a) D'acord amb el problema anterior,

$$f_U(u) = 2F_X(u)f_X(u) = 2(1 - e^{-\lambda u})\lambda e^{-\lambda u}, \; u > 0.$$

D'altra banda, si $S = X + Z$ on $Z = \frac{1}{2}Y$, la funció densitat de S és, per a $s > 0$,



$$\begin{aligned} f_S(s) &= f_X(s) * f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)f_Z(s-t)\,dt = \\ &= 2\lambda^2 \int_0^s e^{-\lambda t}e^{-2\lambda(s-t)}\,dt = 2\lambda^2 e^{-2\lambda s}\int_0^s e^{\lambda t}\,dt = \\ &= 2\lambda e^{-\lambda s}(1 - e^{-\lambda s}), \end{aligned}$$

mentre que si $s \leq 0$, $f_S(s) = 0$.

(b) Fent servir l'apartat anterior,

$$E(U) = E(X + \frac{1}{2}Y) = E(X) + \frac{1}{2}E(Y) = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{2\lambda} = \frac{3}{2\lambda}.$$

i

$$Var(U) = Var(X + \frac{1}{2}Y) = Var(X) + \frac{1}{4}Var(Y) = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{4}\frac{1}{\lambda^2} = \frac{5}{4\lambda^2}.$$

(c) Tenim

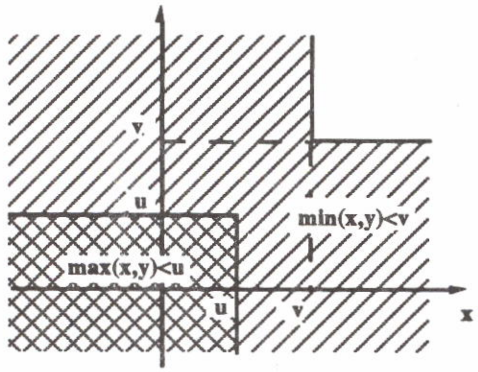
$$F_{UV}(u,v) = P(\max\{X,Y\} \leq u, \min\{X,Y\} \leq v).$$

És clar que per a $u \leq 0$ ó $v \leq 0$, $F_{UV}(u,v) = 0$. Suposem doncs que $u, v > 0$. Si $u \leq v$, aleshores

$$F_{UV}(u,v) = F_{XY}(u,u) = F_X(u)F_Y(u) = (1 - e^{-\lambda u})^2.$$

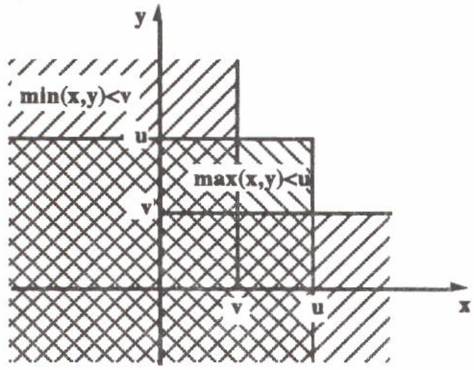
D'altra banda, si $u > v$,

$$\begin{aligned} F_{UV}(u,v) &= F_{XY}(v,u) + F_{XY}(u,v) - F_{XY}(v,v) = \\ &= 2F_X(u)F_X(v) - F_X^2(v) = \\ &= 2(1 - e^{-\lambda u})(1 - e^{-\lambda v}) - (1 - e^{-\lambda v})^2. \end{aligned}$$



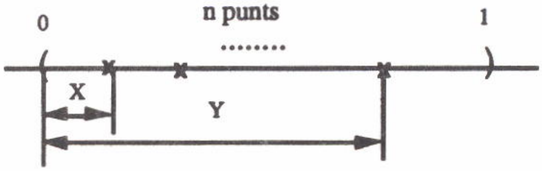
u < v

(d) Està clar que sempre es satisfà $U \geq V$, per tant U i V no són independents. Podeu comprovar que efectivament la funció densitat conjunta no és el producte de funcions densitat (la de U està calculada en aquest problema i la de V a l'apartat (c) del problema anterior).



u > v

30. Es situen aleatòriament i independent n punts a l'interval $(0,1)$. Siguin X i Y les variables aleatòries que donen les distàncies de 0 al primer i al darrer punt respectivament.



Trobeu,

(a) La funció de distribució conjunta F_{XY}.

(b) La funció de densitat conjunta f_{XY}.

(c) La mitjana de la distància entre punts extrems $Z = Y - X$.

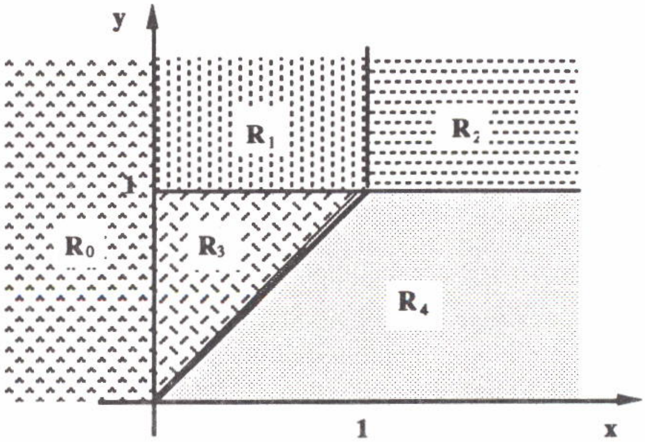
(d) La funció distribució i densitat de Z.

Diem $U_1, \ldots, U_n$ a les variables aleatòries que donen la posició dels n punts. D'acord amb l'enunciat, aquestes variables són independents i uniformement distribuïdes a l'interval $(0,1)$.

(a) Podem escriure

$$F_{XY}(x,y) = P(X \le x, Y \le y) = P(X \le x | Y \le y)P(Y \le y).$$

Si dividim el pla en les cinc regions de la figura,



les probabilitats $P(X \leq x|Y \leq y)$ i $P(Y \leq y)$ es poden calcular fàcilment a cada regió.

- Clarament, a $R_0 = \{(x,y) : x \leq 0, y \leq 0\}$,
$$F_{XY}(x,y) = 0.$$
- A $R_1 = \{(x,y) : 0 < x < 1, y \geq 1\}$ tenim
$$P(Y \leq y) = 1;$$
i
$$P(X \leq x|Y \leq y) = 1 - P(X > x) = 1 - P(\bigcap_{1\leq i\leq n} \{U_i \geq x\}) = 1 - (1-x)^n,$$
de manera que a R_1
$$F_{XY}(x,y) = 1 - (1-x)^n.$$
- A $R_2 = \{(x,y) : x \geq 1, y \geq 1\}$ clarament,
$$F_{XY}(x,y) = 1.$$
- A $R_3 = \{(x,y) : 0 < x \leq y < 1\}$, tenim
$$P(Y \leq y) = P(\bigcap_{1\leq i\leq n} \{U_i \in (0,y]\}) = y^n;$$
i
$$\begin{aligned} P(X \leq x|Y \leq y) &= 1 - P(X > x|Y \leq y) = \\ &= 1 - P(\bigcap_{1\leq i\leq n} \{U_i \in (x,1)\}| \bigcap_{1\leq i\leq n} \{U_i \in (0,y]\}) = \\ &= 1 - \left(\frac{y-x}{y}\right)^n, \end{aligned}$$
de manera que
$$F_{XY}(x,y) = \left[1 - \left(\frac{y-x}{y}\right)^n\right] y^n = y^n - (y-x)^n.$$
- Finalment, a $R_4 = \{(x,y) : x > y, 0 < y < 1\}$, tenim
$$P(Y \leq y) = P(\bigcap_{1\leq i\leq n} \{U_i \leq y\}) = y^n;$$
i
$$P(X \leq x|Y \leq y) = P(\bigcup_{1\leq i\leq n} \{U_i \in (0,x]\}| \bigcap_{1\leq i\leq n} \{U_i \in (0,y]\}) = 1,$$
de manera que
$$F_{XY}(x,y) = y^n.$$

En resum,

$$F_{XY}(x,y) = \begin{cases} 0, & (x,y) \in R_0 \\ 1-(1-x)^n, & (x,y) \in R_1 \\ 1, & (x,y) \in R_2 \\ y^n - (x-y)^n, & (x,y) \in R_3 \\ y^n, & (x,y) \in R_4 \end{cases}$$

(b) De l'expressió anterior de $F_{XY}(x,y)$,

$$f_{XY}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{XY}(x,y)}{\partial x \partial y} = \begin{cases} n(n-1)(y-x)^{n-2}, & (x,y) \in R_3 \\ 0, & \text{altrament} \end{cases}$$

(c)

$$\begin{aligned} E(Z) &= E(Y-X) = \iint_{R_3} (y-x) f_{XY}(x,y)\, dx dy = \\ &= n(n-1) \int_0^1 dy \int_0^y (y-x)^{n-1} dx = (n-1) \int_0^1 y^n dy = \\ &= \frac{n-1}{n+1}. \end{aligned}$$

(d) Fent servir la fórmula de la probabilitat total en el cas continu podem escriure

$$F_Z(z) = P(Y-X \leq z) = \int_{-\infty}^{\infty} P(Y-X \leq z | Y=y) f_Y(y)\, dy.$$

D'acord amb el problema 28 (a), la densitat de $Y = \max\{U_1, \ldots, U_n\}$ és

$$f_Y(y) = \begin{cases} n\,(F_{U_i}(y))^{n-1} f_{U_i}(y) = ny^{n-1}, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{altrament} \end{cases}$$

D'altra banda, si $0 < z < 1$,

$$\begin{aligned} &P(Y-X \leq z | Y=y) \\ &\quad = P(\text{ les altres } n-1 \text{ variables } U_i \text{ prenen valors a } [y-z,y]) = \\ &\quad = \begin{cases} 1, & 0 < y \leq z \\ \left(\frac{z}{y}\right)^{n-1}, & z < y < 1 \end{cases}. \end{aligned}$$

Així, per a $0 < z < 1$,

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= \int_0^z ny^{n-1}\, dy + \int_z^1 \left(\frac{z}{y}\right)^{n-1} ny^{n-1}\, dy = \\ &= z^n + nz^{n-1}(1-z) = (1-n)z^n + nz^{n-1}. \end{aligned}$$

de manera que

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z \leq 0 \\ (1-n)z^n + nz^{n-1}, & 0 < z < 1 \\ 1, & z \geq 1 \end{cases}$$

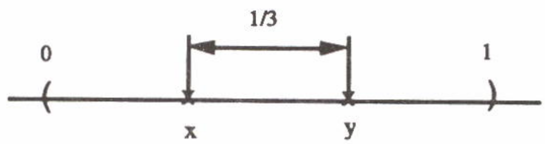
d'on

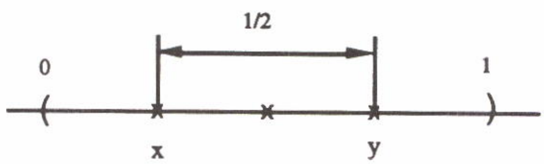
$$f_Z(z) = F'_Z(z) = \begin{cases} 0, & z \notin (0,1) \\ n(1-n)z^{n-1} + n(n-1)z^{n-2}, & z \in (0,1) \end{cases}.$$

Es pot recalcular ara la mitjana de la distància entre punts extrems

$$\begin{aligned} E(Z) &= \int_{-\infty}^{\infty} z f_Z(z)\, dz = n(1-n)\int_0^1 z^n\, dz + (n-1)\int_0^1 n z^{n-1}\, dz = \\ &= \frac{n-1}{n+1}. \end{aligned}$$

Observeu que aquesta mitjana correspon a la distància entre punts extrems quan aquests estan repartits uniformement dins l'interval. Per exemple,

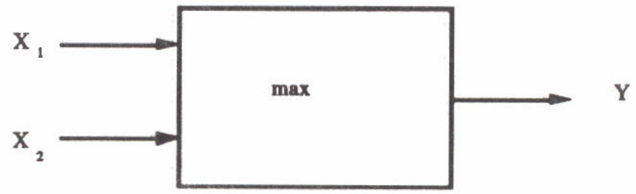




Observeu finalment que aquest problema es pot considerar una generalització del problema 27 pel cas que la cita afecti a n persones i es compti el temps entre la primera i la darrera que arriben. Podeu comprovar l'exactitud del resultat a la vida quotidiana.

31. Un dispositiu rep dos senyals els voltatges dels quals són variables aleatòries X_1 i X_2 independents i idènticament distribuïdes amb funció de densitat

$$f_{X_1}(x) = f_{X_2}(x) = f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{a^2} e^{-\frac{x^2}{2a^2}}, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$



La sortida del dispositiu dóna un senyal amb voltatge $Y = \max\{X_1, X_2\}$. Si la potència mitjana de cada un dels senyals d'entrada és de 5 mW, quina és la potència mitjana de la sortida?

La potència de cada un dels senyals d'entrada és $P_i = X_i^2$, $i = 1, 2$. La seva funció densitat és

$$f_{P_1}(p) = f_{P_2}(p) = f_P(p) = \frac{1}{2\sqrt{p}} f_X(\sqrt{p}) = \begin{cases} \dfrac{1}{2a^2} e^{-\frac{p}{2a^2}}, & p > 0 \\ 0, & p < 0 \end{cases},$$

és a dir, cada P_i segueix una llei exponencial de paràmetre $\lambda = \frac{1}{2a^2}$. Per tant,

$$E(P_i) = \frac{1}{\lambda} = 2a^2 = 5,$$

d'on $a^2 = 5/2$. La potència a la sortida és

$$W = Y^2 = (\max\{X_1, X_2\})^2 = \max\{P_1, P_2\}.$$

D'acord amb l'apartat (c) del problema 29 d'aquest capítol,

$$E(W) = E(\max\{P_1, P_2\}) = \frac{3}{2\lambda} = 3a^2 = 7.5,$$

de manera que la potència mitjana de sortida és de 7.5 mW.

Observeu que aquesta mitjana es pot obtenir també directament fent servir el Teorema de l'esperança.

$$E(W) \quad = \quad E(\max\{P_1, P_2\}) = \int_0^\infty \int_0^\infty \max\{p_1, p_2\} f_{P_1P_2}(p_1, p_2)\, dp_1 dp_2 =$$

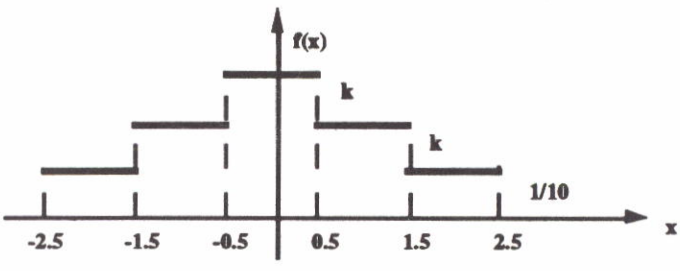
$$
\begin{aligned}
&= \iint_{R_1} p_1 f_{P_1P_2}(p_1,p_2)\,dp_1dp_2 + \iint_{R_2} p_2 f_{P_1}(p_1) f_{P_2}(p_2)\,dp_1dp_2 = \\
&= 2\iint_{R_1} p_1 f_{P_1}(p_1) f_{P_2}(p_2)\,dp_1dp_2 = \\
&= 2\left(\int_0^\infty p_1 \frac{1}{2a^2} e^{-\frac{p_1}{2a^2}}\,dp_1 \int_0^{p_1} \frac{1}{2a^2} e^{-\frac{p_2}{2a^2}}\,dp_2\right) = \\
&= \int_0^\infty p_1 \frac{1}{a^2} e^{-\frac{p_1}{2a^2}}\,dp_1 - \int_0^\infty p_1 \frac{1}{a^2} e^{-\frac{p_1}{a^2}}\,dp_1 = 3a^2 = 7.5
\end{aligned}
$$

Observació: $\int \alpha x e^{-\alpha x}\,dx = e^{-\alpha x}(\frac{1}{\alpha} + x)$.

32. La variable aleatòria X té per funció densitat

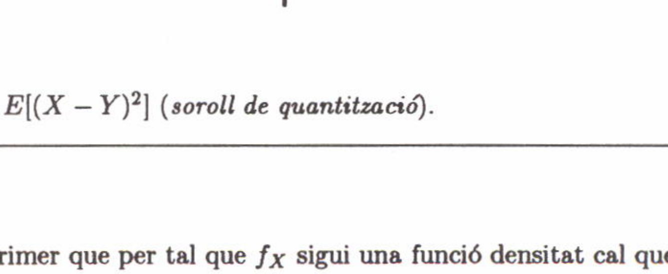
$$f_X(x) = \begin{cases} 2k + \frac{1}{10}, & x \in (-1/2, 1/2) \\ k + \frac{1}{10}, & x \in (-3/2, 1/2] \cup [1/2, 3/2) \\ \frac{1}{10}, & x \in (-5/2, -3/2] \cup [3/2, 5/2) \\ 0, & x \in (-\infty, -5/2] \cap [5/2, \infty) \end{cases},$$

per a un cert valor de k.



Definim $Y = g(X)$ on g és la transformació

$$g(x) = \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor.$$



Determineu $E[(X - Y)^2]$ (*soroll de quantització*).

Observem primer que per tal que f_X sigui una funció densitat cal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, dx = (2k + \frac{1}{10}) + 2(k + \frac{1}{10}) + 2\frac{1}{10} = 4k + \frac{1}{2} = 1,$$

de manera que $k = \frac{1}{8}$.

Fent servir el teorema de l'esperança,

$$
\begin{aligned}
&E[(X-Y)^2]\\
&= E[(X-g(X))^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-g(x))^2 f_X(x)\,dx = \\
&= \int_{-5/2}^{-3/2} (x+2)^2 \frac{1}{10}\,dx + \int_{-3/2}^{-1/2} (x+1)^2 (k+\frac{1}{10})\,dx + \int_{-1/2}^{1/2} x^2 (2k+\frac{1}{10})\,dx + \\
&\quad + \int_{1/2}^{3/2} (x-1)^2 (k+\frac{1}{10})\,dx + \int_{3/2}^{5/2} (x-2)^2 \frac{1}{10}\,dx = \\
&= \frac{1}{12}.
\end{aligned}
$$

33. Siguin $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatòries independents i idènticament distribuïdes amb mitjana $E(X_i) = m$, $1 \le i \le n$ i variància $Var(X_i) = \sigma^2$, $1 \le i \le n$. Diem

$$\overline{m} = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$$

i

$$\overline{V} = \frac{(X_1 - \overline{m})^2 + \ldots + (X_n - \overline{m})^2}{n}.$$

Determineu la mitjana de $\overline{V}$.

Com que les X_i's són idènticament distribuïdes,

$$\begin{aligned} E(\overline{V}) &= E\left[\frac{(X_1 - \overline{m})^2 + \ldots + (X_n - \overline{m})^2}{n}\right] = \\ &= \frac{E[(X_1 - \overline{m})^2] + \ldots + E[(X_n - \overline{m})^2]}{n} = E[(X_1 - \overline{m})^2] = \\ &= E(X_1^2) - 2E(X_1\overline{m}) + E(\overline{m}^2). \end{aligned}$$

El primer sumand és

$$E(X_1^2) = \sigma^2 + m^2.$$

Per determinar el darrer sumand, diem $Y = X_1 + \ldots + X_n$. Aleshores, $E(Y) = nm$ i, donat que les X_i's són independents, $Var(Y) = n\sigma^2$, d'on

$$E(\overline{m}^2) = E[(\frac{Y}{n})^2] = \frac{1}{n^2}E(Y^2) = \frac{1}{n^2}(Var(Y) + (E(Y))^2) = \frac{\sigma^2}{n} + m^2.$$

Finalment,

$$E(X_1\overline{m}) = \frac{E(X_1^2) + E(X_1X_2) + \ldots + E(X_1X_n)}{n} = \frac{\sigma^2 + m^2 + (n-1)m^2}{n} = \frac{\sigma^2}{n} + m^2.$$

D'aquí doncs,

$$E(\overline{V}) = \sigma^2 + m^2 - 2(\frac{\sigma^2}{n} + m^2) + \frac{\sigma^2}{n} + m^2 = \frac{n-1}{n}\sigma^2.$$

34. Les variables X_1, X_2, Y_1, Y_2 són independents. Les variables X_1, X_2 estan uniformement distribuïdes a (0,1) i Y_1, Y_2 ho estan a $(0, 2\pi)$. Definim

$$S_1 = X_1 \cos Y_1 + X_2 \cos Y_2$$

$$S_2 = X_1 \sin Y_1 + X_2 \sin Y_2.$$

Quines són les mitjanes i variàncies de S_1 i S_2? Quina és la covariància de S_1 i S_2?

Fent servir la independència i que X_1, X_2 estan igualment distribuïdes, així com també ho estan Y_1, Y_2,

$$E(S_1) = E(X_1 \cos Y_1 + X_2 \cos Y_2) = 2E(X_1)E(\cos Y_1)$$

on

$$E(X_i) = \frac{1}{2},\ i = 1, 2.$$

$$E(\cos Y_i) = \int_0^{2\pi} \cos y \frac{1}{2\pi}\, dy = 0$$

i

$$E(\sin Y_i) = \int_0^{2\pi} \sin y \frac{1}{2\pi}\, dy = 0.$$

Per tant,

$$E(S_1) = E(S_2) = 0.$$

D'altra banda,

$$\begin{aligned} Var(S_1) &= E(S_1^2) - (E(S_1))^2 = \\ &= = E(X_1^2 \cos^2 Y_1 + 2X_1X_2 \cos Y_1 \cos Y_2 + X_2^2 \cos^2 Y_2) = \\ &= 2E(X_1^2)E(\cos^2 Y_1), \end{aligned}$$

on

$$E(X_1^2) = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

i

$$\begin{aligned} E(\cos^2 Y_1) &= \int_0^{2\pi} \cos^2 y \frac{1}{2\pi}\, dy = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2y)\, dy = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Així doncs,

$$Var(S_1) = 2\frac{1}{2}\frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

De forma similar, fent servir que

$$E(\sin^2 Y_1) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin^2 y\, dy = \frac{1}{2},$$

tenim

$$Var(S_2) = 2E(X_1^2)E(\sin^2 Y_1) = \frac{1}{3}.$$

Finalment,

$$\begin{aligned}
&Cov(S_1, S_2) = \\
&= E(S_1S_2) - E(S_1)E(S_2) = E[(X_1\cos Y_1 + X_2\cos Y_2)(X_1\sin Y_1 + X_2\sin Y_2)] = \\
&= E(X_1^2\cos Y_1\sin Y_1) + E(X_1X_2\cos Y_1\sin Y_2) + \\
&\quad + E(X_2X_1\cos Y_2\sin Y_1) + E(X_2^2\cos Y_2\sin Y_2) = \\
&= 2E(X_1^2)E(\cos Y_1\sin Y_1)
\end{aligned}$$

on

$$E(\cos Y_1\sin Y_1) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos y\sin y\, dy = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\sin 2y\, dy = 0,$$

de manera que

$$Cov(S_1, S_2) = 0.$$

35. Les variables aleatòries X i Y tenen funció densitat conjunta

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 8xy, & 0 \le y \le x \le 1 \\ 0, & \text{altrament} \end{cases} .$$

Calculeu $E(Y^4|X)$.

Fent servir el teorema de l'esperança,

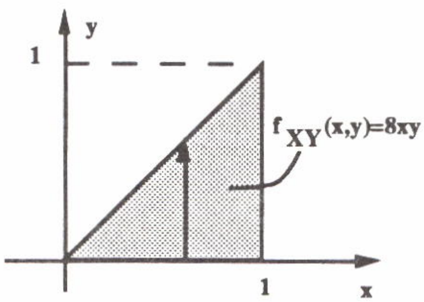
$$E(Y^4|X) = \int_{-\infty}^{\infty} y^4 f_{Y|X}(y|x)\, dy,$$

on la funció densitat condicionada $f_{Y|X}$ és

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)},\ x : f_X(x) \neq 0$$

i la densitat de X és

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\, dy = \begin{cases} 0, & x \notin [0,1] \\ \int_0^x 8xy\, dy = 4x^3, & x \in [0,1] \end{cases} ,$$



d'on, per a $x \in [0,1]$,

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} 0, & y \notin [0,x] \\ \dfrac{8xy}{4x^3} = \dfrac{2y}{x^2}, & y \in [0,x] \end{cases} .$$

Finalment,

$$E(Y^4|X) = \int_0^x y^4 \frac{2y}{x^2}\, dy = \frac{x^3}{4},\ x \in [0,1].$$

36. Donada la variable aleatòria bidimensional (X_1, X_2) es defineixen $Y_1 = g_1(X_1)$ i $Y_2 = g_2(X_2)$, on

$$g_1(x) = E(X_2|X_1 = x)$$
$$g_2(x) = E(X_2^2|X_1 = x).$$

Expresseu $E(Y_1)$ i $E(Y_2)$ en termes dels moments de la variable (X_1, X_2).

Fent servir el teroema de l'esperança,

$$\begin{aligned} E(Y_1) &= E(g_1(X_1)) = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(x) f_{X_1}(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} E(X_2|X_1 = x) f_{X_1}(x)\, dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} u f_{X_2|X_1}(u|x)\, du \right] f_{X_1}(x)\, dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} u f_{X_1X_2}(x,u)\, dxdu = m_{01;X_1X_2} = E(X_2). \end{aligned}$$

De forma similar s'obté

$$E(Y_2) = m_{02;X_1X_2} = E(X_2^2).$$

Aquest resultat es pot generalitzar en el sentit que el teorema de l'esperança es pot formular també per a esperances condicionades: si ϕ és una funció mesurable,

$$E[E(\phi(X_2)|X_1 = x)] = E[\phi(X_2)].$$

37. Siguin X i Y dues variables aleatòries i definim les variables $Z = E(Y|X)$ i $T = Var(Y|X)$. Proveu que

$$Var(Y) = Var(E(Y|X)) + E(Var(Y|X)).$$

Els dos termes de la dreta de la igualtat són

$$\begin{aligned} E(Var(Y|X)) &= E\{E[(Y|X - E(Y|X))^2]\} = E\{E(Y^2|X) - E^2(Y|X)\} = \\ &= E(Y^2) - E(E^2(Y|X)), \end{aligned}$$

on, d'acord amb el problema anterior, hem fet servir que $E(E(Y^2|X)) = E(Y^2)$.
D'altra banda,

$$\begin{aligned} Var(E(Y|X)) &= E\{[E(Y|X) - E(E(Y|X))]^2\} = \\ &= E\{E^2(Y|X) - 2E(Y|X)E(Y) + E^2(Y)\} = \\ &= E(E^2(Y|X)) - E^2(Y), \end{aligned}$$

on hem fet servir que $E(E(Y|X)E(Y)) = E(Y)E(E(Y|X)) = E^2(Y)$.
Sumant, doncs, aquestes dues expressions tenim

$$Var(E(Y|X)) + E(Var(Y|X)) = E(Y^2) - E^2(Y) = Var(Y).$$

Problemes proposats

38. En una memòria de disc, el capçal de lectura–escriptura es mou en línia recta segons un radi. Les successives posicions que ocupa estan a distància X_i del centre del disc, on X_i, $i = 1, 2, \ldots$ són variables aleatòries independents amb distribució uniforme a $(0, R)$, on R és el radi del disc. Diem D a la variable aleatòria que dóna la distància que recorre el capçal entre dues posicions consecutives. Determineu la funció densitat de D i la seva mitjana.

39. Les variables aleatòries X i Y tenen funció densitat conjunta

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 2e^{-(x+y)} & 0 < x < y < \infty \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}.$$

Determineu les seves funcions de densitat marginal i la seva covariància. Són indepedents?

40. Tirem repetidament una moneda amb $P(cara) = p$ fins que

(a) surten dues cares seguides.

(b) surten o bé dues cares seguides o bé dues creus seguides.

Determineu el nombre mitjà de tirades en cada un dels casos fent servir la fórmula

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(X|A_i)P(A_i),$$

on $A_1, \ldots, A_n$ formen una partició de l'espai mostral. Repetiu el càlcul del segon apartat fent servir ara la fórmula de l'esperança.

41. Quin és el nombre mitjà de tirades en el problema anterior si la moneda es tira fins que surten n cares seguides?

42. La distància que ha recorregut la roda d'un cotxe fins que punxa és una variable aleatòria exponencial de mitjana 1000 Km. Suposant que les quatre rodes d'un cotxe punxen independentment i que es disposa d'una roda de recanvi, quin és el valor mitjà de quilòmetres que pot recórrer abans no es quedi aturat per roda punxada?

43. Siguin $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatòries igualment distribuïdes i incorrelades amb variància σ^2. Quina és la variància de $Y = (X_1 + \ldots + X_n)/n$?

44. S'escull un punt aleatòriament (amb distribució uniforme) a la regió

$$R = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 3,\ |x-y| \le 2\}.$$

Quina és la probabilitat que $|x-y| \le 1$ si $x \ge 2$?

45. Una moneda amb probabilitat de cara $P(cara) = p$ es tira N vegades, on N és una variable aleatòria de Poisson de paràmetre λ. Proveu que els nombres X de cares i Y de creus que surten en els N llançaments són variables aleatòries independents. Es pot dir el mateix si N és un nombre fix?

46. Les variables aleatòries $X_1, X_2, \ldots, X_n$ són independents i tenen funció densitat f_{X_1}, f_{X_2}, ..., f_{X_n} respectivament. Definim les variables aleatòries

$$Y_1 = X_1,\ Y_2 = X_1 + X_2,\ \ldots,\ Y_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n.$$

Quina és la funció densitat conjunta de $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$?

47. Per a la prestació d'un cert servei, un sistema disposa de n servidors S_1, S_2, ..., S_n, que treballen en paral·lel i de manera independent. Cada servidor S_i té un temps de servei T_i que és una variable aleatòria exponencial de paràmetre λ_i, $1 \leq i \leq n$.

(a) Si l'usuari selecciona el servidor S_i amb probabilitat p_i, $1 \leq i \leq n$, $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, quin és el temps mitjà de duració del servei.

(b) Suposeu $n = 2$ i que dos usuaris, U_1, U_2, volen ser atesos pel sistema. Cada un d'ells selecciona el servidor S_i amb probabilitat p_i, $i = 1, 2$. Si els dos usuaris seleccionen el mateix servidor, U_2 s'ha d'esperar que es completi el servei a l'usuari U_1. Quin és el temps mitjà que passa fins que es completen els dos serveis?

Respostes

38.

$$f_D(d) = \begin{cases} \frac{2}{R}(1-\frac{d}{R}), & 0 < d < R \\ 0, & \text{altrament} \end{cases}$$

$$E(D) = \frac{R}{3}.$$

39. X és exponencial de paràmetre $\lambda = 2$ i $f_Y(y) = 2e^{-y} - 2e^{-2y}$, $y > 0$ i nul-la si $y \leq 0$. No són independents.

$Cov(X,Y) = \frac{1}{4}$.

40. (a) $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p^2}$ (= 6 si $p = q = 1/2$.)

(b) $\dfrac{2+pq}{1-pq}$ (= 3 si $p = q = 1/2$.)

41.

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p^i} = \frac{1}{q}(\frac{1}{p^n} - 1) \to \frac{1}{qp^n}, \text{ quan } n \to \infty$$

42. 500 Km.

43. σ^2/n.

44. 3/5.

46. $g(y_1, \ldots, y_n) = f_1(y_1)f_2(y_2 - y_1) \cdot \ldots \cdot f_n(y_n - y_{n-1})$.

47. a)

$$E(T) = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{\lambda_i}.$$

b)

$$E(T) = \frac{2p_1^2}{\lambda_1} + 2p_1p_2(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2}) + \frac{2p_2^2}{\lambda_2}.$$

Capítol 4. Funció característica

1. Es té una moneda amb probabilitat de cara p, $0 < p < 1$. Sigui X la variable aleatòria que correspon al nombre de vegades que s'ha de llançar la moneda per obtenir cara. Calculeu la seva funció característica i la seva esperança.

La variable aleatòria X pren els valors $1, 2, \ldots, n, \ldots$ amb probabilitats $P(X = n) = q^{n-1}p$, / $q = 1 - p$. Per tant,

$$M_X(\omega) = E(e^{j\omega X}) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{j\omega n} q^{n-1} p = \frac{p}{q} \sum_{n=1}^{\infty} (qe^{j\omega})^n =$$

$$= \frac{p}{q} \frac{qe^{j\omega}}{1 - qe^{j\omega}} = \frac{pe^{j\omega}}{1 - qe^{j\omega}}.$$

Així,

$$E(X) = \frac{1}{j} M'_X(0) = \frac{1}{j} \left. \frac{pe^{j\omega} j(1 - qe^{j\omega}) + pe^{j\omega} qe^{j\omega} j}{(1 - qe^{j\omega})^2} \right|_{\omega=0} =$$

$$= \left. \frac{pe^{j\omega}}{(1 - qe^{j\omega})^2} \right|_{\omega=0} = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}.$$

2. Siguin X_1, X_2 i X_3 variables aleatòries uniformes en $(-1,1)$ i independents. Calculeu la funció característica de $X = \sum_{i=1}^{N} X_i$ on N és una variable aleatòria independent de X_1, X_2, X_3, i tal que $P(N=1) = P(N=2) = P(N=3) = \frac{1}{3}$.

Es té $P(N=k) = \frac{1}{3}$, $k = 1,2,3$.

D'altra banda,

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{k=1}^{3} P(X \leq x | N = k) P(N = k) =$$

$$= P(X_1 \leq x | N = 1) P(N = 1) + P(X_1 + X_2 \leq x | N = 2) P(N = 2) +$$

$$+ P(X_1 + X_2 + X_3 \leq x | N = 3) P(N = 3) =$$

$$= P(X_1 \leq x) P(N = 1) + P(X_1 + X_2 \leq x) P(N = 2) + P(X_1 + X_2 + X_3 \leq x) P(N = 3) =$$

$$= \frac{1}{3}(F_{X_1}(x) + F_{X_1+X_2}(x) + F_{X_1+X_2+X_3}(x));$$

on s'ha aplicat que N és independent de X_1, X_2 i X_3.

Derivant respecte a x:

$$f_X(x) = \frac{1}{3}(f_{X_1}(x) + f_{X_1+X_2}(x) + f_{X_1+X_2+X_3}(x)).$$

Així,

$$M_X(\omega) = \frac{1}{3}(M_{X_1}(\omega) + M_{X_1+X_2}(\omega) + M_{X_1+X_2+X_3}(\omega)) =$$

$$= \frac{1}{3}(M_X(\omega) + M_X^2(\omega) + M_X^3(\omega)),$$

ja que les variables X_1, X_2 i X_3 són independents i idènticament distribuïdes, essent la seva funció característica:

$$M_X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega x} \frac{1}{2}\, dx = \frac{\sin \omega}{\omega}.$$

Finalment,

$$M_X(\omega) = \frac{1}{3}(\frac{\sin \omega}{\omega} + \frac{\sin^2 \omega}{\omega^2} + \frac{\sin^3 \omega}{\omega^3}).$$

3. (a) Trobeu la funció característica d'una variable aleatòria gaussiana normalitzada $N(0,1)$.

(b) Sabent que la funció característica de la variable aleatòria X és $M_X(\omega)$, calculeu la funció característica de $Y = aX + b$, $a, b \in \mathbf{R}$. Particularitzeu el resultat per a $X = N(0,1)$, $Y = \sigma X + m$. Quina és la funció de densitat d'aquesta Y?

(a) Sigui $X = N(0,1)$. La funció de densitat f_X és:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

Així,

$$M_X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega x} f_X(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega x} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx = e^{-\frac{1}{2}\omega^2}.$$

En efecte,

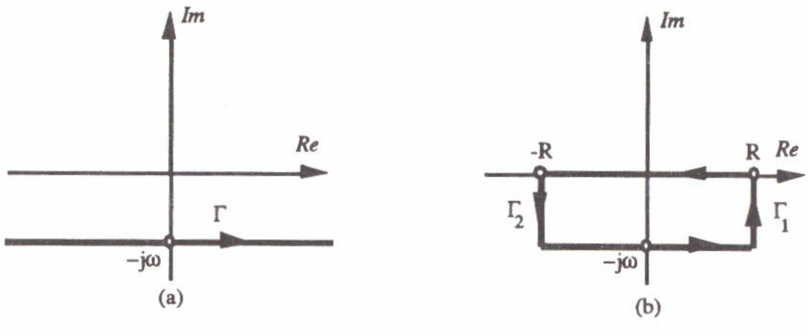
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega x - \frac{1}{2}x^2}\, dx = e^{-\frac{1}{2}\omega^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x - j\omega)^2}\, dx;$$

i aquesta última integral val 1.

Per demostrar-ho rigurosament es pot considerar

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x - j\omega)^2}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Gamma} e^{-\frac{1}{2}z^2}\, dz,$$

essent Γ el contorn en el pla complex indicat a la figura (a).



Per calcular aquesta integral de contorn, sigui C el contorn tancat mostrat a la figura (b):

$$0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_C e^{-\frac{1}{2}z^2}\, dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R^{-R} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\Gamma_1} e^{-\frac{1}{2}z^2}\,dz+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-R}^{R} e^{-\frac{1}{2}(x-j\omega)^2}\,dx+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\Gamma_2} e^{-\frac{1}{2}z^2}\,dz.$$

Però,

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_1} e^{-\frac{1}{2}z^2}\,dz=\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_2} e^{-\frac{1}{2}z^2}\,dz=0,$$

(*demostreu-ho*).
Així,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x-j\omega)^2}\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx=1.$$

Noteu que aquest resultat també s'obté fent el canvi $t=x-j\omega$ en la integral $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x-j\omega)^2}dx$ i operant formalment.

(b) Sigui $Y=aX+b$.

$$M_Y(\omega)=E(e^{j\omega Y})=E(e^{j\omega(aX+b)})=e^{j\omega b}E(e^{j\omega aX})=e^{j\omega b}M_X(a\omega).$$

Si X és gaussiana normalitzada i $Y=\sigma X+m$:

$$M_Y(\omega)=e^{j\omega m}M_X(\sigma\omega)=e^{j\omega m-\frac{1}{2}\sigma^2\omega^2}.$$

Aquesta funció característica correspon a una variable aleatòria gaussiana amb esperança m i variància σ^2. En efecte, si $Y=g(X)=\sigma X+m$:

$$f_Y(y)=\frac{f_X(x)}{g'(x)}\ \text{ amb }\ x=\frac{y-m}{\sigma};$$

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sigma}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}\ \text{ amb }\ x=\frac{y-m}{\sigma}.$$

Per tant:

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-m}{\sigma})^2}.$$

4. (a) Calculeu els moments d'ordre $1, 2, 3, 4$ de la variable aleatòria $N(0,1)$.

(b) Usant la relació entre $N(0,1)$ i $N(m,\sigma)$ estudiada en el problema **3**, trobeu el valor mitjà i la variància de $N(m,\sigma)$.

(a) Si $X = N(0,1)$:

$$M_X(\omega) = e^{-\frac{1}{2}\omega^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(-\frac{1}{2}\omega^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!}\omega^{2n}.$$

D'altra banda,

$$M_X(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M_X^{(k)}(0)}{k!}\omega^k.$$

Així,

$$M_X^{(k)}(0) = \begin{cases} \frac{(-1)^n(2n)!}{2^n n!} = (-1)^n 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1) & , k = 2n \\ 0 & , \text{altrament.} \end{cases}$$

Per tant,

$$m_{k;X} = \frac{1}{j^k} M_X^{(k)}(0) = \begin{cases} 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1) & , k = 2n \\ 0 & , \text{altrament.} \end{cases}$$

En particular:

$$m_{1;X} = 0, \quad m_{2;X} = 1, \quad m_{3;X} = 0, \quad m_{4;X} = 3.$$

(b) Si $Y = \sigma X + m$ amb $X = N(0,1)$:

$$m_Y = E(Y) = E(\sigma X + m) = \sigma E(X) + m = m;$$

$$\sigma_Y^2 = E((Y - m_Y)^2) = E(\sigma X)^2) = \sigma^2 E(X^2) = \sigma^2.$$

5. Sigui X una variable aleatòria gaussiana normalitzada.

(a) Trobeu la funció de densitat de $Y = X^2$.

(b) La funció característica de X^2 és $(1-2j\omega)^{-\frac{1}{2}}$. Quina és la funció característica de $Z = X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2$, on X_1, X_2, ..., X_n són totes variables aleatòries gaussianes normalitzades i independents?

(a) Sigui $y > 0$. La funció de distribució de Y és:

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(X^2 \le y) = P(-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}) = \\ = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}).$$

Si $y < 0$, $F_Y(y) = 0$.
Derivant respecte de y i tenint en compte que f_X és una funció parella:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}}(f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})) = \frac{f_X(\sqrt{y})}{\sqrt{y}}, & y > 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases}.$$

Així,

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{y}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\sqrt{y})^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}}e^{-\frac{1}{2}y}, & y > 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases}.$$

(b) Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ són independents, també ho són $X_1^2, X_2^2, \ldots, X_n^2$. Per tant,

$$M_Z(\omega) = \overbrace{(1-2j\omega)^{-\frac{1}{2}}(1-2j\omega)^{-\frac{1}{2}}\ldots(1-2j\omega)^{-\frac{1}{2}}}^{n} = (1-2j\omega)^{-\frac{n}{2}}.$$

6. S i N són dues variables aleatòries gaussianes $N(m_S, \sigma_S)$ i $N(0, \sigma_N)$ respectivament. Es defineix $Z = S+N$. Trobeu la funció característica de la funció de densitat conjunta de S i Z suposant S i N independents.

$$\begin{aligned} M_{ZS}(\omega_1, \omega_2) &= E(e^{j(\omega_1 Z + \omega_2 S)}) = E(e^{j(\omega_1 (S+N) + \omega_2 S)}) = \\ &= E(e^{j((\omega_1+\omega_2)S + \omega_1 N)}) = M_{SN}(\omega_1 + \omega_2, \omega_1). \end{aligned} \quad (1)$$

Tenint en compte que S i N són independents:

$$M_{ZS}(\omega_1, \omega_2) = M_S(\omega_1 + \omega_2) M_N(\omega_1) = e^{j(\omega_1+\omega_2)m_S - \frac{1}{2}\sigma_S^2(\omega_1+\omega_2)^2} e^{-\frac{1}{2}\omega_1^2 \sigma_N^2}.$$

També, fent servir notació matricial, sigui $\omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}$. Llavors, l'equació (1) es pot escriure com:

$$M_{ZS}(\omega_1, \omega_2) = M_{SN}(\omega^T A),$$

on $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Per tant,

$$M_{ZS}(\omega_1, \omega_2) = e^{j\omega^T \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_S \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\omega^T \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_S^2 & 0 \\ 0 & \sigma_N^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \omega}.$$

Així, Z i S són conjuntament gaussianes amb matriu de valors mitjans i de covariàncies:

$$m = \begin{pmatrix} m_S \\ m_S \end{pmatrix}, \quad \text{i} \quad K = \begin{pmatrix} \sigma_S^2 + \sigma_N^2 & \sigma_S^2 \\ \sigma_S^2 & \sigma_S^2 \end{pmatrix}$$

respectivament.

7. Donades les variables aleatòries gaussianes independents $X_1 = N(m_1, \sigma_1)$ i $X_2 = N(m_2, \sigma_2)$;

(a) fent servir la funció característica, calculeu la funció de densitat de $Z = X_1 + X_2$.

(b) Trobeu la funció característica de la funció de densitat conjunta de (X_1, X_2). Quin tipus de variable aleatòria és aquesta?

(a)

$$\begin{aligned} M_Z(\omega) &= M_{X_1}(\omega) M_{X_2}(\omega) = e^{j\omega m_1 - \frac{1}{2}\omega^2\sigma_1^2} e^{j\omega m_2 - \frac{1}{2}\omega^2\sigma_2^2} = \\ &= e^{j\omega(m_1+m_2) - \frac{1}{2}\omega^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}. \end{aligned}$$

Per tant, Z és gaussiana amb valor mitjà $m_Z = m_1 + m_2$ i variància $\sigma_Z^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$. Així,

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{z-(m_1+m_2)}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}.$$

(b)

$$M_{X_1X_2}(\omega_1, \omega_2) = M_{X_1}(\omega_1) M_{X_2}(\omega_2) = e^{j\omega_1 m_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2\omega_1^2} e^{j\omega_2 m_2 - \frac{1}{2}\sigma_2^2\omega_2^2} =$$

$$= e^{j(\omega_1 \omega_2)\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}(\omega_1 \omega_2)\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}}.$$

Per tant, (X_1, X_2) és una variable aleatòria bidimensional gaussiana amb matriu de valors mitjans $\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}$ i matriu de covariàncies $\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$.

8. Siguin X_1, X_2 dues variables aleatòries gaussianes amb valor mitjà 0 i matriu de covariàncies $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$. Es defineixen dues noves variables aleatòries Y_1, Y_2, mitjançant les funcions:

$$y_1 = x_1 + x_2$$
$$y_2 = x_1 - x_2.$$

Trobeu la funció característica de (Y_1, Y_2). Trobeu la funció de densitat marginal de Y_1.

La funció característica conjunta de X_1, X_2 és:

$$M_X(\omega_1, \omega_2) = E(e^{j\omega^T X}) = e^{j\omega^T m_X - \frac{1}{2}\omega^T K_X \omega},$$

on $\omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$, $m_X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ i $K_X = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$.

D'altra banda, si $Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$, la funció característica conjunta de Y_1, Y_2 és:

$$M_Y(\omega_1, \omega_2) = E(e^{j\omega^T Y}).$$

Però, $Y = AX$ amb $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Per tant,

$$M_Y(\omega_1, \omega_2) = E(e^{j\omega^T AX}) = M_X(\omega^T A) = e^{j\omega^T A m_X - \frac{1}{2}\omega^T A K_X A^T \omega} = e^{j\omega^T m_Y - \frac{1}{2}\omega^T K_Y \omega}.$$

Així, Y_1, Y_2 són conjuntament gaussianes amb vector de valors mitjans i matriu de covariàncies

$$m_Y = A m_X, \quad K_Y = A K_X A^T$$

respectivament.

Per tant,

$$m_Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$K_Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Així,

$$M_Y(\omega_1, \omega_2) = e^{-\frac{1}{2}(3\omega_1^2 + \omega_2^2)} = e^{-\frac{1}{2}3\omega_1^2} e^{-\frac{1}{2}\omega_2^2} = M_{Y_1}(\omega_1) M_{Y_2}(\omega_2);$$

és a dir, les variables aleatòries Y_1 i Y_2 són independents.

Finalment, la funció de densitat marginal de Y_1 és:

$$f_{Y_1}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{2}\frac{y^2}{3}}.$$

9. Les variables aleatòries T_1, T_2, ..., T_n són independents i estan idènticament distribuïdes amb funció de densitat:

$$f_T(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} ;$$

amb $\lambda > 0$. Calculeu la funció de densitat de $\mathcal{T} = T_1 + T_2 + \ldots + T_n$.

La funció característica de cada T_i és:

$$M_T(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} f_T(T)\, dt = \int_0^{\infty} e^{j\omega t} \lambda e^{-\lambda t}\, dt = \frac{\lambda}{\lambda - j\omega}.$$

Per tant, la funció característica de $\mathcal{T}$ és:

$$M_{\mathcal{T}}(\omega) = (M_T(\omega))^n = (\frac{\lambda}{\lambda - j\omega})^n.$$

Invertint la transformació:

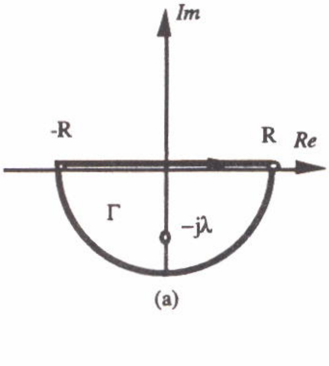
$$f_{\mathcal{T}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} M_{\mathcal{T}}(\omega)\, d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} \frac{\lambda^n}{(\lambda - j\omega)^n}\, d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi} (\frac{\lambda}{-j})^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} \frac{1}{(\omega - \frac{\lambda}{j})^n}\, d\omega.$$

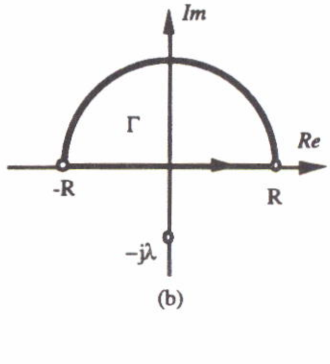
Per calcular aquesta última integral, considereu la següent integral de contorn en el pla complex i sigui $t > 0$:

$$\int_\Gamma e^{-jzt} \frac{1}{(z - \frac{\lambda}{j})^n}\, dz,$$

on Γ és el contorn mostrat a la figura (a).



(a)



(b)

Així,

$$\int_\Gamma e^{-jzt}\frac{1}{(z-\frac{\lambda}{j})^n}\,dz = -2\pi j\,\mathrm{Res}(\frac{e^{-jzt}}{(z-\frac{\lambda}{j})^n};\frac{\lambda}{j}) = -2\pi j\,\frac{1}{(n-1)!}(-jt)^{n-1}e^{-\lambda t}.$$

D'altra banda:

$$\int_\Gamma e^{-jzt}\frac{1}{(z-\frac{\lambda}{j})^n}\,dz = \int_{-R}^{R} e^{-j\omega t}\frac{1}{(\omega-\frac{\lambda}{j})^n}\,d\omega + \int_{C_R} e^{-jzt}\frac{1}{(z-\frac{\lambda}{j})^n}\,dz.$$

Però

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} e^{-jzt}\frac{1}{(z-\frac{\lambda}{j})^n}\,dz = 0.$$

Així,

$$\begin{aligned} f_T(t) &= \frac{1}{2\pi}(\frac{\lambda}{-j})^n\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t}\frac{1}{(\omega-\frac{\lambda}{j})^n}\,d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi}(\frac{\lambda}{-j})^n\,2\pi j\,\frac{1}{(n-1)!}(-jt)^{n-1}e^{-\lambda t} = \lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}\,. \end{aligned}$$

Anàlogament, si $t < 0$ cal considerar el contorn de la figura (b). En aquest cas s'obté, naturalment, $f_T(t) = 0$.

10. Un camí aleatori simètric bidimensional és una seqüència de punts $\{(X_n, Y_n) : n \geq 0\}$ definida de la forma següent:

Si $(X_n, Y_n) = (x, y)$, llavors (X_{n+1}, Y_{n+1}) és, amb igual probabilitat, un dels quatre punts $(x+1, y)$, $(x-1, y)$, $(x, y+1)$, $(x, y-1)$. Suposant $(X_0, Y_0) = (0, 0)$,

(a) probeu que $E(X_n^2 + Y_n^2) = n$;

(b) trobeu la funció característica de (X_n, Y_n).

(a) Les variables aleatòries X_n i Y_n estan igualment distribuïdes. Per tant,

$$E(X_n^2 + Y_n^2) = E(X_n^2) + E(Y_n^2) = 2E(X_n^2).$$

D'altra banda,

$$X_n = X^{(1)} + X^{(2)} + \ldots + X^{(n)},$$

on la variable aleatòria $X^{(i)}$ pren el valor -1, 0 o 1 d'acord amb el moviment horitzontal que s'hagi produït en el pas i-èsim, $i = 1, 2, \ldots, n$. Per tant,

$$P(X^{(i)} = -1) = \frac{1}{4}; \quad P(X^{(i)} = 0) = \frac{1}{2}; \quad P(X^{(i)} = 1) = \frac{1}{4}.$$

El valor mitjà de $X^{(i)}$ és, per a tot i:

$$E(X^{(i)}) = \sum_{k=-1,0,1} k\,P(X^{(i)} = k) = 0.$$

Per tant,

$$E(X_n) = 0.$$

També, si $i, j = 1, 2, \ldots, n$ amb $i \neq j$:

$$E(X^{(i)} X^{(j)}) = E(X^{(i)}) E(X^{(j)}) = 0,$$

on s'ha considerat que els moviments horitzontals corresponents a passos distints són independents.

D'altra banda, per a tot i:

$$E((X^{(i)})^2) = \sum_{k=-1,0,1} k^2\,P(X^{(i)} = k) = \frac{1}{2}.$$

Finalment,

$$E(X_n^2) = nE((X^{(i)})^2) = \frac{n}{2},$$

i

$$E(X_n^2 + Y_n^2) = n.$$

(b) Notem que

$$(X_n, Y_n) = \sum_{i=1}^{n} (X^{(i)}, Y^{(i)}),$$

on la variable aleatòria $Y^{(i)}$ correspon al moviment vertical en el pas i-èsim. Les variables aleatòries bidimensionals $(X^{(i)}, Y^{(i)})$ són independents i idènticament distribuïdes, essent la seva funció característica:

$$\begin{aligned} M_{X^{(i)}Y^{(i)}}(\omega_1, \omega_2) &= E(e^{j(\omega_1 X^{(i)} + \omega_2 Y^{(i)})}) = \\ &= \sum_{(m,n)\in S} e^{j(\omega_1 m + \omega_2 n)} P(X^{(i)} = m, Y^{(i)} = n), \end{aligned}$$

on $S = \{(-1,0), (1,0), (0,-1), (0,1)\}$.
Així,

$$M_{X^{(i)}Y^{(i)}}(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{4}(e^{-j\omega_1} + e^{j\omega_1} + e^{-j\omega_2} + e^{j\omega_2}) = \frac{1}{2}(\cos\omega_1 + \cos\omega_2).$$

Finalment,

$$M_{X_n Y_n}(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{2^n}(\cos\omega_1 + \cos\omega_2)^n.$$

11. (a) Trobeu la funció característica d'una variable aleatòria X de Poisson amb paràmetre λ.

(b) Trobeu la funció de probabilitat de la variable aleatòria $Z = X + Y$ on X i Y són variables aleatòries de Poisson amb paràmetres λ_X i λ_Y respectivament i independents.

(a) La funció de probabilitat de X és:

$$P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Per tant,

$$M_X(\omega) = E(e^{j\omega X}) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{j\omega k} P(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{j\omega k} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} =$$

$$= e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda e^{j\omega})^k}{k!} = e^{-\lambda}\, e^{\lambda e^{j\omega}} = e^{\lambda(e^{j\omega}-1)}.$$

(b)

$$M_Z(\omega) = M_X(\omega)M_Y(\omega) = e^{\lambda_X(e^{j\omega}-1)}\, e^{\lambda_Y(e^{j\omega}-1)} = e^{(\lambda_X+\lambda_Y)(e^{j\omega}-1)}.$$

Així, Z també és una variable aleatòria de Poisson amb paràmetre $\lambda_X + \lambda_Y$. Per tant,

$$P(X = k) = e^{-(\lambda_X+\lambda_Y)}\frac{(\lambda_X + \lambda_Y)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

12. El nombre N d'usuaris que arriben a un sistema durant un cert període és una variable aleatòria de Poisson amb paràmetre λ. Sigui p, $0 < p < 1$, la probabilitat de que un usuari que arribi al sistema rebi servei. Determineu la funció de probabilitat de la variable aleatòria X que conta el nombre d'usuaris que reben servei.

Sigui X_i la variable aleatòria indicatriu de l'esdeveniment "L'i-èsim usuari que arriba al sistema rep servei". Així, per a tot i, X_i és una variable aleatòria de Bernouilli amb funció característica

$$M_{X_i}(\omega) = E(e^{j\omega X_i}) = pe^{j\omega} + q; \quad q = 1 - p.$$

D'altra banda,

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_N,$$

on N és variable aleatòria de Poisson amb funció de probabilitat

$$P(N = n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

essent les variables X_i i N independents.

Tot seguit, calculem la funció característica de X condicionant per N:

$$\begin{aligned}
M_X(\omega) &= E(e^{j\omega X}) = E(E(e^{j\omega X}|N)) = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} E(e^{j\omega X}|N = n)P(N = n) = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} E(e^{j\omega(X_1+X_2+\ldots+X_n)}|N)P(N = n) = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} E(e^{j\omega(X_1+X_2+\ldots+X_n)})P(N = n) = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} E(e^{j\omega X_1})\, E(e^{j\omega X_2}) \ldots E(e^{j\omega X_n})P(N = n) = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(pe^{j\omega} + q)^n\, e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{(\lambda(pe^{j\omega} + q))^n}{n!} = \\
&= e^{-\lambda}\, e^{\lambda(pe^{j\omega}+q)} = e^{\lambda p(e^{j\omega}-1)};
\end{aligned}$$

on s'ha utilitzat el fet que N és independent de X_1, X_2, …, X_n i que aquestes variables són també independents i tenen la mateixa funció característica.

Es a dir, X es una variable aleatòria de Poisson amb paràmetre λp. Així, el nombre d'usuaris atesos segueix la llei de probabilitat

$$P(X=n)=e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^n}{n!},\quad n=0,1,2,\ldots.$$

Problemes proposats

13. (a) Determineu la funció característica d'una variable aleatòria T exponencial amb paràmetre λ.

(b) Demostreu que

$$M_X(\omega) = \frac{e^{3j\omega - 2\omega^2}}{1 + j\omega}$$

és funció característica i calculeu $E(X)$ i $Var(X)$.

14. D'una urna amb dues boles blanques i tres negres s'extreuen dues boles. Sigui X la variable aleatòria que representa el nombre de boles blanques extretes.

(a) Determineu la funció característica de X, $M_X(\omega)$.

(b) Usant la funció característica, trobeu l'esperança i la variància de X.

(c) D'una altra urna idèntica a l'anterior s'extreuen igualment dues boles. Trobeu la funció característica de la variable aleatòria Y que representa el nombre de boles blanques extretes entre les dues extraccions.

15. Si N és una variable aleatòria discreta que pren valors enters no negatius, es defineix la seva *funció generadora* $G_N(z) = E(z^N)$.

(a) Demostreu que G_N és ben definida a la regió del pla complex $\{z \in \mathbf{C} : |z| \leq 1\}$.

(b) Trobeu la funció generadora d'una variable aleatòria geomètrica N amb $P(N = n) = pq^{n-1}$, $n = 1, 2, \ldots$, $0 < p < 1$, $q = 1 - p$.

(c) Siguin $N, X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ variables aleatòries independents, amb X_1, X_2, ..., X_n, ... contínues i idènticament distribuïdes, i N variable aleatòria discreta que pren els valors $n = 1, 2, \ldots$. Expresseu la funció característica $\Phi_S(\omega)$ de $S = \sum_{n=1}^{N} X_n$ a partir de G_N i de la funció característica de les variables X_n.

(d) Trobeu la funció de densitat de S si X_n és exponencial amb paràmetre λ i N és geomètrica definida com a (b).

16. Siguin X i Y variables aleatòries contínues i $Z = aX + bY$ amb $a, b \in \mathbf{R}$ constants.

(a) Demostreu que si es coneix la funció de densitat f_Z per a tot a i b, llavors la funció de densitat conjunta f_{XY} queda determinada unívocament.

(b) Demostreu que si per a tot a i b la variable aleatòria Z és gaussiana, llavors les variables aleatòries X i Y són conjuntament gaussianes.

17. Siguin Y_1 i Y_2 variables aleatòries conjuntament gaussianes amb paràmetres $E(Y_1) = 1$, $E(Y_2) = -1$, $Var(Y_1) = 4$, $Var(Y_2) = 1$ i $\rho = \frac{1}{2}$. Sigui N, independent de (Y_1, Y_2), també gaussiana amb $E(N) = 0$ i $Var(N) = 2$. Si $X = Y_1 - Y_2 + N$, demostreu que (X, Y_1) és una variable aleatòria bidimensional gaussiana i calculeu el valor dels seus paràmetres.

Respostes

13. $E(X) = 2$; $Var(X) = 5$.

14. (a) $M_X(\omega) = \frac{1}{10}(3 + 6e^{j\omega} + e^{j2\omega})$.

(b) $E(X) = 4/5$; $\sigma_X^2 = 9/25$.

(c) $M_Y(\omega) = \frac{1}{100}(3 + 6e^{j\omega} + e^{j2\omega})^2$.

15. (b) $\dfrac{pz}{1 - qz}$.

(c) $\Phi_S(\omega) = G_N(\Phi_X(\omega))$.

(d) $\dfrac{\lambda p}{\lambda p - j\omega}$.
S és exponencial amb paràmetre λp.

17. $E(X) = 2$, $Var(X) = 5$, $\mu_{11;XY_1} = 3$.

Capítol 5. Estimació de variables aleatòries

1. Les variables aleatòries X i Y tenen la funció de densitat

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{si } 0<x<1 \text{ i } 0<y<1 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

Es vol estimar Y mitjançant la funció lineal $aX+b$. Calculeu a i b perquè l'error quadràtic mitjà sigui mínim i trobeu aquest error

---

Tenim $\hat{Y} = aX+b$ i, per tal que l'error quadràtic mitjà sigui mínim, s'ha de verificar que $(Y-\hat{Y})\perp 1$ i $(Y-\hat{Y})\perp x$. Per tant:

$$\begin{aligned} E\{(Y-\hat{Y})X\} &= 0 = E\{[Y-(aX+b)]X\} = E\{XY\} - aE\{X^2\} - bE\{X\} \\ E\{(Y-\hat{Y})1\} &= 0 = E\{Y-aX+b\} = E\{Y\} - aE\{X\} - b \end{aligned}$$

Calculem ara els coeficients d'aquest sistema d'equacions. En primer lloc,

$$f_X(x) = \int_0^1 (x+y)dy = x+1/2, \text{ per } 0<x<1$$

Per tant :

$$\begin{aligned} E\{X\} &= \int_0^1 x(x+1/2)dx = 7/12 = E\{Y\} \\ E\{X^2\} &= \int_0^1 x^2(x+1/2)dx = 5/12 = E\{Y^2\} \\ E\{XY\} &= \int_0^1\int_0^1 xy(x+y)dxdx = 1/3 \end{aligned}$$

Ara, resolem el sistema d'equacions:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} &= \frac{5}{12}a + \frac{7}{12}b \\ \frac{7}{12} &= \frac{7}{12}a + b \end{aligned}$$

i obtenim $a = -1/11$ i $b = 7/11$.

Finalment l'error serà:

$$\mathcal{E} = E\{(Y-\hat{Y}\} = E\{Y^2\} - aE\{XY\} - bE\{Y\} = 5/66.$$

2. Donades les variables aleatòries X i Y amb funció densitat conjunta

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 2 & \text{si } 0 < x < y < 1 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

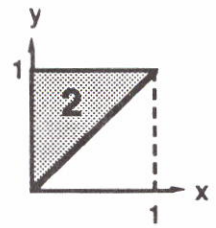
Calculeu

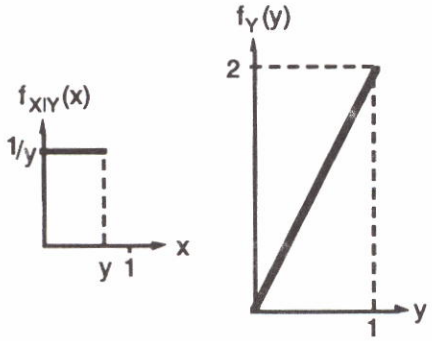
(a) La corba de regressió de X sobre Y

(b) La línia de regressió de X sobre Y

(a) Hem de calcular $E\{X/Y\}$. Ara

$$E\{X/Y = y\} = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X/Y=y}(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)} dx$$





A partir de la funció densitat conjunta f_{XY} tenim

$$f_Y(y) = \int_0^y f_{XY} dx = \int_0^y 2dy = 2y$$

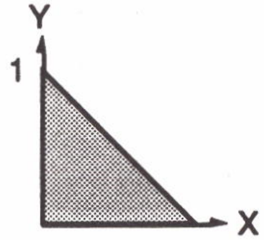
per $0 < y < 1$.
Per tant,

$$E\{X/Y = y\} = \int_0^y x\frac{1}{y}dx = y/2$$

així $\hat{X} = E\{X/Y\} = Y/2$

(b) Com que E(X/Y) és lineal, llavors la recta de regressió és Y/2.

3. **Sigui (X,Y) una variable aleatòria bidimensional uniformement distribuïda en el recinte de la figura.**



Es demana:

(a) Trobeu la millor estimació lineal de Y donada X.

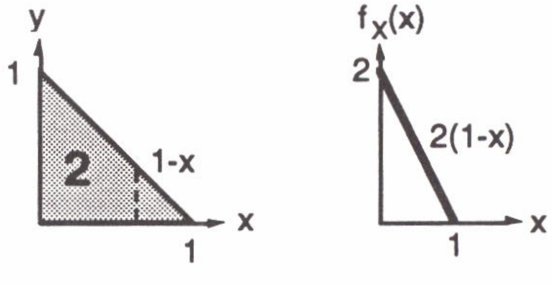
(b) Trobeu la millor estimació de Y donada X.

(c) L'error quadràtic mitjà en ambdós casos.

(a) Tenim $E\{Y-\hat{Y}\} = E\{(Y-\hat{Y})X\} = 0$. Donat que $\hat{Y} = aX + b$ obtenim el sistema

$$\begin{cases} E\{Y\} & = aE\{X\} + b \\ E\{XY\} & = aE\{X^2\} + bE\{X\} \end{cases}$$

del qual determinarem els valors de a i b.



$$\begin{aligned} E\{X\} &= E\{Y\} = \int_0^1 x2(1-x)dx = \frac{1}{3} \\ E\{X^2\} &= E\{Y^2\} = \int_0^1 x^2 2(1-x)dx = \frac{1}{6} \\ E\{XY\} &= \int\int xyf_{XY}(x,y)dxdy = \int_0^1 xdx \int_0^{1-x} 2ydy = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

Substituint els valors anteriors s'obté $a = -\frac{1}{2}$ i $b = \frac{1}{2}$.
Llavors, la millor estimació lineal de Y és $\hat{Y} = -\frac{1}{2}X + \frac{1}{2}$

(b) Hem de calcular $E\{Y/X\}$.

$$E\{Y/X=x\} = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_{Y/X=x}(y)dy = \int_0^{1-x} y\frac{2}{2(1-x)}dy = \frac{1-x}{2}$$

que dóna la mateixa estimació de l'apartat anterior.

(c) L'error quadràtic és:

$$E\{(Y-\hat{Y})^2\} = E\{(Y-\hat{Y})Y\} = E\{Y^2\} - aE\{XY\} - bE\{Y\} = \frac{1}{24}$$

en ambdós casos.

4. Les variables aleatòries X i Y tenen com a funció densitat conjunta

$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2-2xy+2y^2)}$$

Calculeu la millor estimació de Y donada X.

$$E\{Y/X=x\} = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_{Y/X=x}(y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} y\frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)}dy$$

La funció de densitat marginal de X és:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2-2xy+2y^2)}dy = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y-\frac{x}{2})^2} dy = \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{2}} \end{aligned}$$

Ara, la densitat condicionada és:

$$f_{Y/X=x}(y) = \frac{\frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2-2xy+2y^2)}}{\frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x^2}{2}-2xy+2y^2)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(y-\frac{x}{2})^2}$$

i l'esperança:

$$E\{Y/X=x\} = \int_{-\infty}^{+\infty} y\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(y-\frac{x}{2})^2} dy = \frac{x}{2}$$

ja que es tracta d'una distribució $N(\frac{x}{2}, \frac{1}{2})$.

Finalment, l'estimació de Y és $\hat{Y} = E\{Y/X\} = \frac{X}{2}$.

Un altre mètode és utilitzar el fet que X i Y són conjuntament normals. Llavors:

$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{x^2}{\sigma_X^2} - \frac{2\rho xy}{\sigma_X\sigma_Y} + \frac{y^2}{\sigma_Y^2}\right)}$$

on $\sigma_X = \sqrt{2}$, $\sigma_Y = 1$ i $\rho = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Finalment, l'estimació de Y és lineal i $E\{Y/X\} = \frac{\rho\sigma_Y}{\sigma_X} X = \frac{X}{2}$.

5. Les variables aleatòries S (senyal) i N (soroll) són independents i gaussianes $N(m_S, \sigma_S^2)$ i $N(0, \sigma_N^2)$ respectivament. Sigui $Z = S + N$.

(a) Justifique perquè la millor estimació en mitjana quadràtica de S donada Z ha de ser lineal.

(b) Calculeu aquesta estimació.

(c) Calculeu l'error quadràtic mitjà mínim.

(a) Donat que S i N són gaussianes i independents, són conjuntament normals. Amb el canvi lineal $Z = S + N$ i $S = S$, S i Z també ho són i per això la millor estimació es lineal: $\hat{S} = E\{S/Z\} = aZ + b$.

(b) La millor estimació s'obté quan l'error $S - \hat{S}$ és ortogonal a 1 i a Z. Per tant:

$$
\begin{aligned}
E\{S\} &= aE\{Z\} + b = aE\{S\} + aE\{N\} + b \\
E\{SZ\} &= aE\{Z^2\} + bE\{Z\} = aE\{S^2\} + 2aE\{SN\} + aE\{N^2\} + \\
&+ bE\{S\} + bE\{N\} = E\{S^2\} + E\{SN\}
\end{aligned}
$$

Considerant que $E\{SN\} = 0$ s'obté el sistema d'equacions:

$$
\begin{aligned}
m_S &= am_S + b \\
\sigma_S^2 + m_S^2 &= a(\sigma_S^2 + m_S^2) + a\sigma_N^2 + bm_S
\end{aligned}
$$

que té com a solucions:

$$
a = \frac{\sigma_S^2}{\sigma_S^2 + \sigma_N^2} \qquad b = m_S \frac{\sigma_N^2}{\sigma_S^2 + \sigma_N^2}
$$

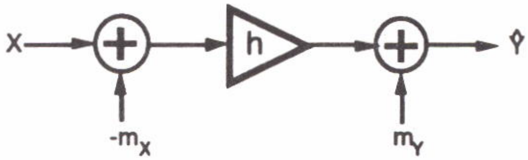
essent l'estimació $\hat{S} = \dfrac{\sigma_S^2}{\sigma_S^2 + \sigma_N^2} Z + \dfrac{\sigma_N^2}{\sigma_S^2 + \sigma_N^2} m_S$.

(c) L'error quadràtic de l'estimació anterior és:

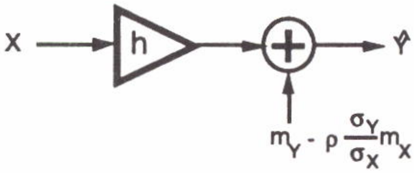
$$
E\{(S - \hat{S})S\} = E\{S^2\} - aE\{SZ\} - bE\{S\} = (1 - a)E\{S^2\} - bE\{S\} = \frac{\sigma_S^2 \sigma_N^2}{\sigma_S^2 + \sigma_N^2}
$$

6. Comproveu que és possible obtenir la millor estimació lineal de Y donada X mitjançant l'esquema de la figura.

Quin valor ha de tenir h?



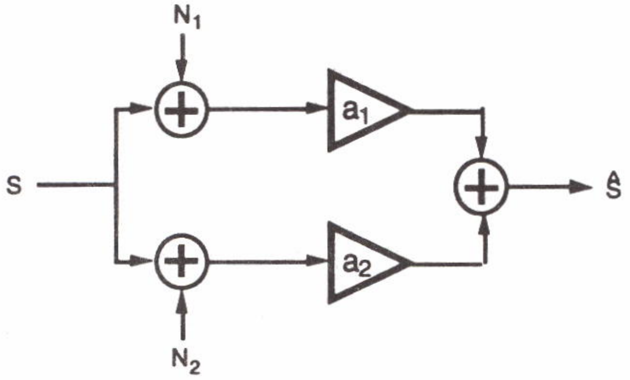
Tenim l'estimació $\hat{Y} = aX + b$, on $a = \rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}$ i $b = m_Y - am_X$.



Substituint b s'obté $\hat{Y} - m_Y = a(X - m_X)$, és a dir, estimar $Y_c = Y - m_Y$ per a $\hat{Y}_c = \hat{Y} - m_Y$ donat $X_c = X - m_X$. (On $E\{X_c\} = E\{Y_c\} = 0$.)

En la figura es veu que $\hat{Y} - m_Y = h(X - m_X)$. Llavors $h = a = \rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}$.

7. Sigui S una variable aleatòria de valor mitjà 0 i desviació típica σ_S. Siguin N_1 i N_2 variables aleatòries de valor mitjà 0 i desviació típica σ_1 i σ_2 respectivament. A més S, N_1 i N_2 estan incorrelades. Determineu a_1 i a_2 per tal que $\hat{S}$ sigui la millor estimació lineal en mitjana quadràtica de S, així com també l'error de l'estimació.



Hem d'estimar S coneixent $X_1 = S + N_1$ i $X_2 = S + N_2$. Per tant, tenim $\hat{S} = a_1X_1 + a_2X_2$ amb error ortogonal a X_1 i X_2.

$$\begin{aligned} E\{(S-\hat{S})X_1\} &= 0 \quad \Rightarrow \quad E\{SX_1\} = a_1E\{X_1^2\} + a_2E\{X_1X_2\} \\ E\{(S-\hat{S})X_2\} &= 0 \quad \Rightarrow \quad E\{SX_2\} = a_1E\{X_1X_2\} + a_2E\{X_2^2\} \end{aligned}$$

Sabent que N_1, N_2 i S són incorrelades:

$$\begin{aligned} E\{X_1^2\} &= E\{(S+N_1)^2\} = E\{S^2\} + 2E\{SN_1\} + E\{N_1^2\} = \sigma_S^2 + \sigma_1^2 \\ E\{X_2^2\} &= E\{(S+N_2)^2\} = E\{S^2\} + 2E\{SN_2\} + E\{N_2^2\} = \sigma_S^2 + \sigma_2^2 \\ E\{X_1X_2\} &= E\{(S+N_1)(S+N_2)\} = E\{S^2\} + E\{SN_1\} + E\{SN_2\} + E\{N_1N_2\} = \\ &= \sigma_S^2 \\ E\{SX_1\} &= E\{S(S+N_1)\} = E\{S^2\} + E\{SN_1\} = \sigma_S^2 \\ E\{SX_2\} &= E\{S(S+N_2)\} = E\{S^2\} + E\{SN_2\} = \sigma_S^2 \end{aligned}$$

que ens porta al sistema:

$$\begin{aligned} \sigma_S^2 &= a_1(\sigma_S^2 + \sigma_1^2) + a_2\sigma_S^2 \\ \sigma_S^2 &= a_1\sigma_S^2 + a_2(\sigma_S^2 + \sigma_1^2) \end{aligned}$$

amb solucions:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\sigma_S^2\sigma_2^2}{\sigma_S^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)+\sigma_1^2\sigma_2^2} \\ a_2 &= \frac{\sigma_S^2\sigma_1^2}{\sigma_S^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)+\sigma_1^2\sigma_2^2} \end{aligned}$$

L'error comès és:

$$E\{(S-\hat{S})S\} = E\{S^2\} - a_1E\{SX_1\} - a_2E\{SX_2\} = \frac{\sigma_S^2\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_S^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)+\sigma_1^2\sigma_2^2}$$

En el cas particular que $\sigma_1 \sim \sigma_2 \leq \sigma_S$ tenim $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$ i $\hat{S} = \frac{1}{2}(X_1+X_2) = S + \frac{1}{2}(N_1+N_2)$. L'error és $\frac{\sigma_1^2}{2}$.

8. Siguin Y_1 i Y_2 variables aleatòries gaussianes de valors mitjans 1, -1 i variàncies 4, 1 respectivament. El coeficient de correlació és 1/2. N és una altra variable aleatòria gaussiana independent de (Y_1, Y_2), de valor mitjà 0 i variància 2. Sigui $X = Y_1 - Y_2 + N$. Es demana la millor estimació de Y_1 donada X, i l'error quadràtic mitjà de l'estimació.

Donat que Y_1, Y_2 i N són conjuntament gaussianes també ho són X i Y_1. Per tant, la millor estimació és lineal, és a dir, $\hat{Y}_1 = aX + b$ on $a = \rho\frac{\sigma_{Y_1}}{\sigma_X} = \frac{\sigma^2_{XY_1}}{\sigma^2_X}$ i $b = m_{Y_1} - am_X$.

$$\begin{aligned}
\sigma^2_{XY_1} &= \operatorname{cov}(X, Y_1) = \operatorname{cov}(Y_1, Y_1) - \operatorname{cov}(Y_2, Y_1) + \operatorname{cov}(N, Y_1) = \\
&= \sigma_1^2 - \rho\sigma_1\sigma_2 = 3 \\
\sigma^2_X &= \operatorname{var}(X) = \operatorname{var}(Y_1 - Y_2) - \operatorname{var}(N) = \operatorname{var}(Y_1) + \operatorname{var}(Y_2) - \\
&- 2\operatorname{cov}(Y_1, Y_2) + \operatorname{var}(N) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_N^2 = 5
\end{aligned}$$

Per tant, $a = \frac{3}{5}$ i $b = m_{Y_1} - am_X = 1 - \frac{3}{5}2 = -\frac{1}{5}$. El resultat final és $\hat{Y}_1 = \frac{3}{5}X - \frac{1}{5}$. L'error comès és:

$$\begin{aligned}
E\{(Y_1 - \hat{Y}_1)Y_1\} &= \operatorname{cov}(Y_1 - \hat{Y}_1, Y_1) = \operatorname{var}(Y_1) - \operatorname{cov}(\hat{Y}_1, Y_1) = \\
&= \sigma_1^2 - a\operatorname{cov}(X, Y_1) = 4 - \frac{3}{5}3 = \frac{11}{5}
\end{aligned}$$

9. Es vol estimar la variable aleatòria Y mitjançant l'expressió $a_0 + a_1 X + a_2 X^2$. ¿Quines equacions hauran de satisfer els coeficients per tal que l'error quadràtic mitjà sigui mínim? Quin és el valor d'aquest error? (Suposeu que tots els moments que es necessiten existeixen i es coneixen.)

Per minimitzar l'error quadràtic hem d'imposar que $Y - \hat{Y}$ sigui ortogonal a 1, X i a X^2. És a dir,

$$E\{Y - a_0 + a_1 X + a_2 X^2\} = 0$$
$$E\{(Y - a_0 + a_1 X + a_2 X^2)X\} = 0$$
$$E\{(Y - a_0 + a_1 X + a_2 X^2)X^2\} = 0$$

que desenvolupant dóna el sistema d'equacions:

$$\begin{aligned} E\{Y\} &= a_0 + a_1 E\{X\} + a_2 E\{X^2\} \\ E\{YX\} &= a_0 E\{X\} + a_1 E\{X^2\} + a_2 E\{X^3\} \\ E\{YX^2\} &= a_0 E\{X^2\} + a_1 E\{X^3\} + a_2 E\{X^4\} \end{aligned}$$

o matricialment

$$\begin{pmatrix} 1 & E\{X\} & E\{X^2\} \\ E\{X\} & E\{X^2\} & E\{X^3\} \\ E\{X^2\} & E\{X^3\} & E\{X^4\} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E\{Y\} \\ E\{XY\} \\ E\{X^2 Y\} \end{pmatrix}$$

Ara, l'error quadràtic és

$$E\{(Y - \hat{Y})Y\} = E\{Y^2\} - a_0 E\{Y\} + a_1 E\{XY\} + a_2 E\{X^2 Y\}$$

10. Les variables aleatòries (X, Y) són conjuntament gaussianes amb matriu de valors mitjans

$$\begin{pmatrix} m_X \\ m_Y \end{pmatrix}$$

i matriu de covariàncies

$$\begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \mu_{11} \\ \mu_{11} & \sigma_Y^2 \end{pmatrix}.$$

Calculeu la millor estimació de Y donada X.

La millor estimació de Y és lineal: $\hat{Y} = aX + b$. Imposant l'ortogonalitat de $Y - \hat{Y}$ i 1 i X tenim el sistema:

$$\begin{aligned} E\{Y\} &= aE\{X\} + b \\ E\{XY\} &= aE\{X^2\} + bE\{X\} \end{aligned}$$

amb solucions,

$$\begin{aligned} a &= \frac{E\{XY\} - E\{X\}E\{Y\}}{E\{X^2\} - (E\{X\})^2} = \frac{\mu_{11}}{\sigma_X^2} \\ b &= \frac{E\{Y\}E\{X^2\} - E\{X\}E\{XY\}}{E\{X^2\} - (E\{X\})^2} = m_Y - \frac{\mu_{11}}{\sigma_X^2} m_X \end{aligned}$$

Llavors

$$\hat{Y} = \frac{\mu_{11}}{\sigma_X^2}(X - m_X) + m_Y$$

11. Sigui (X, Y) una variable aleatòria bidimensional amb funció densitat conjunta

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{8}(6-x-y) & 0<x<2,\ 2<y<4 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

Calculeu:

(a) La millor estimació de X donada Y.

(b) $E\{E\{Y/X\}\}$.

(a) La millor estimació s'obté amb la expressió $\hat{X} = E\{X/Y\}$. Calculem primer $E\{X/Y=y\}$

$$E\{X/Y=y\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X/Y=y}(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x\frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}dx$$

Tenim

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dx = \int_0^2 \frac{1}{8}(6-x-y)dx = \frac{5-y}{4}$$

per a $2<y<4$.

Ara

$$E\{X/Y=y\} = \int_0^2 x\frac{6-x-y}{2(5-y)}dx = \frac{14-3y}{15-3y}$$

Finalment

$$\hat{X} = E\{X/Y\} = \frac{14-3y}{15-3y}$$

(b)

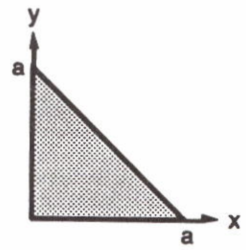
$$E\{E\{Y/X\}\} = E\{Y\} = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)dy = \int_2^4 y\frac{5-y}{4}dy = \frac{17}{6}$$

12. Sigui (X, Y) una variable aleatòria bidimensional amb funció densitat $a - x - y$ en el recinte de la figura (a constant) i zero fora. Es demana:

(a) Calculeu i dibuixeu la funció de densitat marginal de X.

(b) La millor estimació de Y donada X.

(c) La millor estimació lineal de Y donada X.



(a)

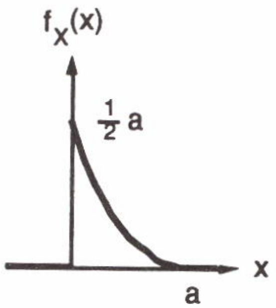
$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dy = \int_0^{a-x} (a - x - y)dy = \frac{1}{2}(a-x)^2$$

per a $0 < x < a$ i $f_X(x) = 0$ altrament.
Donat que f_X és una funció de densitat tenim

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) = \int_0^a \frac{1}{2}(a-x)^2 = \frac{a^3}{6} \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt[3]{6}$$

Llavors

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\sqrt[3]{6} - x)^2 & 0 < x < \sqrt[3]{6} \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$



(b) En primer lloc:

$$E\{Y/X=x\} = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_{Y/X=x} dy = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} y f_{XY}(x,y)dy}{f_X(x)} =$$

$$\frac{\int_0^{a-x} y(a-x-y)dy}{\frac{1}{2}(a-x)^2} = \frac{a-x}{3}$$

Per tant, la millor estimació és

$$\hat{Y} = E\{Y/X\} = -\frac{1}{3}X + \frac{\sqrt[3]{6}}{3}$$

(c) La millor estimació de Y donada X ja és lineal.

Problemes proposats

13. Sigui (X, Y) una variable aleatòria bidimensional uniforme en $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq x/2$. Trobeu la millor estimació, en mitjana quadràtica, de Y donada X.

14. Siguin N i X dues variables aleatòries incorrelades de valor mitjà 0 i variància 9 i 16 respectivament. Calculeu la millor estimació de X (en mitjana quadràtica) mitjançant l'expressió $a(X + N)$.

15. Sigui $\hat{Y}$ la millor estimació de Y donada X. Mostreu que, igual que amb la millor estimació lineal, l'error $\mathcal{E}_{NL} = Y - \hat{Y}$ és ortogonal a qualsevol funció no lineal de les dades $g(X)$. En particular, mostreu que $E\{(Y - \hat{Y})^2\} = E\{Y^2\} - E\{\hat{Y}^2\}$.

Respostes

13. $\hat{Y} = \frac{X}{4}$

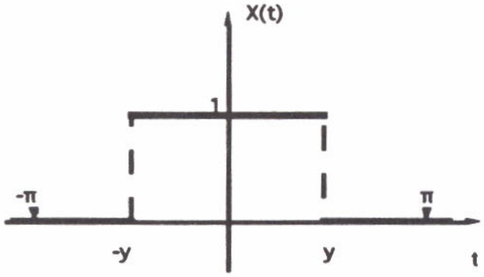
14. $\hat{X} = \frac{16}{25}(X + N)$

Capítol 6. Processos estocàstics

1. Sigui Y una variable aleatòria uniformement distribuïda en $(0,\pi)$. Definim el procés estocàstic

$$X(t)=\begin{cases} 1 & -y\le t\le y \\ 0 & \text{altrament}\end{cases}$$

Trobeu el valor mitjà d'aquest procés. És estacionari en sentit ampli?



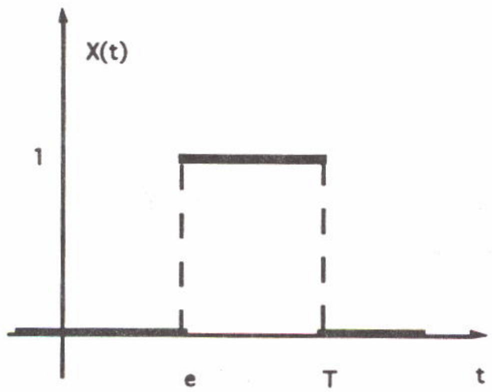
$$\begin{aligned} E\{X(t)\} &= \sum_{i=0,1} iP\{X(t)=i\} = P\{X(t)=1\} = P\{-Y\le t\le Y\} = \\ &= P\{|t|\le Y\} = \begin{cases} 0, & |t|\ge\pi \\ \displaystyle\int_{|t|}^{\pi} f_Y(y)dy = \frac{1}{\pi}\int_{|t|}^{\pi} dy = 1-\frac{|t|}{\pi}, & |t|<\pi \end{cases}\end{aligned}$$

Com que el valor mitjà depèn de t, el procés no és estacionari en sentit ampli.

2. Sigui E una variable aleatòria uniformement distribuïda en $(0,T)$. Calculeu el valor mitjà i l'autocorrelació del procés $X(t) = P_T(t)u(t-E)$ amb

$$P_T(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t \le T \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

i $u(t)$ la funció esglaó.



Per trobar el valor mitjà, apliquem el Teorema de l'Esperança:

$$\begin{aligned} m_X(t) &= E\{X(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} P_T(t)u(t-e)f_E(e)de \\ &= \begin{cases} 0, & t \notin [0,T] \\ \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T u(t-e)de = \dfrac{1}{T}\int_0^t de = \dfrac{t}{T}, & t \in [0,T] \end{cases} \end{aligned}$$

on s'ha usat que:

$$u(t-e) = \begin{cases} 1 & e < t \\ 0 & e \ge t \end{cases}$$

Pel que fa a l'autocorrelació,

$$\begin{aligned} R_X(t_1,t_2) &= E\{X(t_1)X(t_2)\} = E\{P_T(t_1)P_T(t_2)u(t_1-e)u(t_2-e)\} = \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T P_T(t_1)P_T(t_2)u(t_1-e)u(t_2-e)de = \\ &= \begin{cases} 0 & t_1 \notin [0,T] \text{ ó } t_2 \notin [0,T] \\ \displaystyle\int_0^{t_1} \frac{de}{T} = \frac{t_1}{T}, & t_1,t_2 \in [0,T], t_1 \le t_2 \\ \displaystyle\int_0^{t_2} \frac{de}{T} = \frac{t_2}{T}, & t_1,t_2 \in [0,T], t_1 \ge t_2 \end{cases} \end{aligned}$$

ja que

$$u(t_1-e)u(t_2-e) = \begin{cases} u(t_1-e) & t_1 \le t_2 \\ u(t_2-e) & t_2 \le t_1 \end{cases}$$

3. Sigui $X(t)$ un procés de Poisson de paràmetre λ. Les seves transicions es "marquen" amb probabilitat p independentment unes d'altres. Calculeu la probabilitat que en $(0, t)$ no hi hagi transicions marcades.

Sigui A el succés "en $(0, t)$ no hi ha transicions marcades". Llavors,

$$P(A) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X_t = k) P(A/X_t = k)$$

on $\{X_t = k\} \equiv \{X(t) = k\}$ denota el succés "en $(0, t)$ s'han produït exactament k transicions" i, per tant, al ser un procés de Poisson,

$$P(X_t = k) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}, k = 0, 1, 2, \ldots$$

Per altra banda,

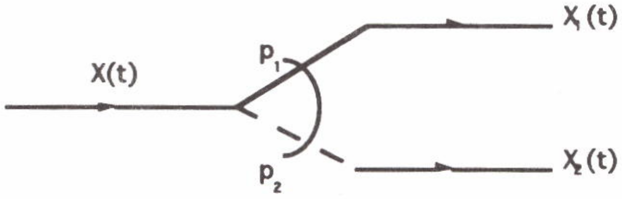
$$P(A/X_t = k) = P(1a \text{ transició no marcada}, 2a \text{ transició no marcada}, \cdots, ka \text{ transició no marcada}) = (1-p)^k$$

Substituint s'obté:

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} (1-p)^k = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t(1-p))^k}{k!} = \\ &= e^{-\lambda t} e^{\lambda t(1-p)} = e^{-\lambda t p} \end{aligned}$$

4. Donat un procés de Poisson $X(t)$ de paràmetre λ, es construeixen els processos $X_1(t)$ i $X_2(t)$ assignant cada transició de $X(t)$, independentment, a $X_1(t)$ o $X_2(t)$ amb probabilitat p_1 i p_2 respectivament. Calculeu la funció de probabilitat de $X_1(t)$.

Suposant $p_1 + p_2 = 1$, podem representar la situació mitjançant l'esquema següent:



Denotant amb $\{X_1(t) = k\}$ el succés "en $(0,t)$ s'han assignat k transicions a $X_1(t)$", tenim:

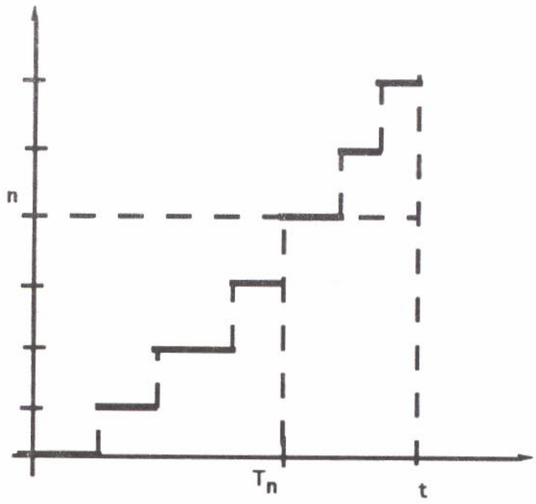
$$P_{X_1(t)}(k) = P\{X_1(t) = k\} = \sum_{n=k}^{\infty} P\{X(t) = n\}P\{X_1(t) = k/X(t) = n\}$$

per a $k = 0, 1, 2, \cdots, n$, però $P\{X_1(t) = k/X(t) = n\}$ és la probabilitat que, havent-se produït n transicions, s'assignin k a $X_1(t)$, que és la binomial $\binom{n}{k}p_1^k p_2^{n-k}$. Llavors, ens queda:

$$\begin{aligned}
P\{X_1(t) = k\} &= \sum_{n=k}^{\infty} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}\binom{n}{k}p_1^k p_2^{n-k} = \\
&= e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}p_1^k \sum_{n=k}^{\infty}(\lambda t)^{n-k}\frac{p_2^{n-k}}{(n-k)!} \\
&= e^{-\lambda t}\frac{(p_1\lambda t)^k}{k!}e^{\lambda t p_2} = e^{-p_1\lambda t}\frac{(p_1\lambda t)^k}{k!}
\end{aligned}$$

És a dir, $X_1(t)$ és un procés de Poisson de paràmetre $p_1\lambda$.

5. Sigui T_n l'instant en què es produeix l'enèsima transició d'un procés de Poisson. Calculeu la seva funció de distribució i la de densitat.

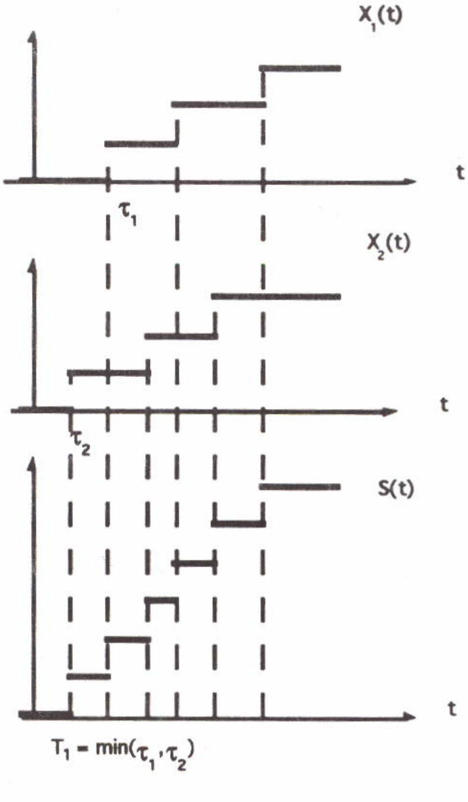


$$
\begin{aligned}
F_{T_n}(t) &= P(T_n \leq t) = P\{X(t) \geq n\} = \\
&= \sum_{k=n}^{\infty} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!} = e^{-\lambda t}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(\lambda t)^k}{k!}, \quad \text{per } t \geq 0 \\
f_{T_n}(t) &= \frac{d}{dt}F_{T_n}(t) = -\lambda e^{-\lambda t}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(\lambda t)^k}{k!} + e^{-\lambda t}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\lambda^k k t^{k-1}}{k!} = \\
&= -e^{-\lambda t}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\lambda^{k+1}t^k}{k!} + e^{-\lambda t}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\lambda^k t^{k-1}}{(k-1)!} = \\
&= \lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}, \quad \text{per } t \geq 0
\end{aligned}
$$

Nota: Si $n = 1$, queda $f_{T_1}(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$, és a dir, T_1 és una variable aleatòria exponencial de paràmetre λ, igual que el temps entre dues transicions consecutives.

6. Siguin X_1 i X_2 dos processos de Poisson independents de paràmetres λ_1 y λ_2 respectivament. Considereu el procés $X_1 + X_2$. Sigui T_1 el temps fins a la seva primera transició. Calculeu la funció de densitat de T_1

Sigui $S(t) = X_1(t) + X_2(t)$ i τ_i, $i = 1, 2$, el temps fins a la primera transició del procés $X_i(t)$. Gràficament:



$$X_1(t), X_2(t) \text{ Independents} \Longrightarrow \tau_1, \tau_2 \text{ Independents}$$

$$\begin{aligned}
F_{T_1}(t) &= P(T_1 \le t) = P\{\min(\tau_1, \tau_2) \le t\} = \\
&= P(\tau_1 \le t \text{ ó } \tau_2 \le t) = 1 - P(\tau_1 \ge t, \tau_2 \ge t) = \\
&= 1 - P(\tau_1 \ge t)P(\tau_2 \ge t) = 1 - [1 - F_{\tau_1}(t)][1 - F_{\tau_2}(t)] = \\
&= 1 - e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_2 t} = 1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}
\end{aligned}$$

ja que, per a $i = 1, 2$

$$\begin{aligned} F_{\tau_i}(t) &= P(\tau_i \leq t) = P\{X_i(t) \geq 1\} = \\ &= 1 - P\{X_i(t) = 0\} = 1 - e^{-\lambda_i t}\frac{(-\lambda_i t)^0}{0!} = 1 - e^{-\lambda_i t} \end{aligned}$$

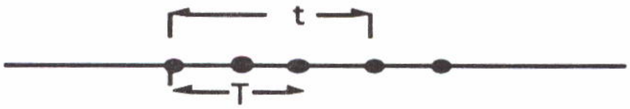
(Vegeu el problema 6.5 per a $n = 1$). Finalment,

$$f_{T_1}(t) = \frac{d}{dt}F_{T_1}(t) = (\lambda_1 + \lambda_2)e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}$$

per a $t > 0$, és a dir, T_1 és una variable aleatòria exponencial de paràmetre $\lambda_1 + \lambda_2$.

7. Sigui $X(t)$ un procés de Poisson de paràmetre λ, i T el temps transcorregut entre una transició i la que fa dues després d'ella (vegeu la figura). Calculeu la funció densitat i el valor mitjà de T. Interpreteu el valor obtingut per al valor mitjà a partir del significat de λ.

Calculem en primer lloc la funció de distribució. Per això, fixem l'origen de temps al produir-se la transició que prenem com a referència.



$$\begin{aligned} F_T(t) &= P(T \leq t) = P\{X(t) \geq 2\} = 1 - P\{X(t) \leq 1\} = \\ &= 1 - P\{X(t) = 0\} - P\{X(t) = 1\} = 1 - e^{-\lambda t} - e^{-\lambda t}\lambda t, t \geq 0 \end{aligned}$$

Llavors,

$$f_T(t) = \frac{d}{dt}F_T(t) = \lambda e^{-\lambda t} - \lambda e^{-\lambda t} + \lambda^2 t e^{-\lambda t} = \lambda^2 t e^{-\lambda t}, t \geq 0$$

i

$$E(T) = \lambda^2 \int_0^\infty t^2 e^{-\lambda t} = \lambda^2 \frac{2}{\lambda^3} = \frac{2}{\lambda}$$

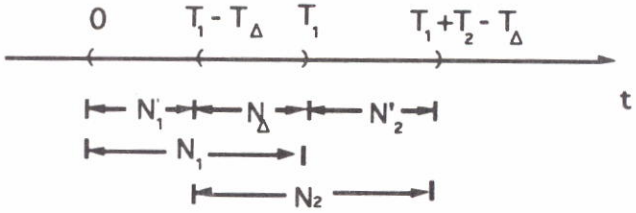
(integrant per parts dos cops).

En un procés de Poisson, λ representa el nombre mitjà de transicions per unitat de temps; per tant, $1/\lambda$ és el temps mitjà entre dues transicions consecutives. Així, en el nostre cas, $E(T) = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} = \frac{2}{\lambda}$

8. Sigui λ el nombre mitjà de partícules emeses per una substància radioactiva en 1 s. Denotem amb N_1 i N_2 el nombre de partícules emeses en els intervals $(0, T_1)$ i $(T_1 - T_\Delta, T_1 - T_\Delta + T_2)$, $(0 < T_\Delta < T_1)$ respectivament. Suposant que el procés d'emissió és de Poisson, calculeu $E(N_1 N_2)$ en els casos següents:

(a) $T_2 \geq T_\Delta$

(b) $T_2 \leq T_\Delta$

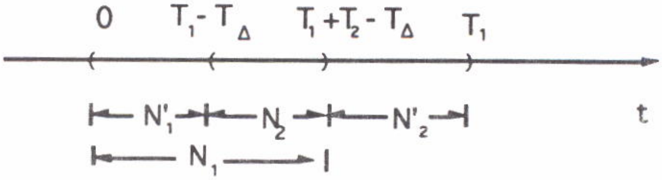


(a) Per realitzar el càlcul, és necessari considerar intervals que no es solapin, ja que això implicarà que els respectius nombres de partícules emeses en ells són independents. Així:

$$
\begin{aligned}
E(N_1 N_2) &= E\{(N_1' + N_\Delta)(N_2' + N_\Delta)\} = E(N_1' N_2) + E(N_\Delta N_2') + E(N_\Delta^2) = \\
&= E(N_1')E(N_2) + E(N_\Delta)E(N_2') + E(N_\Delta^2) = \\
&= \lambda T_1' \lambda T_2 + \lambda T_\Delta \lambda T_2' + \lambda T_\Delta + \lambda^2 T_\Delta^2 = \\
&= \lambda^2 T_1' T_2 + \lambda^2 T_\Delta T_2 + \lambda T_\Delta = \lambda^2 T_2 T_1 + \lambda T_\Delta
\end{aligned}
$$

on s'ha usat la notació $T_i' = T_i - T_\Delta$, $i = 1, 2$, i el fet que si N_T és el nombre de partícules emeses en un interval de durada T, $E(N_T) = \lambda T$ i $E(N_T^2) = \text{VAR}\,(N_T) + E(N_T)^2 = \lambda T + \lambda^2 T^2$

(b) Denotant $T_i' = |T_i - T_\Delta|$, $i = 1, 2$, tenim ara:



$$
\begin{aligned}
E(N_1N_2) &= E\{(N_1' + N_2 + N_2')N_2\} = E\{(N_1' + N_2')N_2\} + E(N_2^2) = \\
&= E(N_1' + N_2')E(N_2) + E(N_2^2) = \\
&= \lambda(T_1' + T_2')\lambda T_2 + \lambda T_2 + \lambda^2 T_2^2 = \\
&= \lambda^2 T_2(T_1' + T_2' + T_2) + \lambda T_2 = \lambda^2 T_2 T_1 + \lambda T_2
\end{aligned}
$$

9. El procés estacionari en sentit ampli $X(t)$ és normal de valor mitjà 0 i funció de densitat espectral $S(\omega) = \frac{1}{4+\omega^2}$. Calculeu la probabilitat que, per un t donat, $X(t)$ prengui valors entre 0.5 i 1. Doneu el resultat mitjançant la funció $erf(x)$ definida per:

$$\text{erf}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

Donat que $X(t)$ és estacionari en sentit ampli (al ser normal també és estacionari en sentit estricte), la funció de covariància només depèn de $\tau = t_1 - t_2$:

$$C(t_1, t_2) = C(\tau) = R(\tau) - m^2 = R(\tau)$$

ja que $m = 0$. Per calcular $C(t,t) = C(0) = R(0)$ usem la fórmula

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega\tau} S(\omega) d\omega$$

per tant

$$R(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{4+\omega^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}d\omega}{1+(\frac{\omega}{2})^2} = \frac{1}{2\pi} \arctan(\frac{\omega}{2})\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{4}$$

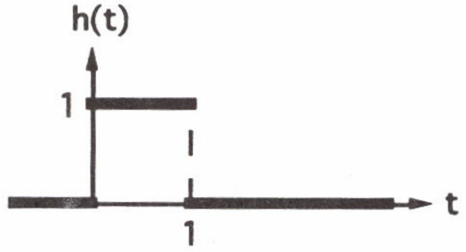
Llavors, $\sigma_{X(t)} = \sqrt{C(0)} = 1/2$ i, per tant,

$$P\{0.5 \leq X(t) \leq 1\} = P\{\sigma_{X(t)} \leq X(t) \leq 2\sigma_{X(t)}\} = \text{erf}(2) - \text{erf}(1)$$

(Recordeu que, per a cada t, $X(t)$ és una variable aleatòria gaussiana.)

10. El procés estacionari $X(t,\omega)$ és normal de valor mitjà 1 i de funció de covariància $e^{-2|\tau|}$. Calculeu la funció de densitat de la variable aleatòria $I = \int_0^1 X(t,\omega)dt$.

Si el procés $X(t)$, gaussià, passa a través d'un filtre lineal amb resposta impulsional $h(t)$,



s'obté el procés $I(t)$, també gaussià,

$$I(t) = X(t) * h(t) = \int_{t-1}^{t} X(\tau)d\tau$$

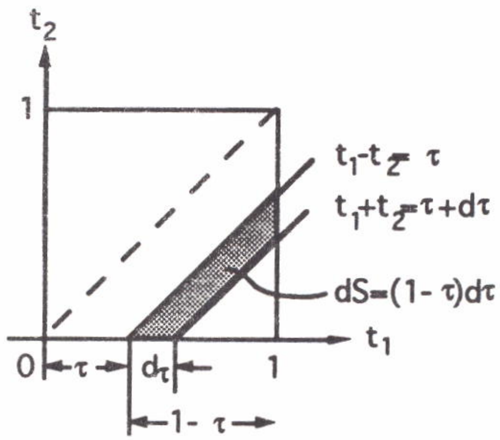
(vegeu el problema 6.13). Per tant, $I(1) = \int_0^1 X(\tau)d\tau = I$ és una variable aleatòria gaussiana i per caracteritzar-la n'hi ha prou amb calcular el seu valor mitjà m_I i la seva variància σ_I^2.

$$\begin{aligned}
m_I &= E(I) = \int_0^1 E\{X(t)\}dt = \int_0^1 dt = 1 \\
\sigma_I^2 &= E(I^2) - E(I)^2 = E(I^2) - 1 \\
E(I^2) &= E\left\{\int_0^1 X(t_1)dt_1 \int_0^1 X(t_2)dt_2\right\} = \int_0^1 \int_0^1 E\{X(t_1)X(t_2)\}dt_1 dt_2
\end{aligned}$$

Per calcular aquesta integral fem el canvi $\tau = t_1 - t_2$, amb això:

$$\int_0^1 \int_0^1 \longrightarrow \int_{-1}^1$$

i $E\{X(t_1)X(t_2)\} = R(\tau) = C(\tau) + m^2 = e^{-2|\tau|} + 1$.



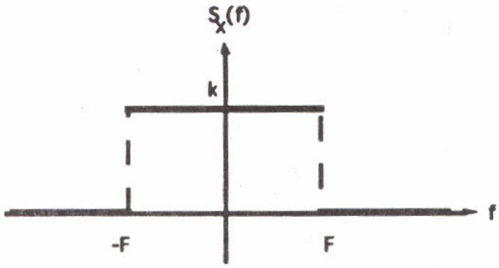
Llavors,

$$
\begin{aligned}
E(I^2) &= \int_{-1}^{1}(1+e^{-2|\tau|})(1-|\tau|)d\tau = 2\int_{0}^{1}(1+e^{-2|\tau|})(1-|\tau|)d\tau = \\
&= 2\int_{0}^{1}(1-|\tau|)d\tau + 2\int_{0}^{1}e^{-2|\tau|}(1-|\tau|)d\tau = \\
&= 1+2(\frac{1}{4}+\frac{e^{-2}}{4}) = \frac{3}{2}+\frac{e^{-2}}{2}
\end{aligned}
$$

Per tant, $\sigma_I^2 = \frac{1}{2}(1+e^{-2})$, i

$$
f_I(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_I} e^{-\frac{1}{2}(\frac{\alpha - m_I}{\sigma_I})^2}
$$

11. Sigui $X(t)$ un procés estocàstic amb espectre de potència



Mostreu que $X(nT)$ i $X(mT)$ (amb n i m enters diferents i $T = 1/2F$) són ortogonals.

Hem de veure que $E\{X(nT)X(mT)\} = R_X[(n-m)T] = 0,\ n \neq m$. Calculem la funció d'autocorrelació,

$$\begin{aligned} R_X(t) &= \mathcal{F}^{-1}\{S_X(f)\} = \int_{-F}^{F} k e^{j2\pi ft} df = k \left. \frac{e^{j2\pi ft}}{j2\pi ft} \right|_{-F}^{F} = \\ &= k \frac{\sin(2\pi FT)}{\pi Ft} \end{aligned}$$

Llavors,

$$R_X[(n-m)T] = k \frac{\sin(2\pi F(n-m)T)}{\pi F(n-m)t} = k \frac{\sin(n-m)\pi}{\frac{\pi}{2}(n-m)} = 0$$

si $n \neq m$.

12. Calculeu l'espectre de potència dels processos:

(a) $Y(t) = X(t-a) + X(t+a)$

(b) $Z(t) = X(t) - X(t-T)$

sabent que el procés estacionari $X(t)$ té per espectre $S_X(f)$.

(a)

$$\begin{aligned} R_Y(t+\tau,t) &= E\{Y(t+\tau)Y(t)\} = \\ &= E\{[X(t+\tau-a)+X(t+\tau+a)][X(t-a)+X(t+a)]\} = \\ &= 2R_X(\tau)+R_X(\tau-2a)+R_X(\tau+2a) \end{aligned}$$

ja que $(t+\tau-a)-(t-a)=(t+\tau+a)-(t+a)=\tau$, $(t+\tau-a)-(t+a)=\tau-2a$ i $(t+\tau+a)-(t-a)=\tau+2a$. Així, recordant les propietats de la transformada de Fourier:

$$\begin{aligned} S_Y(f) &= 2S_X(f)+S_X(f)[e^{-j2\pi f2a}+e^{j2\pi f2a}] = \\ &= 2S_X(f)[1+\cos 4\pi fa] = 4S_X(f)\cos^2 2\pi fa \end{aligned}$$

<u>Un altre mètode</u>: Interpretar $Y(t)$ com la sortida d'un filtre amb resposta impulsional $h(t)=\delta(t+a)+\delta(t-a)$ i entrada $X(t)$. La funció de transferència és: $H(f)=\mathcal{F}\{h(t)\}=e^{-j2\pi f2a}+e^{j2\pi f2a}=2\cos(2\pi fa)$.

Per tant,

$$S_Y(f)=|H(f)|^2S_X(f)=4S_X(f)\cos^2(2\pi fa)$$

(b) En aquest cas, $Z(t)$ és la sortida d'un filtre amb $h(t)=\delta(t)-\delta(t-T)$. Per tant, $H(f)=1-e^{-j2\pi fT}$ i queda:

$$\begin{aligned} S_Z(f) &= S_X(f)\left|1-e^{-j2\pi fT}\right|^2 = \\ &= S_X(f)(1-e^{-j2\pi fT})(1-e^{j2\pi fT}) = \\ &= S_X(f)(2-e^{-j2\pi fT}-e^{j2\pi fT}) = \\ &= 2S_X(f)(1-\cos 2\pi ft) = 4S_X(f)\sin^2 \pi fT \end{aligned}$$

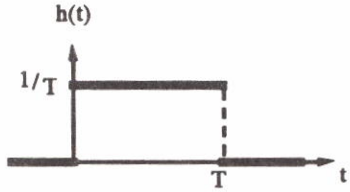
Noteu que, en ambdós casos, la funció de transferència es pot obtenir directament, observant la sortida quan la entrada és $e^{j2\pi ft}$. Així, per exemple, en el primer cas: $X(t)=e^{j2\pi ft}$

$$\begin{aligned} Y(t) &= X(t-a)+X(t+a)=e^{j2\pi f(t-a)}+e^{j2\pi f(t+a)} = \\ &= e^{j2\pi ft}(e^{-j2\pi fa}+e^{j2\pi fa}) = X(t)H(f) \end{aligned}$$

13. Donat el procés estacionari $X(t,\omega)$ d'espectre $S_X(f)$. Calculeu l'espectre de

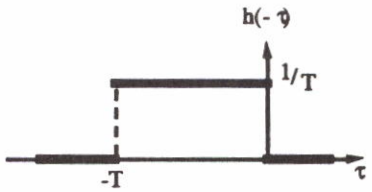
$$Y(t,\omega) = \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} X(\tau,\omega)d\tau$$

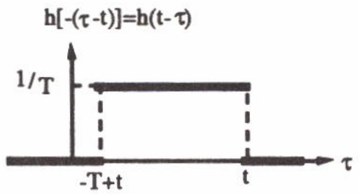
El procés $Y(t)$ és la sortida d'un filtre amb resposta impulsional



En efecte:

$$Y(t) = X(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{t-T}^{t} X(\tau)d\tau$$





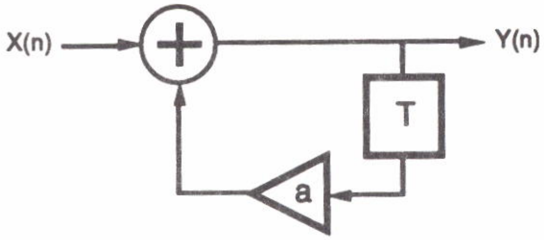
La funció de transferència és

$$H(f) = \mathcal{F}\{h(t)\} = \int_0^T \frac{1}{T}e^{-j2\pi ft}dt = \frac{1}{T}\left.\frac{e^{-j2\pi ft}}{-j2\pi f}\right|_0^T = e^{-j2\pi f\frac{T}{2}}\frac{\sin \pi fT}{\pi fT}$$

Llavors,

$$S_Y(f) = S_X(f)|H(f)|^2 = S_X(f)\left(\frac{\sin \pi fT}{\pi fT}\right)^2 = S_X(f)\text{sinc}^2 fT$$

14. L'esquema representa un filtre discret amb "memòria infinita" (és a dir, cada valor de la sortida depèn de tots els valors anteriors de l'entrada) amb $|a| < 1$. Sabent que $R_X(n) = k\delta(n)$, k constant, trobeu l'espectre de potència de $Y(n)$.



(a) Calculant primer $R_Y(n)$

(b) Aplicant la fórmula que relaciona les densitats espectrals de $X(n)$ i $Y(n)$.

(c) Particularitzeu el resultat quan $R_Y(0) = 1$ i $R_Y(1) = 1/2$.

(a) Segons l'esquema $Y(n) = X(n) + aY(n-1)$, és a dir:

$$Y(n) = X(n) + aY(n-1) = X(n) + aX(n-1) + a^2Y(n-2) =$$
$$= \ldots = X(n) + aX(n-1) + a^2X(n-2) + \ldots + a^mY(n-m),$$

per tot $m > 0$.
Com que $|a| < 1$, i suposant $Y(n)$ acotada, tenim $\lim_{m\to\infty} a^mY(n-m) = 0$. Per tant,

$$Y(n) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a^\nu X(n-\nu)$$

La funció d'autocorrelació és ($n > 0$),

$$\begin{aligned} R_Y(n) &= E\{Y(m)Y(m-n)\} = E\{[X(m) + aY(m-1)]Y(m-n)\} = \\ &= E\{X(m)Y(m-n)\} + aR_Y(n-1) \end{aligned}$$

però,

$$E\{X(m)Y(m-n)\} = E\{X(m)\sum_{\nu=0}^{\infty} a^\nu X(m-n-\nu)\} =$$
$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} a^\nu E\{X(m)X(m-n-\nu)\} = \sum_{\nu=0}^{\infty} a^\nu R_X(n+\nu) = 0$$

Per tant,

$$R_Y(n) = aR_Y(n-1) = a^2R_Y(n-2) = \cdots = a^nR_Y(0)$$

on:

$$\begin{aligned} R_Y(0) &= E\{Y^2(n)\} = E\{[X(n)+aY(n-1)]^2\} = \\ &= E\{X^2(n)\} + 2aE\{X(n)Y(n-1)\} + a^2E\{Y^2(n-1)\} = \\ &= R_X(0) + a^2R_Y(0) = k + a^2R_Y(0) \end{aligned}$$

ja que, segons hem vist, $E\{X(m)Y(m-n)\} = 0$. Aïllant $R_Y(0)$,

$$R_Y(0) = \frac{k}{1-a^2}$$

Substituint aquest valor a la fórmula obtinguda i considerant que $R_Y(n)$ és una funció parella, ens queda finalment:

$$R_Y(n) = \frac{k}{1-a^2}a^{|n|}$$

Llavors,

$$S_Y(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_Y(n)e^{-j2\pi fnT} = \frac{k}{1-a^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{|n|}e^{-j2\pi fnT}$$

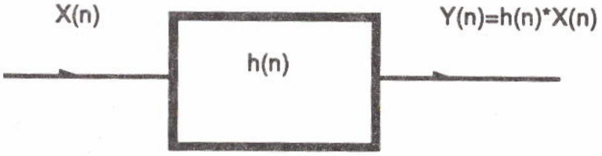
on

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{|n|}e^{-j2\pi fnT} &= \sum_{n=1}^{\infty}(ae^{j2\pi fT})^n + 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(ae^{-j2\pi fT})^n = \\ &= \frac{ae^{j2\pi fT}}{1-ae^{j2\pi fT}} + 1 + \frac{ae^{-j2\pi fT}}{1-ae^{-j2\pi fT}} = \\ &= 1 + \frac{2a\cos 2\pi fT - 2a^2}{1+a^2-2a\cos 2\pi fT} = \frac{1-a^2}{1+a^2-2a\cos 2\pi fT} \end{aligned}$$

Per tant,

$$S_Y(f) = \frac{k}{1+a^2-2a\cos 2\pi fT}$$

(b) Per aplicar la fórmula $S_Y(f) = S_X(f)|H(f)|^2$, necessitem calcular la funció de transferència $H(f) = \mathcal{F}\{h(n)\}$



Comparant aquesta expressió amb la calculada abans, veiem que:

$$h(n) = \begin{cases} a^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

Per tant,

$$H(f) = \sum_{-\infty}^{\infty} h(n) e^{-j2\pi f n T} = \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j2\pi fT})^n = \frac{1}{1 - ae^{-j2\pi fT}}$$

Per altra banda,

$$S_X(f) = \mathcal{F}\{R_X(n)\} = k\mathcal{F}\{\delta(n)\} = k$$

En definitiva,

$$\begin{aligned} S_Y(f) = S_X(f)H(f)H(f)^* &= \frac{k}{(1 - ae^{-j2\pi fT})(1 - ae^{j2\pi fT})} = \\ &= \frac{k}{1 - a(e^{-j2\pi fT} + e^{j2\pi fT}) + a^2} = \\ &= \frac{k}{1 + a^2 - 2a\cos 2\pi fT} \end{aligned}$$

(c) Els valors de $R_X(0)$ i $R_X(1)$ determinen les constants a i k. En efecte, particularitzant la fórmula obtinguda per $R_Y(n)$ per al cas $n = 1$, $R_Y(1) = aR_Y(0)$, d'on

$$a = \frac{R_Y(1)}{R_Y(0)} = \frac{1}{2}$$

El valor de k s'obté a partir de :

$$R_Y(0) = \frac{k}{1 - a^2} = \frac{k}{1 - \frac{1}{4}} = 1;$$

Per tant $k = 3/4$. Substituint aquests valors, resulta:

$$S_Y(f) = \frac{3/4}{1 + \frac{1}{4} - \cos 2\pi fT} = \frac{3}{5 - 4\cos 2\pi fT}$$

15. Siguin A i B dues variables aleatòries incorrelades de valor mitjà zero i variància σ^2. A partir d'elles es construeix el procés $X(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$ (ω_0 constant).

(a) És $X(t)$ estacionari en sentit ampli?

(b) És $X(t)$ ergòdic en valor mitjà?

(c) És $X(t)$ ergòdic en autocorrelació?

(a) $X(t)$ és estacionari en sentit ampli si el seu valor mitjà és constant i la seva autocorrelació només depén de $\tau = t_1 - t_2$.

$$m_X(t) = E\{X(t)\} = E\{A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t\} = E(A)\cos\omega_0 t + E(B)\sin\omega_0 t$$

$$\begin{aligned}
&R_X(t+\tau,t) = E\{X(t+\tau)X(t)\} = \\
&E\{[A\cos\omega_0(t+\tau) + B\sin\omega_0(t+\tau)][A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t]\} = \\
&E(A^2)\cos\omega_0(t+\tau)\cos\omega_0 t + E(AB)[\cos\omega_0(t+\tau)\sin\omega_0 t + \\
&+\sin\omega_0(t+\tau)\cos\omega_0 t] + E(B^2)\sin\omega_0(t+\tau)\sin\omega_0 t = \\
&\sigma^2[\cos\omega_0(t+\tau)\cos\omega_0 t + \sin\omega_0(t+\tau)\sin\omega_0 t] = \\
&= \sigma^2\cos\omega_0\tau
\end{aligned}$$

ja que $E(AB) = E(A)E(B) = 0$ i $\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta)$ Així, $X(t)$ és estacionari en sentit ampli.

(b) $X(t)$ és ergòdic en valor mitjà si el seu valor mitjà (mostral), m_X (constant) coincideix amb el seu valor mitjà temporal, $\mathcal{M}$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} &= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X(t)dt = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}(A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t)dt = \\
&= \lim_{t\to\infty}\frac{A}{2T}\frac{1}{\omega_0}\sin\omega_0 t|_{-T}^{T} + \lim_{t\to\infty}\frac{B}{2T}\frac{1}{\omega_0} - \cos\omega_0 t|_{-T}^{T} = \\
&= \lim_{t\to\infty}\frac{A\sin\omega_0 t}{\omega_0 t} + \lim_{t\to\infty}\frac{-B\cos\omega_0 t}{\omega_0 t} = 0 = m_X
\end{aligned}$$

Per tant, $X(t)$ és ergòdic en valor mitjà.

(c) $X(t)$ és ergòdic en autocorrelació si la seva autocorrelació, $R_X(\tau)$, coincideix amb la seva autocorrelació temporal, $\mathcal{R}(\tau)$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(\tau) &= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X(t+\tau)X(t)dt = \\
&= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}[A\cos\omega_0(t+\tau) + B\sin\omega_0(t+\tau)][A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t]dt = \\
&= \lim_{t\to\infty}\{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}[A^2\cos\omega_0(t+\tau)\cos\omega_0 t + B^2\sin\omega_0(t+\tau)\sin\omega_0 t]dt\} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{t\to\infty} \frac{A^2}{4T} \int_{-T}^{T} [\cos\omega_0\tau + \cos\omega_0(2t+\tau)]dt + \\
&+ \lim_{t\to\infty} \frac{B^2}{4T} \int_{-T}^{T} [\cos\omega_0\tau - \cos\omega_0(2t+\tau)]dt = \\
&= \frac{1}{2}(A^2+B^2)\cos\omega_0\tau \neq R_X(\tau)
\end{aligned}$$

on s'han usat les igualtats següents:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} AB[\cos\omega_0(t+\tau)\sin\omega_0 t + \sin\omega_0(t+\tau)\cos\omega_0 t]dt =$$

$$= AB[\lim_{t\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \sin\omega_0(2t+\tau)dt] = 0$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\}$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\}$$

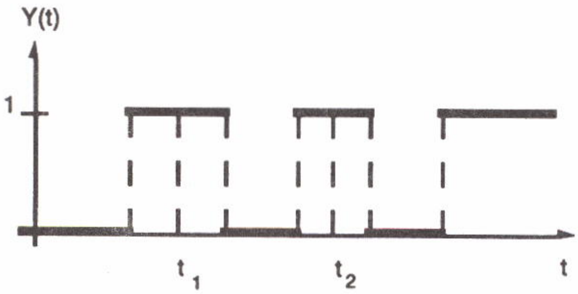
$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \cos\omega_0(2t+\tau)dt = 0$$

En resum, $X(t)$ no és ergòdic en autocorrelació.

16. A partir d'un procés de Poisson, $X(t)$, de paràmetre λ, es defineix el procés

$$Y(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } X(t) \text{ és senar} \\ 0 & \text{si } X(t) \text{ és parell} \end{cases}$$

(Noteu que, si $Z(t)$ és el "senyal telegràfic aleatori", llavors $Y(t) = \frac{Z(t)+1}{2}$.) Trobeu la millor estimació de $Y(t_2)$ donada $Y(t_1)$, $t_2 > t_1$. Quins valors prèn aquesta estimació quan l'instant t_2 és molt proper a t_1 o molt llunyà a t_1?



$Y(t_1)$ i $Y(t_2)$ són variables aleatòries discretes que prenen els valors 0 o 1. Siguin $Y_1 \equiv Y(t_1)$ i $Y_2 \equiv Y(t_2)$. Llavors, la millor estimació de Y_2 donada Y_1 serà:

$$\hat{Y}_2 = E(Y_2|Y_1) = \sum_{y_2=0,1} y_2 P(Y_2 = y_2|Y_1 = y_1)$$

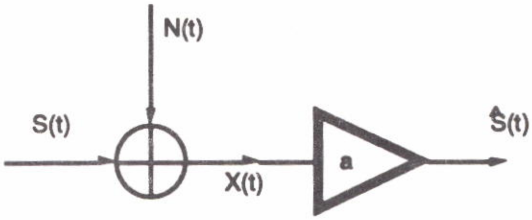
Cal distingir dos casos:

$$\begin{aligned}
\text{Si } y_1 = 0 : \hat{Y}_2 &= P(Y_2 = 1|Y_1 = 0) = P\{X(t_2) - X(t_1)\text{senar}\} = \\
&= P\{X(t_2) - X(t_1) = 1\} + P\{X(t_2) - X(t_1) = 3\} + \cdots = \\
&= e^{-\lambda(t_2-t_1)}\{\lambda(t_2 - t_1) + \frac{(\lambda(t_2 - t_1))^3}{3!} + \cdots\} = \\
&= e^{-\lambda(t_2-t_1)} \sinh \lambda(t_2 - t_1) \\
\text{Si } y_1 = 1 : \hat{Y}_2 &= P(Y_2 = 1|Y_1 = 1) = P\{X(t_2) - X(t_1)\text{parell}\} = \\
&= e^{-\lambda(t_2-t_1)}\{1 + \frac{(\lambda(t_2 - t_1))^2}{2!} + \frac{(\lambda(t_2 - t_1))^4}{4!} + \cdots\} = \\
&= e^{-\lambda(t_2-t_1)} \cosh \lambda(t_2 - t_1)
\end{aligned}$$

Els valors d'aquestes estimacions són els esperats quan T_2 és molt proper o molt llunyà de T_1. En efecte,

$$\hat{Y}_2 = \left\{ \begin{array}{ll} (y_1 = 0) & \frac{1}{2}[1 - e^{-2\lambda(t_2-t_1)}] \\ (y_1 = 1) & \frac{1}{2}[1 + e^{-2\lambda(t_2-t_1)}] \end{array} \right\} \longrightarrow y_1 = \begin{cases} Y(t_1) & \text{si } t_2 \to t_1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } t_2 \to \infty \end{cases}$$

17. Determineu la constant a perquè el senyal $\hat{S}(t)$ sigui la millor estimació lineal en mitjana quadràtica de $S(t)$. Trobeu també l'error d'aquesta estimació. Suposeu que els processos $S(t)$ i $N(t)$ són incorrelats, tenen valor mitjà zero i les seves potències mitjanes són 15 mW i 5 mW respectivament.



Aplicant el principi d'ortogonalitat :

$$\begin{aligned} E\{[S(t)-\hat{S}(t)]X(t)\} &= E\{[S(t)-aX(t)]X(t)\} = \\ &= E\{S(t)X(t)\} - aE\{X^2(t)\} = 0 \\ E\{S(t)X(t)\} &= E\{S(t)[S(t)+N(t)]\} = E\{S^2(t)\} = 15 \end{aligned}$$

ja que, al tenir incorrelació, $E\{S(t)N(t)\} = E\{S(t)\}E\{X(t)\} = 0$.
Ara, $E\{X^2(t)\} = E\{[S(t)+N(t)]^2\} = E\{S^2(t)\} + E\{N^2(t)\} = 15+5 = 20$, per tant, ens queda l'equació

$$15 - 20a = 0$$

d'on $a = 3/4$. Pel que fa a l'error quadràtic mitjà de l'estimació,

$$\begin{aligned} \varepsilon &= E\{[S(t)-\hat{S}(t)]^2\} = E\{[S(t)-\hat{S}(t)]S(t)\} = \\ &= E\{S^2(t)\} - E\{aX(t)S(t)\} = (1-a)E\{S^2(t)\} = \\ &= \left(1-\frac{3}{4}\right)15 = \frac{15}{4} \end{aligned}$$

(en mW, ja que representa la potència mitjana del "senyal diferència" o "error").

18. Calculeu l'estimador lineal òptim de

$$I = \int_0^T X(t,\omega)dt$$

$T > 0$ en funció de $X(0)$ i $X(T)$ sabent que $X(t,\omega)$ és un procés estacionari amb autocorrelació $e^{-|\tau|}$.

L'estimació serà de la forma $\hat{I} = aX(0) + bX(T)$, amb constants a i b que calcularem aplicant el principi d'ortogonalitat:

$$I - \hat{I} \perp X(0) \quad \Longrightarrow \quad E\left\{\left[\int_0^T X(t)dt - aX(0) - bX(T)\right] X(0)\right\} = 0$$

$$I - \hat{I} \perp X(T) \quad \Longrightarrow \quad E\left\{\left[\int_0^T X(t)dt - aX(0) - bX(T)\right] X(T)\right\} = 0$$

d'on:

$$\int_0^T E\{X(t)X(0)\}dt - aE\{X^2(0)\} - bE\{X(t)X(0)\} =$$

$$\int_0^T R(t-T)dt \; - aR(0) - bR(T) = \int_0^T e^{-t}dt \; - a - be^{-T} =$$

$$1 - e^{-T} - a - be^{-T} = 0$$

i

$$\int_0^T E\{X(t)X(t)\}dt - aE\{X(0)X(T)\} - bE\{X^2(t)\} =$$

$$\int_0^T R(t-T)dt \; - aR(T) - bR(0) = \int_0^T e^{-(T-t)}dt \; - ae^{-T} - b =$$

$$1 - e^{-T} - ae^{-T} - b = 0$$

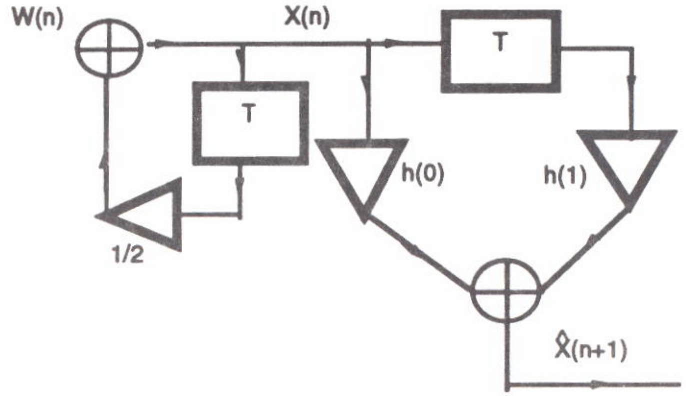
Per tant,

$$\left.\begin{array}{rcl} 1 - e^{-T} & = & a + be^{-T} \\ 1 - e^{-T} & = & ae^{-T} + b \end{array}\right\}$$

D'aquí

$$a = b = \frac{1 - e^{-T}}{1 + e^{-T}}$$

19. Donat l'esquema



on $E\{W(n)\} = 0$ i $R_W(n) = 3\delta(n)$, calculeu $h(0)$ i $h(1)$ per tal que $\hat{X}(n+1)$ sigui la millor estimació lineal en mitjana quadràtica de $X(n+1)$. Trobeu l'error quadràtic mitjà.

Segons l'esquema, $X(n) = W(n) + \frac{1}{2}X(n-1)$ i $\hat{X}(n+1) = h(0)X(n) + h(1)X(n-1)$. Les constants $h(0)$ i $h(1)$ han de ser tals que (principi d'ortogonalitat):

$$\begin{aligned} E\{[X(n+1) - \hat{X}(n+1)]X(n)\} &= 0 \\ E\{[X(n+1) - \hat{X}(n+1)]X(n-1)\} &= 0 \end{aligned}$$

és a dir,

$$\begin{aligned} E\{X(n+1)X(n)\} - h(0)E\{X^2(n)\} - h(1)E\{X(n-1)X(n)\} &= 0 \\ E\{X(n+1)X(n-1)\} - h(0)E\{X(n)X(n-1)\} - h(1)E\{X^2(n-1)\} &= 0 \end{aligned}$$

d'on,

$$\left.\begin{aligned} h(0)R_X(0) + h(1)R_X(1) &= R_X(1) \\ h(0)R_X(1) + h(1)R_X(0) &= R_X(2) \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{aligned} R_X(0) &= E\{X^2(n)\} = E\{[W(n) + \frac{1}{2}X(n-1)]^2\} = \\ &= E\{W^2(n)\} + E\{W(n)X(n-1)\} + \frac{1}{4}E\{X^2(n-1)\} = \\ &= R_W(0) + \frac{1}{4}R_X(0) = 3 + \frac{1}{4}R_X(0) \end{aligned}$$

ja que $E\{W(n)X(n-1)\} = 0$ (vegeu problema 6.14). Per tant,

$$\begin{aligned} R_X(0) &= 4 \\ R_X(1) &= E\{X(n+1)X(n)\} = E\{[W(n+1) + \frac{1}{2}X(n)]X(n)\} = \frac{1}{2}R_X(0) = 2 \\ R_X(2) &= E\{X(n+2)X(n)\} = E\{[W(n+2) + \frac{1}{2}X(n+1)]X(n)\} = \frac{1}{2}R_X(1) = 1 \end{aligned}$$

Així,

$$\left.\begin{aligned} 4h(0) + 2h(1) &= 2 \\ 2h(0) + 4h(1) &= 1 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow h(0) = \frac{1}{2},\ h(1) = 0$$

L'error quadràtic mitjà comès serà:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= E\{[X(n+1) - \hat{X}(n+1)]X(n+1)\} = E\{[X(n+1) - \frac{1}{2}X(n)]X(n+1)\} = \\ &= R_X(0) - \frac{1}{2}R_X(1) = 3 \end{aligned}$$

També:

$$\varepsilon = E\{[X(n+1) - \frac{1}{2}X(n)]^2\} = E\{W^2(n+1)\} = R_W(0) = 3$$

Problemes proposats

20. Siguin $X_1(t)$ i $X_2(t)$ dos processos de Poisson independents de paràmetres λ_1 i λ_2 respectivament. Considereu el procés $Y(t) = X_1 + X_2$. Calculeu la funció de probabilitat i el seu valor mitjà. Quina classe de procés és?

21. Donat el procés real estacionari $X(t)$, siguin $Y_1(t) = a_0X(t)+a_1X(t-T)+a_2X(t-2T)$ i $Y_2(t) = b_0X(t)$ les estimacions lineals en mitjana quadràtica de la variable aleatòria $X(t+T)$, $T > 0$, donades les variables aleatòries $X(t)$, $X(t-T)$, $X(t-2T)$ i $X(t)$ respectivament. Demostreu que si $R_X(\tau) = Ae^{-\alpha|\tau|}$, llavors $Y_1(t) = Y_2(t)$

22. Sigui Y una variable aleatòria uniforme a $(0, a)$. A partir d'ella es defineix el procés:

$$X(t) = \begin{cases} Y & 0 \leq t \leq Y \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

Calculeu el valor mitjà de $X(t)$.

Respostes

20. $Y(t)$ és un procés de Poisson amb paràmetre $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$. (Vegeu el problema 3.13)

23.

$$E\{X(t)\} = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(a - \frac{t^2}{a}\right) & 0 \leq t \leq a \\ 0 & t \notin [0, a] \end{cases}$$

Els autors del text són professors del Departament de Matemàtica Aplicada i Telemàtica de la UPC i tots ells han impartit ensenyaments sobre variables aleatòries i processos estocàstics a l' Escola Tècnica Superior d'Enginyers de Telecomunicació de Barcelona (ETSETB). Els autors agraeixen la col·laboració dels professors E. Barenys, P. Morillo, J. Villar i I. Alegre, el treball dels quals ha estat decisiu en el resultat final del llibre.

Aquest llibre constitueix un recull de problemes resolts i proposats sobre la probabilitat combinatòria, les variables aleatòries i els processos estocàstics. Els problemes escollits presenten aplicacions de la teoria de la probabilitat a l'enginyeria i, particularment, a l'enginyeria de telecomunicació.

EDICIONS UPC