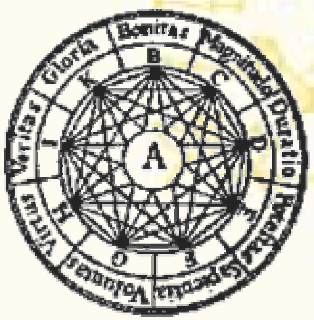
Aspectos combinatorios en problemas de comunicaciones

Oriol Serra Albó
Combinatoria, Teoría de Grafos y aplicaciones
Dept. Matemàtica aplicada IV
Universitat Politècnica de Catalunya

Aspectos combinatorios en problemas de comunicaciones



Combinatoria, Teoría de Grafos y aplicaciones

Aplicación de la Teoría de grafos al análisis y diseño de redes de interconexión:

- **Grandes redes**
- **Transmisión y difusión de la información**
- **Vulnerabilidad y fiabilidad**

Redes estructuradas

- Redes de área local
- Redes para sistemas multiprocesadores
- Redes de comunicaciones fijas

Redes amorfas

- Redes de comunicaciones móviles
- Red internet

Aspectos combinatorios en problemas de comunicaciones

Aplicación de la Teoría de grafos al análisis y diseño de redes de interconexión:

- Grandes redes
- Transmisión y difusión de la información
- Vulnerabilidad y fiabilidad

Redes estructuradas

- Redes de área local
- Redes para sistemas multiprocesadores
- Redes de comunicaciones fijas

Redes amorfas

- Redes de comunicaciones móviles
- Red internet

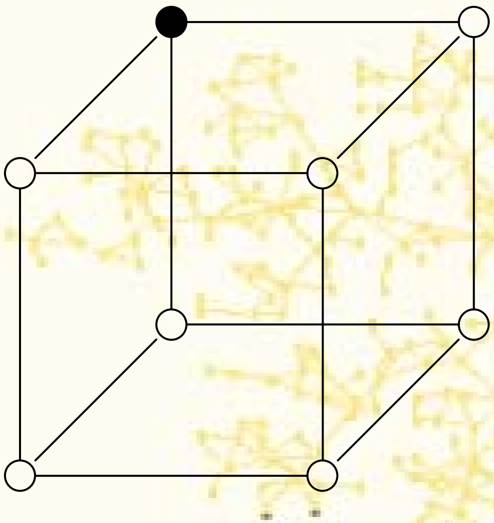
Aspectos combinatorios en problemas de comunicaciones

- Construcción de redes de pequeño diámetro
- Problemas de encaminamiento
- El problema de la asignación de frecuencias

1. Construccion de grafos de pequeño diametro:

Problema (Δ, D)

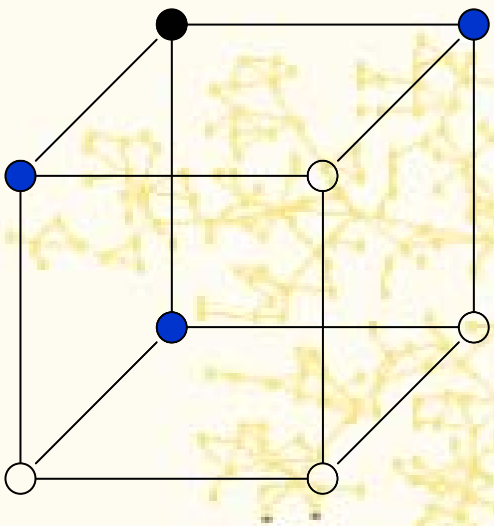
Dados el grado maximo Δ y el diametro D, maximizar el numero de nodos.

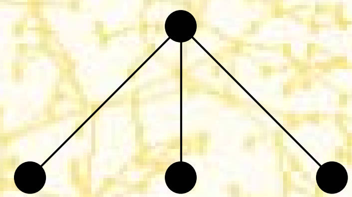


1. Construccion de grafos de pequeño diametro:

Problema (Δ, D)

Dados el grado maximo Δ y el diametro D, maximizar el numero de nodos.



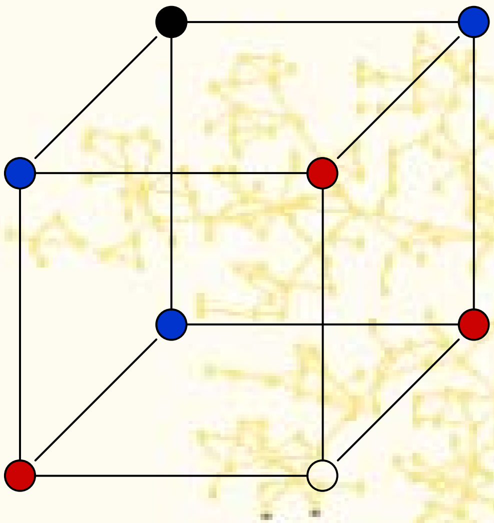


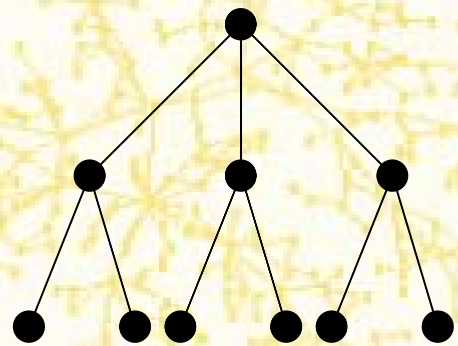
$\Delta(G)$

1. Construccion de grafos de pequeño diametro:

Problema (Δ, D)

Dados el grado maximo Δ y el diametro D, maximizar el numero de nodos.





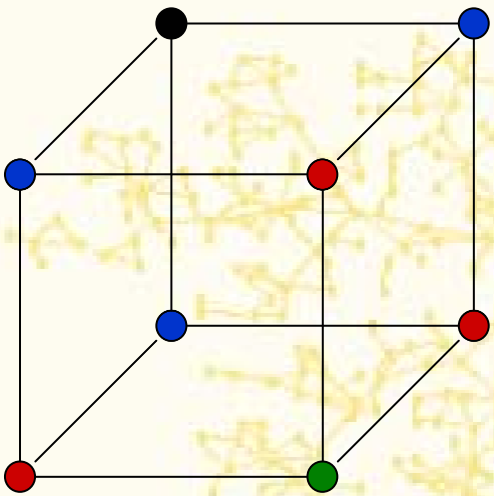
$\Delta(G)$

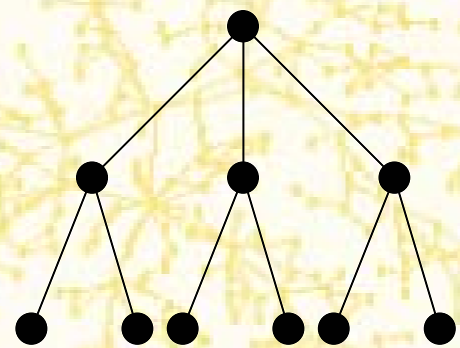
$\Delta(G)(\Delta(G)-1)$

1. Construccion de grafos de pequeño diametro:

Problema (Δ, D)

Dados el grado maximo Δ y el diametro D, maximizar el numero de nodos.





$\Delta(G)$

$\Delta(G)(\Delta(G)-1)$

$\vdots$

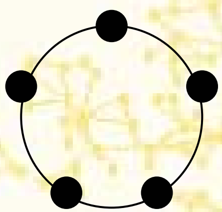
$$n(\Delta, D) = \frac{\Delta(\Delta-1)^{D}-2}{\Delta-2}, \text{ Cota de Moore}$$

$$D = \Omega(\log_{\Delta} n)$$

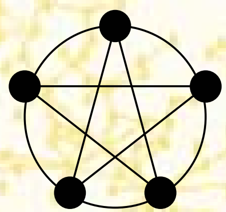
1. Construccion de grafos de pequeño diametro:

Problema (Δ, D)

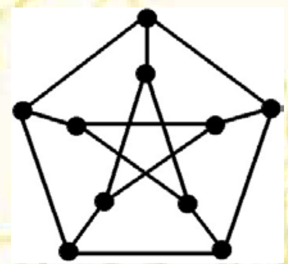
Dados el grado maximo Δ y el diametro D, maximizar el numero de nodos.



$\Delta = 2$



$\Delta = n-1, D = 1$



$\Delta = 3, D = 2$

Petersen

$\Delta = 7, D = 2$

Hoffman Singleton

?

$\Delta = 57, D = 2$

Monster

$\vdots$

$$n(\Delta, D) = \frac{\Delta(\Delta-1)^D - 2}{\Delta - 2}, \text{ Cota de Moore}$$

$$D = \Omega(\log_\Delta n)$$

1. Construccion de grafos de pequeño diametro:

Problema (Δ, D)

Dados el grado maximo Δ y el diametro D, maximizar el numero de nodos.

$\Delta \backslash D$	2	3	4	5	6	7	8
3	10/10	20/22	38/46	70/94	132/190	190/382	570/1534
4	15/17	41/53	96/161	364/485	740/1457	1200/4373	3080/13121
5	24/26	72/106	210/426	620/1706	2766/6826	5500/27306	16956/109226

Construcciones asintoticas $O(n(\Delta, D))$?

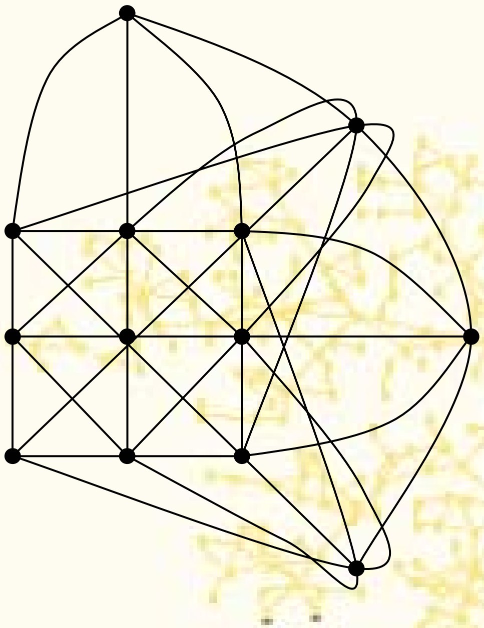
Cotas justas para $n(\Delta, D)$?

Construcciones con $D = O(\log_\Delta n)$?

1. Construccion de grafos de pequeño diametro:

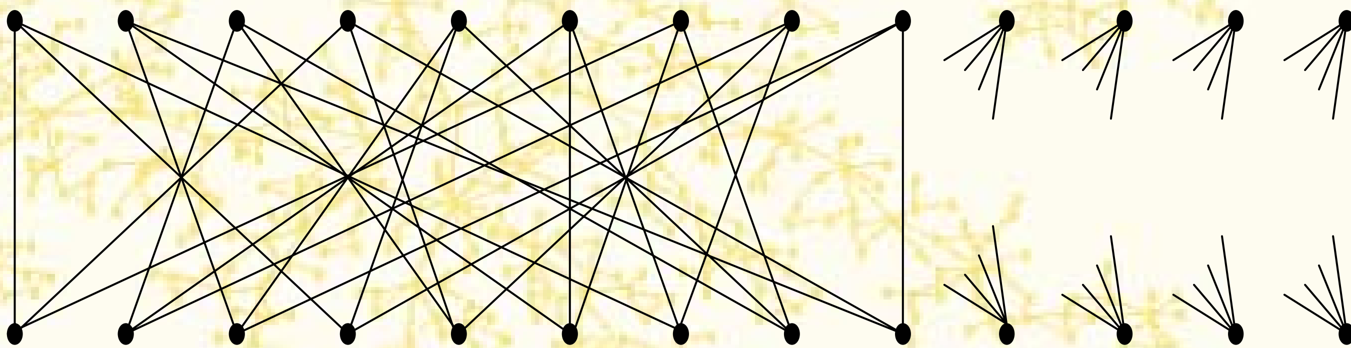
Problema (Δ, D)

Dados el grado maximo Δ y el diametro D, maximizar el numero de nodos.



Grafos de incidencia de planos proyectivos finitos

$\Delta = p^k + 1, D = 3$



$\vdots$

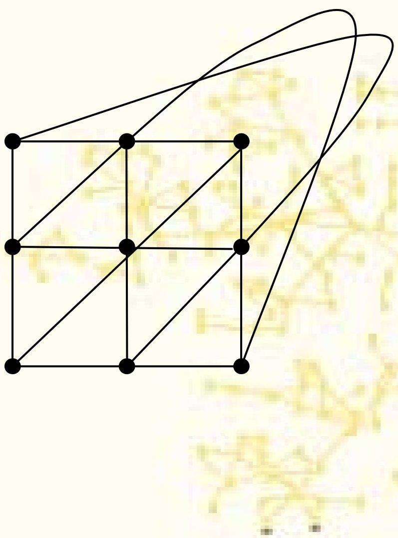
$$n(\Delta, D) = 2\frac{(\Delta - 1)^D - 1}{\Delta - 2}, \text{ Cota de Moore bipartitos}$$

$$D = \Omega(\log\ n)$$

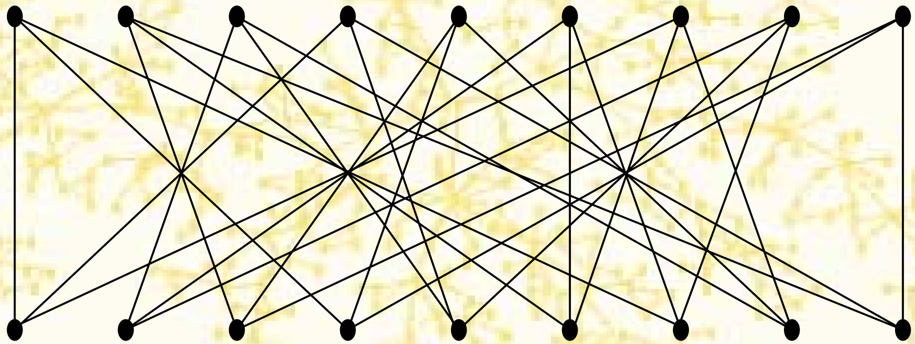
1. Construccion de grafos de pequeño diametro:

Problema (Δ, D)

Dados el grado maximo Δ y el diametro D, maximizar el numero de nodos.



Grafos de incidencia de planos afines finitos sin una clase de paralelismo



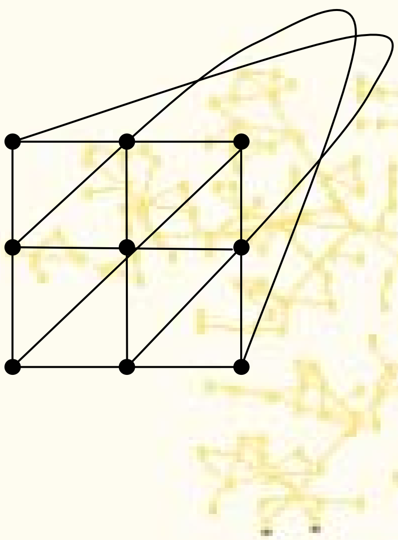
1. Construccion de grafos de pequeño diametro:

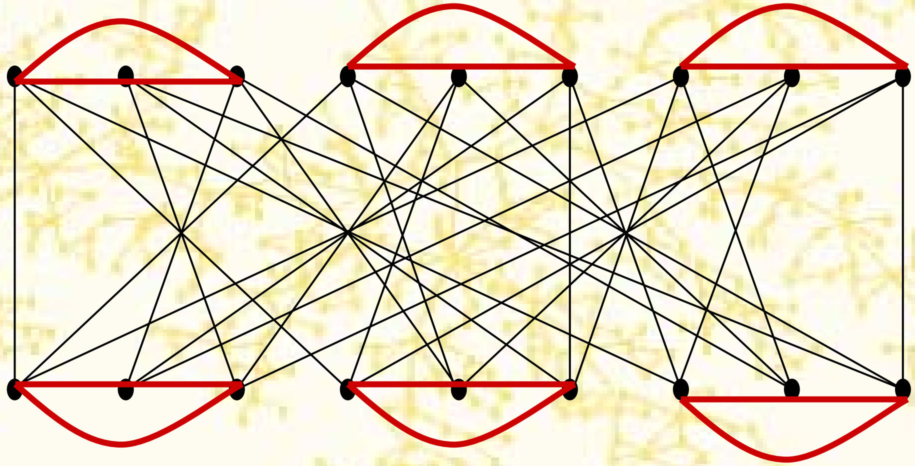
Problema (Δ, D)

Dados el grado maximo Δ y el diametro D, maximizar el numero de nodos.

Grafos de incidencia de planos afines finitos

sin una clase de paralelismo

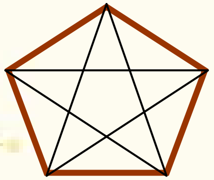




$$\Delta = (3q-1)/2, \;\; q \equiv 1 \mod 4, \;\; D = 2$$

$$n = 8/9(\Delta + 1/2)^2 \quad (\text{Cota de Moore: } \Delta^2 + 1)$$

$q = 5 \rightarrow$ Hoffman-Singleton



1. Construccion de grafos de pequeño diametro:

Problema (Δ, D)

Dados el grado maximo Δ y el diametro D, maximizar el numero de nodos.

Construcciones asintoticas $O(n(\Delta, D))$? Para $D = 2,\ 4,\ 6$ (geometrias finitas)

Cotas justas para $n(\Delta, D)$? Para $n(\Delta, D) - c$ en algunos casos

Construcciones con $D = O(\log_\Delta n)$? Escasas construcciones (pero un grafo aleatorio tiene casi seguramente diametro logaritmico!)

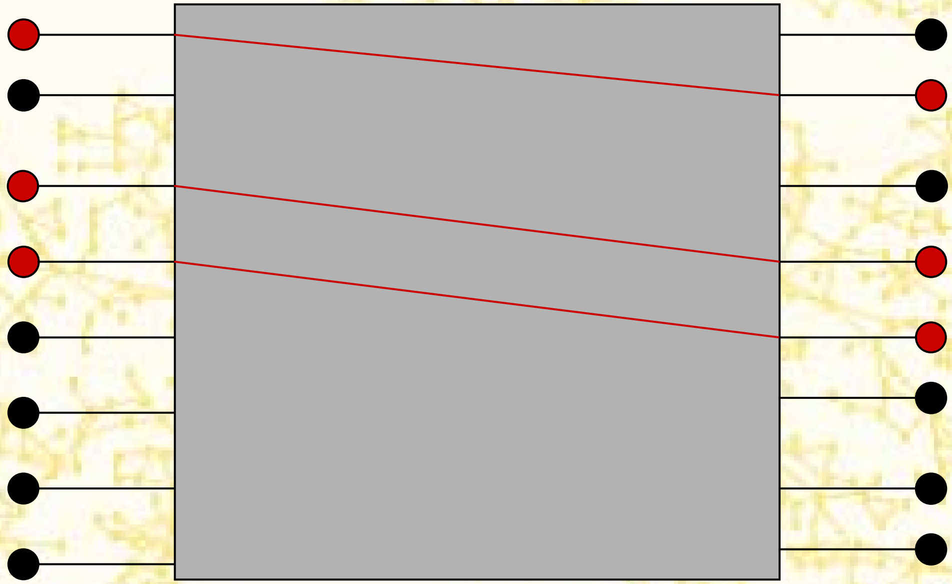
2. Encaminamientos en redes sin conflictos

(n,l)-concentradores: Dados k nodos de salida y k nodos de llegada, determinar k caminos independientes que los unen.

Digrafo aciclico con n entradas n salidas y $l \cdot n$ aristas

2. Encaminamientos en redes sin conflictos

(n,l)-concentradores: Dados k nodos de salida y k nodos de llegada, determinar k caminos independientes que los unen.



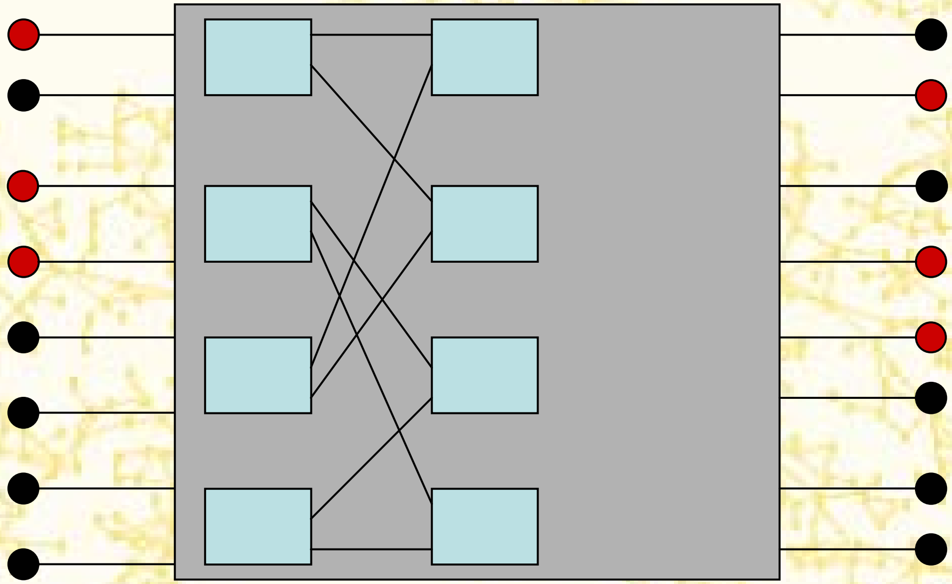
R edes de telefonia

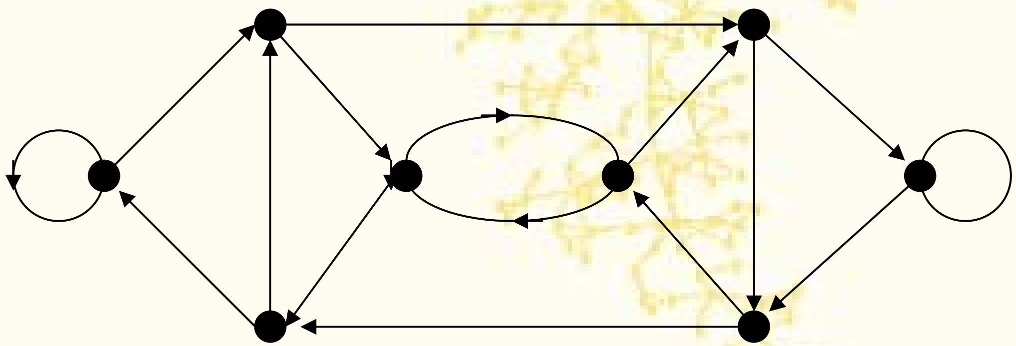
Redes de fibra optica

Redes de permutaciones

2. Encaminamientos en redes sin conflictos

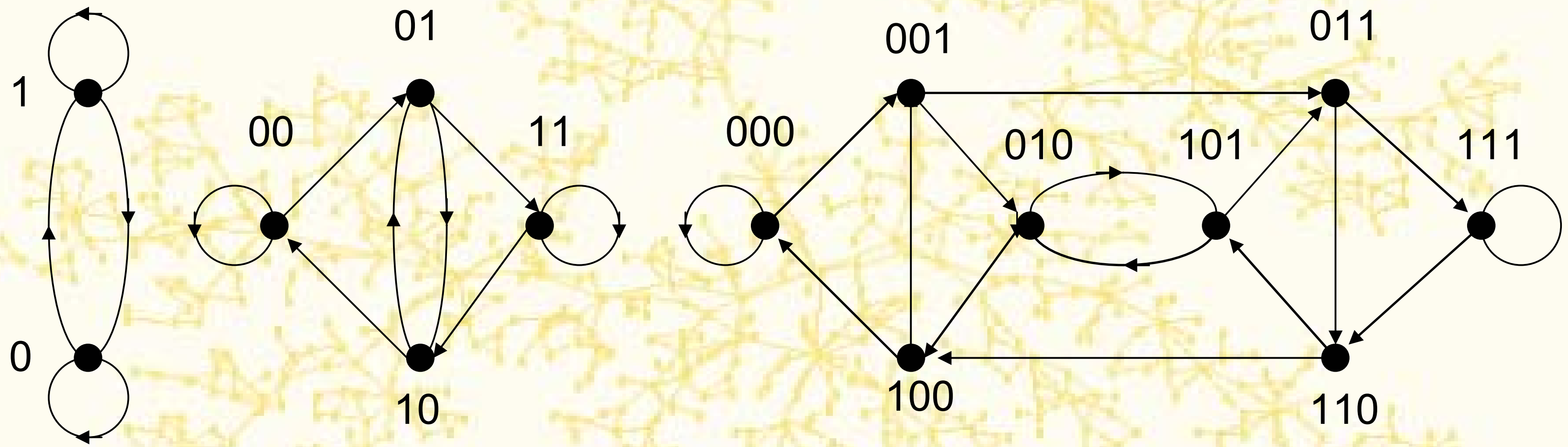
(n,l)-concentradores: Dados k nodos de salida y k nodos de llegada, determinar k caminos independientes que los unen.





2. Encaminamientos en redes sin conflictos

(n,l)-concentradores: Dados k nodos de salida y k nodos de llegada, determinar k caminos independientes que los unen.

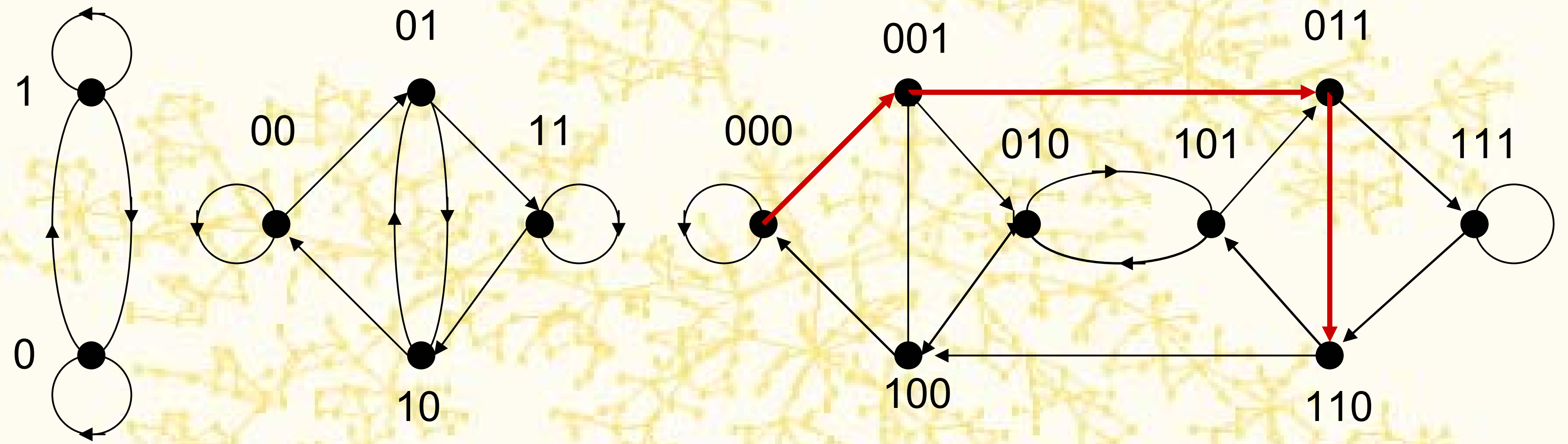


K_2^+ $L(K_2^+)$ $L^2(K_2^+)$

Digrafos de de Bruijn $B(d,D)$: $n = d^D$

2. Encaminamientos en redes sin conflictos

(n,l)-concentradores: Dados k nodos de salida y k nodos de llegada, determinar k caminos independientes que los unen.



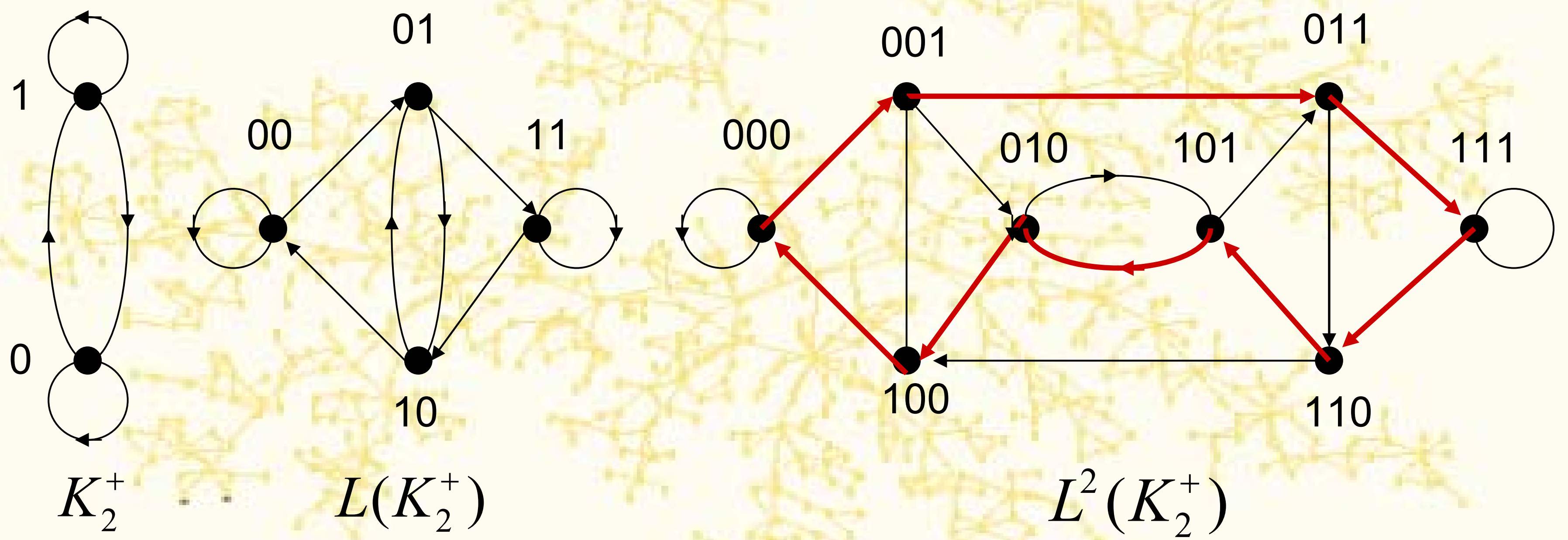
K_2^+ $L(K_2^+)$ $L^2(K_2^+)$

Algoritmo local de encaminamiento: 000 001 011 110

Digrafos de de Bruijn $B(d,D)$: $n = d^D$

2. Encaminamientos en redes sin conflictos

(n,l)-concentradores: Dados k nodos de salida y k nodos de llegada, determinar k caminos independientes que los unen.



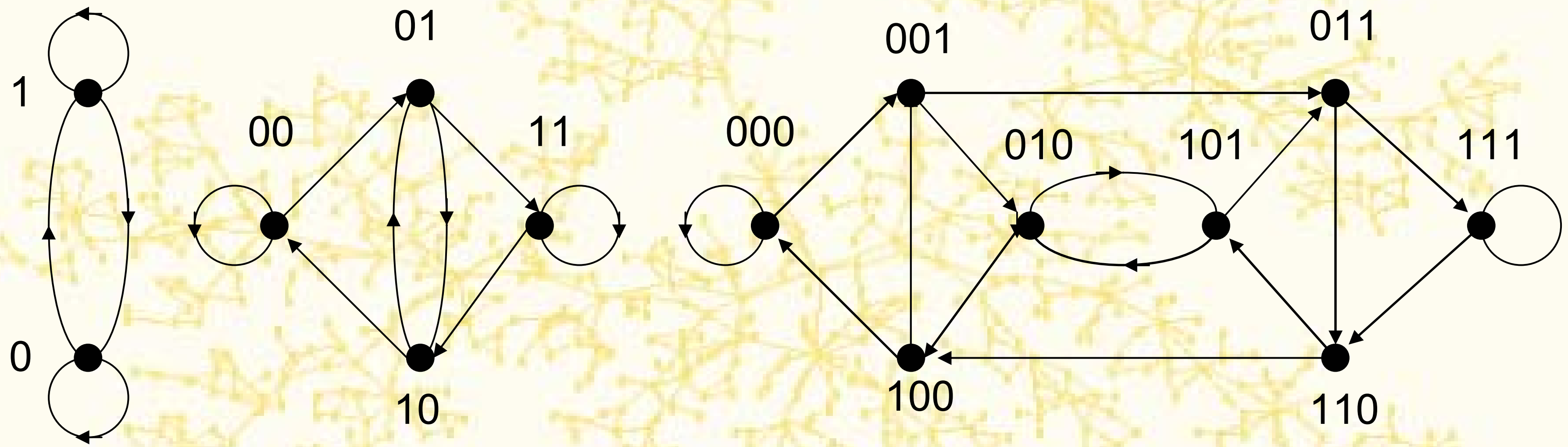
Algoritmo local de encaminamiento: 000 001 011 110

Sequencia binaria completa de longitud minima 0 0 0 1 1 1 0 1 0 0

Digrafos de de Bruijn $B(d,D)$: $n = d^D$

2. Encaminamientos en redes sin conflictos

(n,l)-concentradores: Dados k nodos de salida y k nodos de llegada, determinar k caminos independientes que los unen.



K_2^+ $L(K_2^+)$ $L^2(K_2^+)$

Algoritmo local de encaminamiento: 000 001 011 110

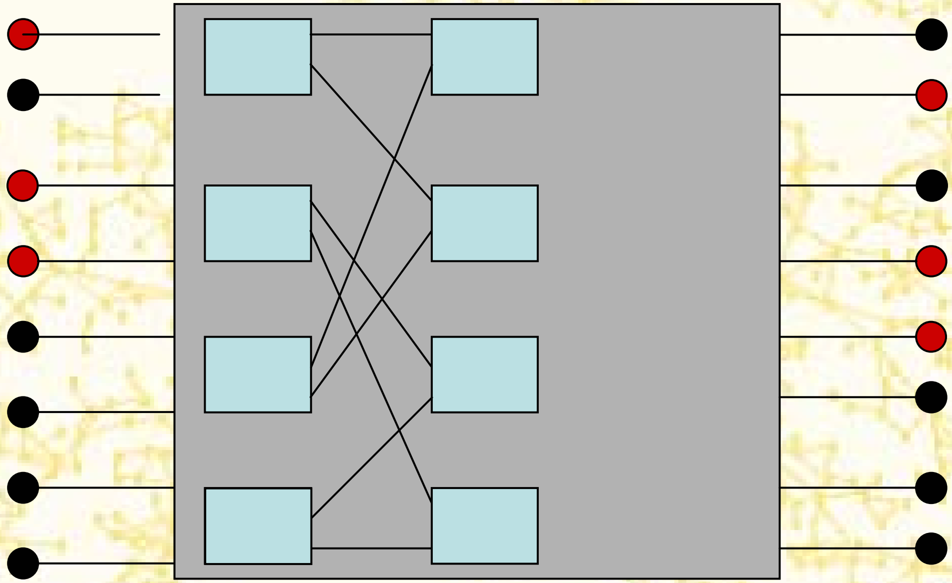
Sequencia binaria completa de longitud minima 0 0 0 1 1 1 0 1 0 0

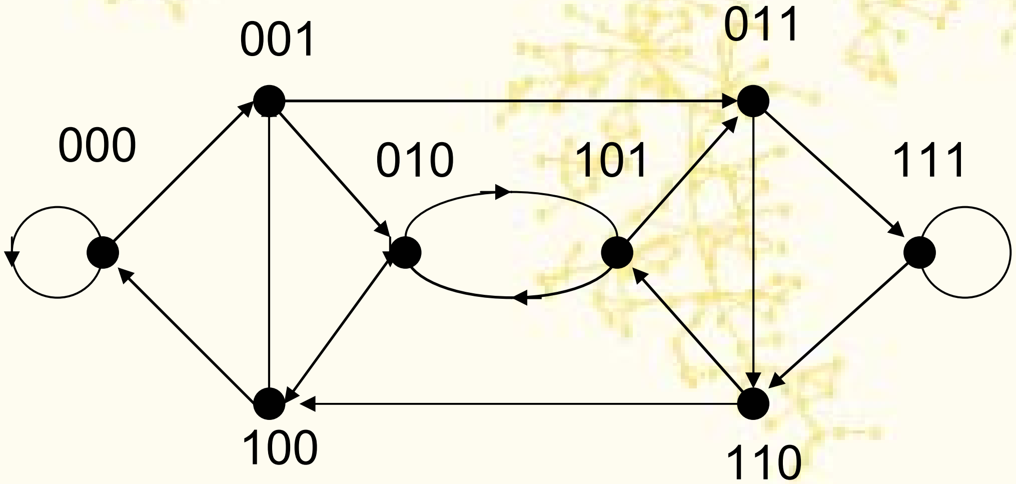
Panciclicidad, diámetro óptimo,…

Digrafos de de Bruijn $B(d,D)$: $n = d^D$

2. Encaminamientos en redes sin conflictos

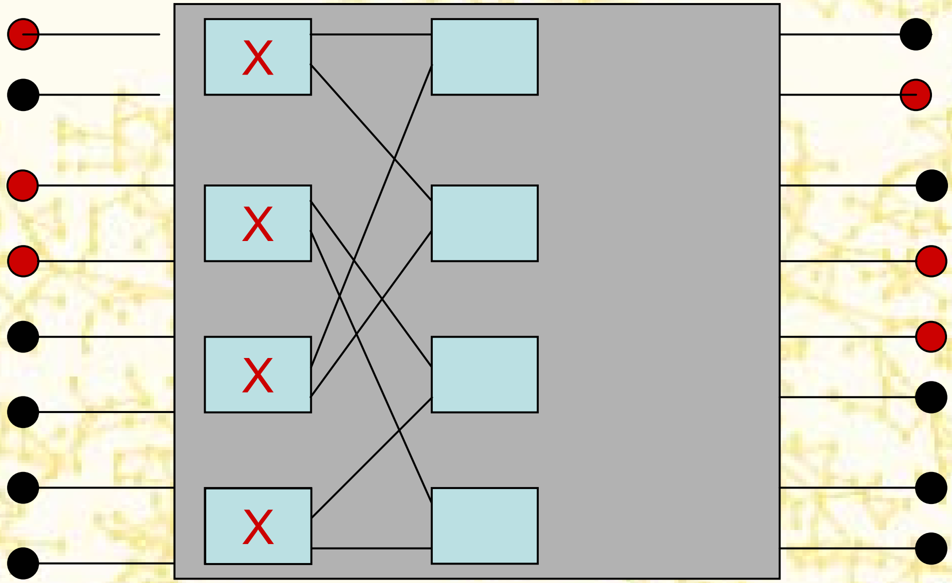
(n,l)-concentradores: Dados k nodos de salida y k nodos de llegada, determinar k caminos independientes que los unen.

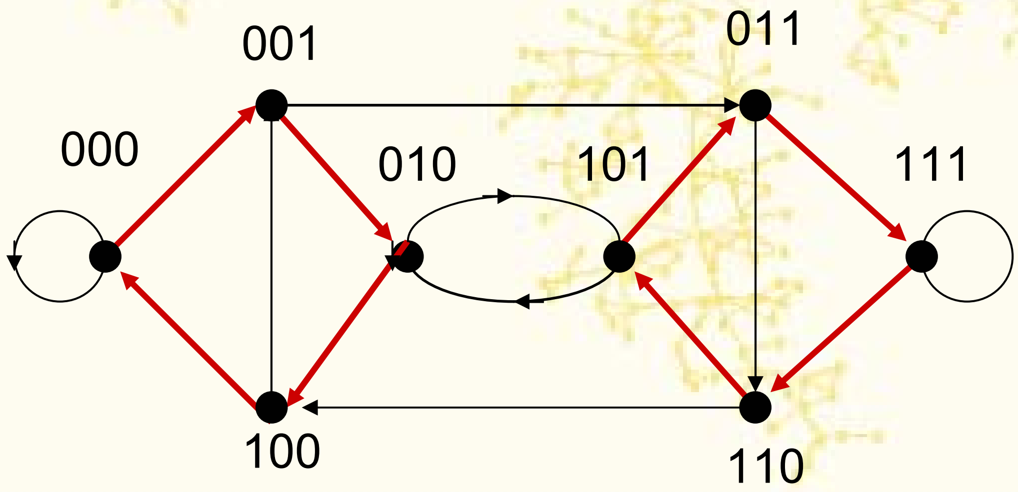




2. Encaminamientos en redes sin conflictos

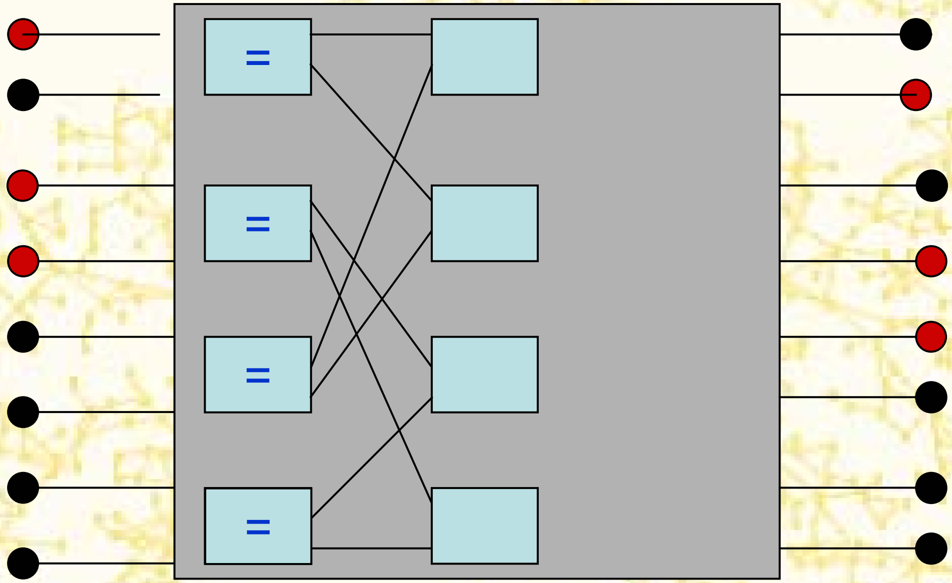
(n,l)-concentradores: Dados k nodos de salida y k nodos de llegada, determinar k caminos independientes que los unen.

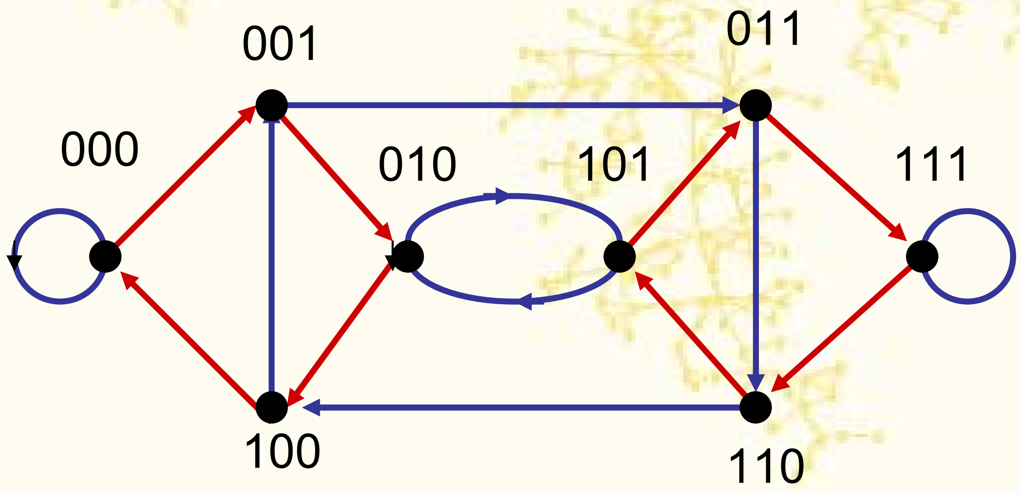




2. Encaminamientos en redes sin conflictos

(n,l)-concentradores: Dados k nodos de salida y k nodos de llegada, determinar k caminos independientes que los unen.





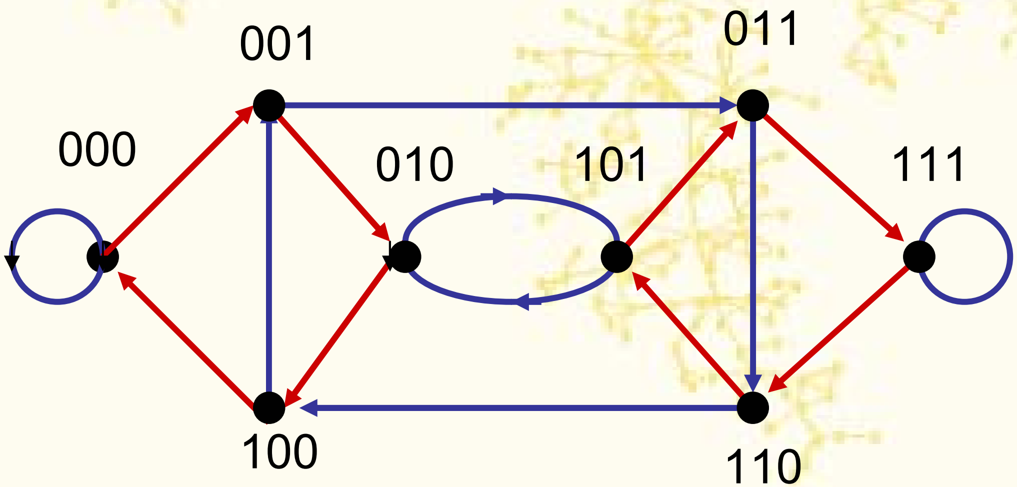
$1-$ *factorizacion*

2. Encaminamientos en redes sin conflictos

(n,l)-concentradores: Dados k nodos de salida y k nodos de llegada, determinar k caminos independientes que los unen.

Grupo de permutaciones de Σ

$1-$factorizacion Σ

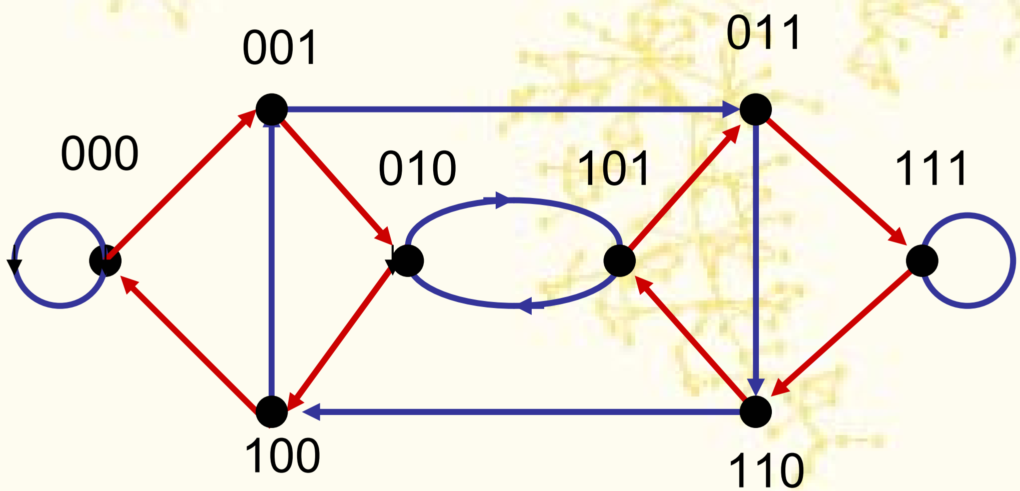


2. Encaminamientos en redes sin conflictos

(n,l)-concentradores: Dados k nodos de salida y k nodos de llegada, determinar k caminos independientes que los unen.

Grafo de Cayley $Cay(G(\Sigma),\Sigma)$ $\longleftarrow$ Grupo de permutaciones de Σ

R ecubrimiento regular
(homomorfismo localmente biyectivo)



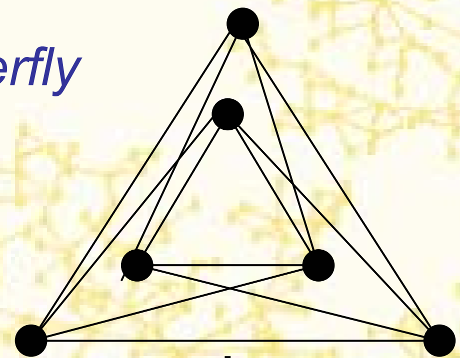
$1-$factorizacion Σ

2. Encaminamientos en redes sin conflictos

(n,l)-concentradores: Dados k nodos de salida y k nodos de llegada, determinar k caminos independientes que los unen.

Butterfly

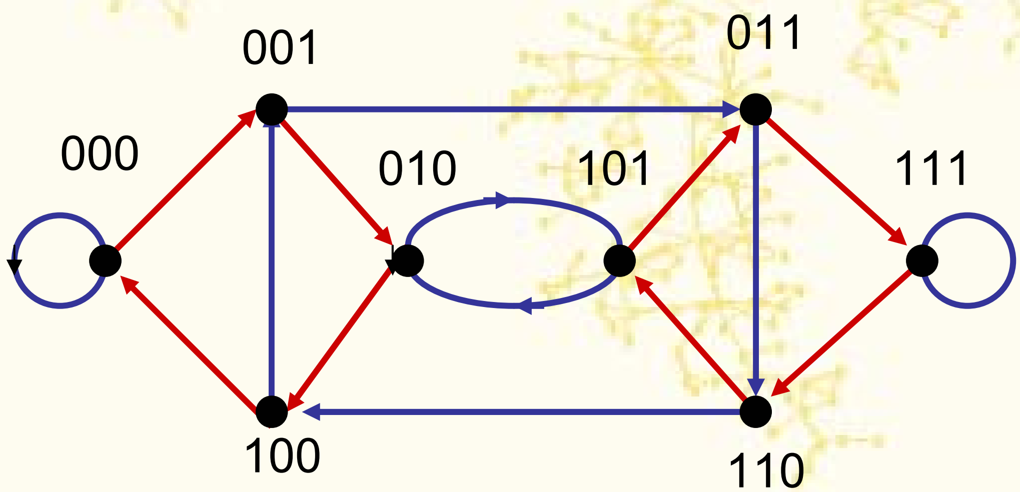
L^2



Grupo de permutaciones de Σ

Recubrimiento regular

(homomorfismo localmente biyectivo)



$1-$factorizacion Σ

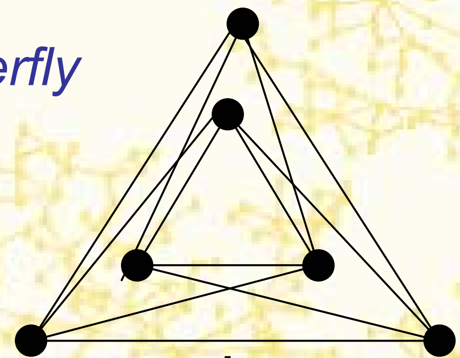
regular

2. Encaminamientos en redes sin conflictos

(n,l)-concentradores: Dados k nodos de salida y k nodos de llegada, determinar k caminos independientes que los unen.

Butterfly

L^2

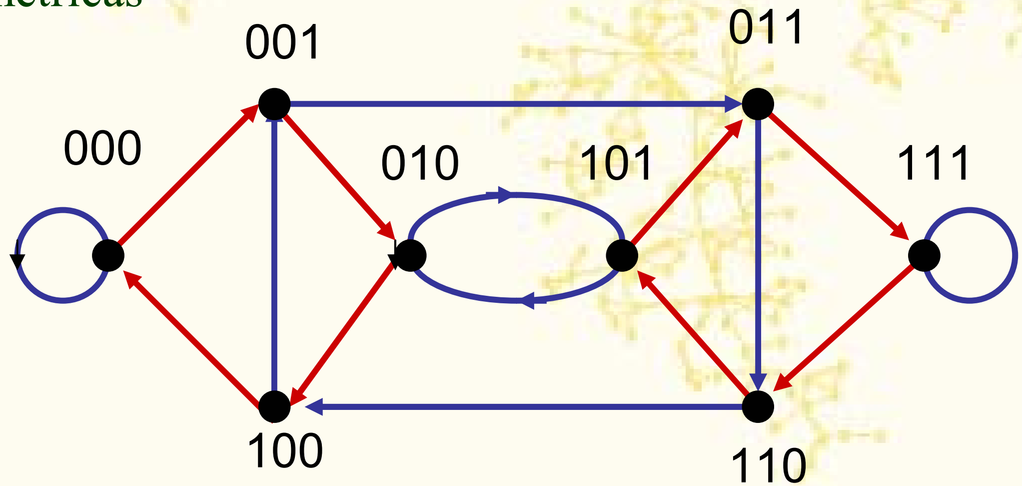


← Grupo de permutaciones de Σ

Generacion eficiente de permutaciones

Emulacion por redes simetricas

↓ Recubrimiento regular (homomorfismo localmente biyectivo)



↑ $1-$factorizacion Σ *regular*

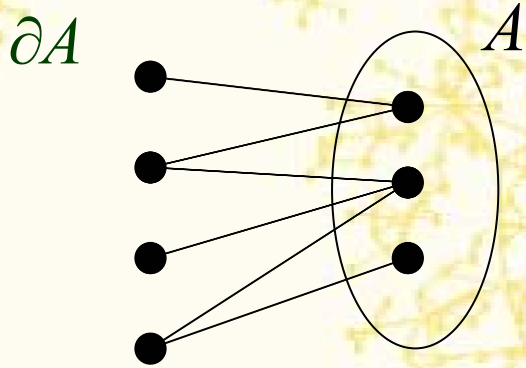
2. Encaminamientos en redes sin conflictos

(n,l)-concentradores: Dados k nodos de salida y k nodos de llegada, determinar k caminos independientes que los unen.

Construccion de (n,l)-concentradores:

- 1-factorizaciones y recubrimientos regulares
- (n,k,c)-expansores: grafos k-regulares de orden n t.q.

$$|\partial A| \geq c\left(1-\frac{|A|}{n}\right)|A|$$



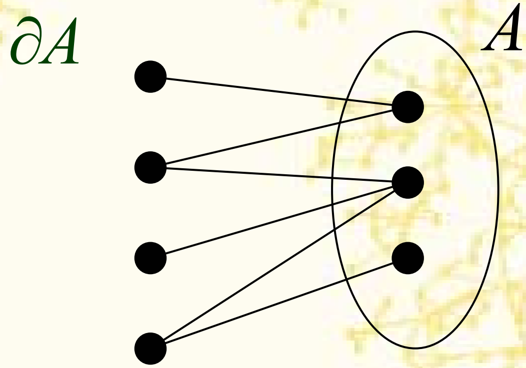
2. Encaminamientos en redes sin conflictos

(n,l)-concentradores: Dados k nodos de salida y k nodos de llegada, determinar k caminos independientes que los unen.

Construccion de (n,l)-concentradores:

- 1-factorizaciones y recubrimientos regulares
- (n,k,c)-expansores: grafos k-regulares de orden n t.q.

$$|\partial A| \geq c\left(1-\frac{|A|}{n}\right)|A|$$



Grafos de Ramanujan:

$$p,q \equiv 1 \bmod 4$$

$$X^{p,q} = Cay(PGL_2(\mathbb{Z}_q),S)$$

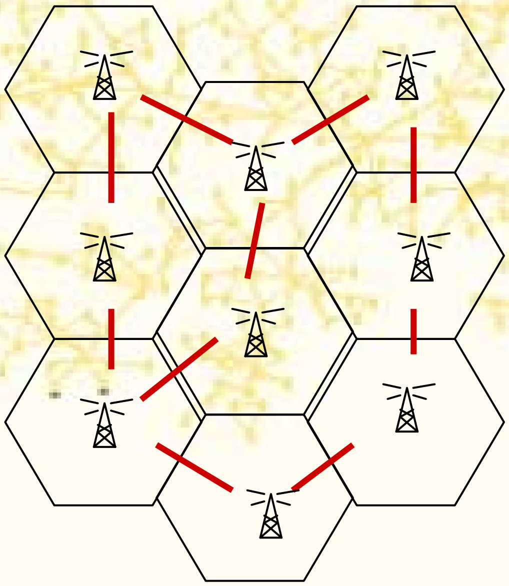
$$S \leftarrow p = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

3. Problema de asignacion de frecuencias:

Asignacion de frecuencias en una red de comunicaciones moviles con restricciones por interferencias

3. Problema de asignacion de frecuencias:

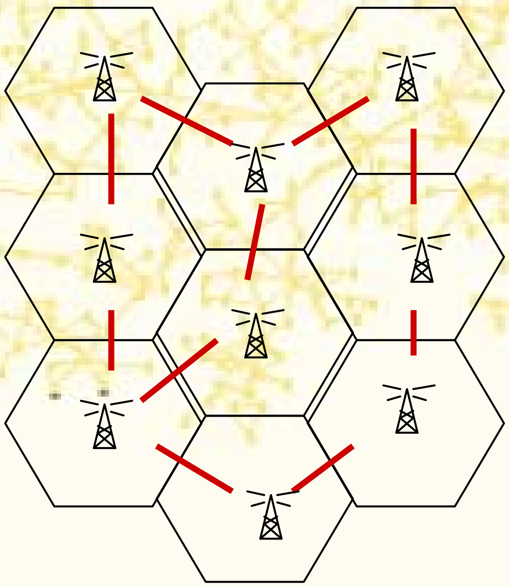
Asignacion de frecuencias en una red de comunicaciones moviles con restricciones por interferencias



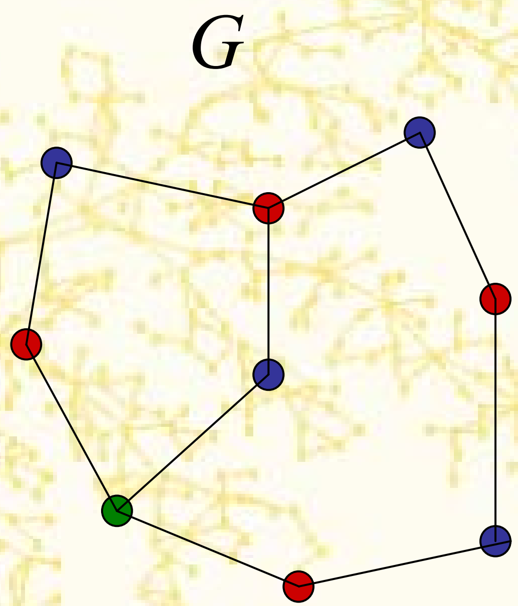
Dos estaciones adyacentes deben asignar frecuencias distintas (sujetas a restricciones)

3. Problema de asignacion de frecuencias:

Asignacion de frecuencias en una red de comunicaciones moviles con restricciones por interferencias



Dos estaciones adyacentes deben asignar frecuencias distintas



Problemas de coloración de grafos

3. Problema de asignacion de frecuencias:

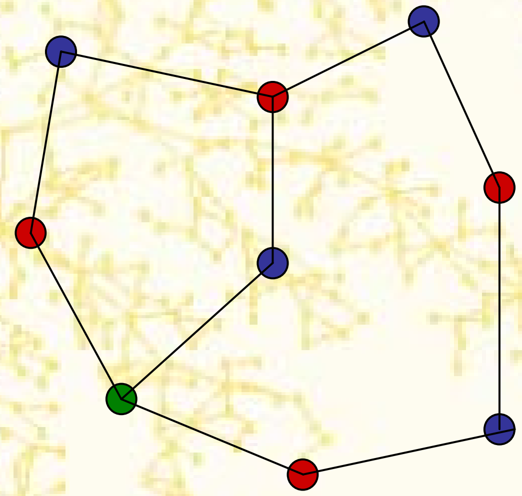
Asignacion de frecuencias en una red de comunicaciones moviles con restricciones por interferencias

$C = \{0, 1, \ldots, N\}, 0 \in c^{-1}(V)$

T – coloraciones: $c(x) - c(y) \notin T$

Objetivo: $s_T(G) = \min_{c} \max_{x} c(x)$

$T = \{0\} \rightarrow s_T(G) = \chi(G)$



Problemas de coloración de grafos

3. Problema de asignacion de frecuencias:

Asignacion de frecuencias en una red de comunicaciones moviles con restricciones por interferencias

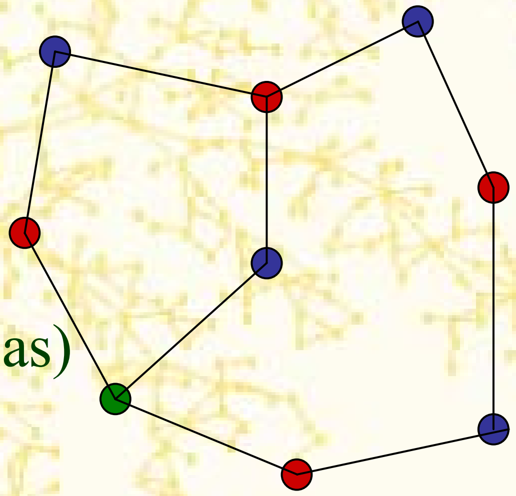
$$C = \{0, 1, \ldots, N\}, 0 \in c^{-1}(V)$$

T – coloraciones: $c(x) - c(y) \notin T$

(T conjunto de restricciones)

l-coloraciones: $c(x) - c(y) \geq l(xy)$

($l(xy)$ distancia minima entre frecuencias)



Objetivo: $s_l(G) = \min_{\mathrm{c}} \max_{x} c(x)$

$T = \{0\} \rightarrow s_T(G) = \chi(\mathrm{G})$

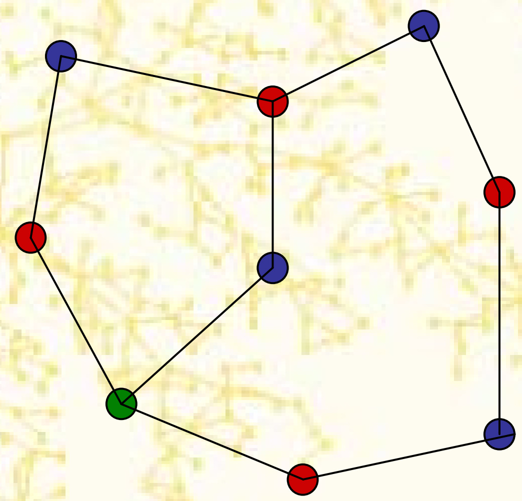
$l \equiv 1 \quad \rightarrow s_l(G) = \chi(\mathrm{G})$

Problemas de coloración de grafos

3. Problema de asignacion de frecuencias:

Asignacion de frecuencias en una red de comunicaciones moviles con restricciones por interferencias

• NP-completo (incluso para 3-colorabilidad de grafos planos de grado máximo 4)

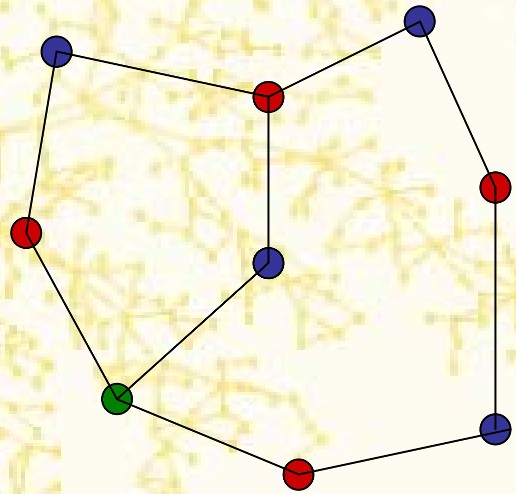


Problemas de coloración de grafos

3. Problema de asignacion de frecuencias:

Asignacion de frecuencias en una red de comunicaciones moviles con restricciones por interferencias

- NP-completo (incluso para 3-colorabilidad de grafos planos de grado máximo 4)
- No aproximable (a menos que P=NP)



Algoritmos de aproximacion:

Entrada: G

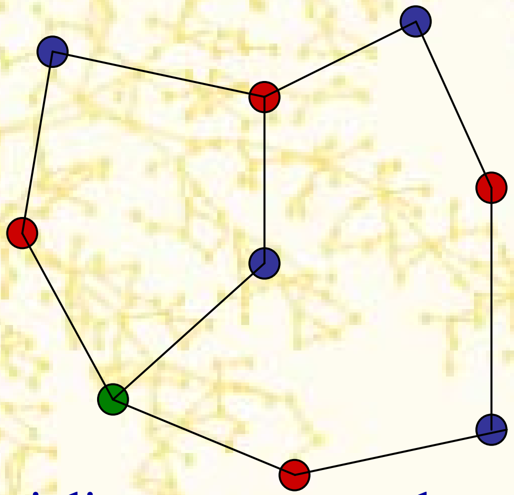
Salida: $k-$coloracion de G

con $k \leq \chi(G)\,|V(G)|^{\varepsilon}$

3. Problema de asignacion de frecuencias:

Asignacion de frecuencias en una red de comunicaciones moviles con restricciones por interferencias

- NP-completo (incluso para 3-colorabilidad de grafos planos de grado máximo 4)
- No aproximable (a menos que P=NP)
- Algoritmos heurísticos de optimización combinatoria (simulated annealing, genéticos, hormigas,...)



Inicializar con una coloracion aleatoria

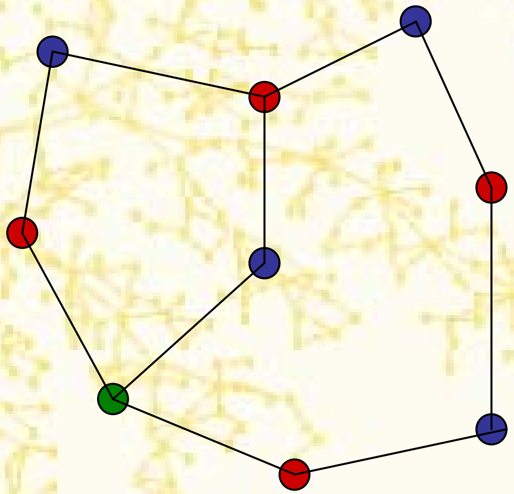
Evaluar una funcion de coste (numero de violaciones)

Modificar localmente con arreglo a reglas probabilisticas

3. Problema de asignacion de frecuencias:

Asignacion de frecuencias en una red de comunicaciones moviles con restricciones por interferencias

- NP-completo (incluso para 3-colorabilidad de grafos planos de grado máximo 4)
- No aproximable (a menos que P=NP)
- Algoritmos heurísticos de optimización combinatoria (simulated annealing, genéticos, hormigas,...)
- NP-completo para grafos de *tw* a lo sumo 3, pero aproximable en esta clase.

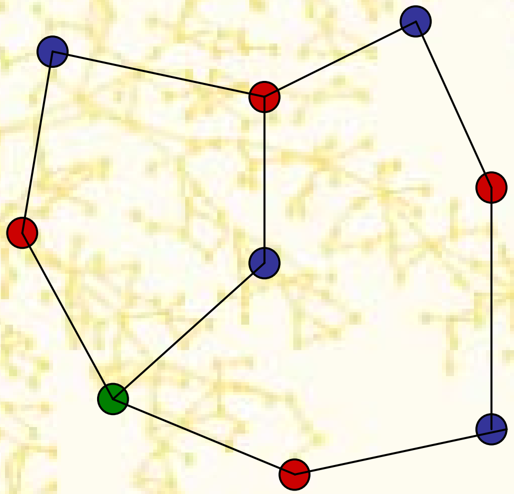


Clases de grafos con solucion polinomial o aproximable (clases cerradas por menores, por homomrfismos,...)

3. Problema de asignacion de frecuencias:

Asignacion de frecuencias en una red de comunicaciones moviles con restricciones por interferencias

- NP-completo (incluso para 3-colorabilidad de grafos planos de grado máximo 4)
- No aproximable (a menos que P=NP)
- Algoritmos heurísticos de optimización combinatoria (simulated annealing, genéticos, hormigas,...)
- NP-completo para grafos de *tw* a lo sumo 3, pero aproximable en esta clase.
- El número cromático de un grafo aleatorio es c.s. $n/2\log n$.

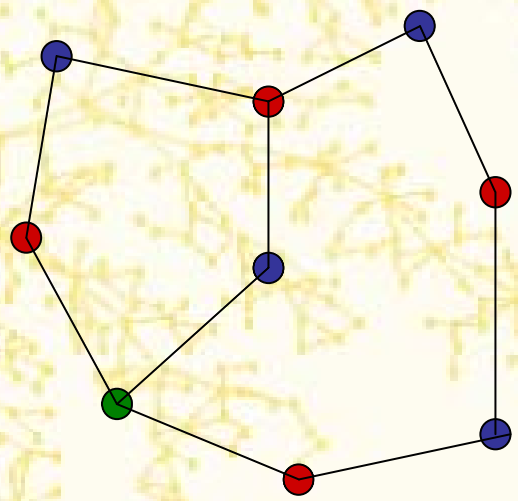


Modelos aleatorios: $G_{n,p}$

3. Problema de asignacion de frecuencias:

Asignacion de frecuencias en una red de comunicaciones moviles con restricciones por interferencias

- NP-completo (incluso para 3-colorabilidad de grafos planos de grado máximo 4)
- No aproximable (a menos que P=NP)
- Algoritmos heurísticos de optimización combinatoria (simulated annealing, genéticos, hormigas,...)
- NP-completo para grafos de *tw* a lo sumo 3, pero aproximable en esta clase.
- El número cromático de un grafo aleatorio es c.s. $n/2\log n$.
- El problema $sp(G)$ se puede resolver en tiempo $O(n\ (l+2)^n), l = \max l(xy)$.



Algoritmos exactos

Telecomunicaciones e Informática

↕

Problemas combinatorios

Métodos algorítmicos, algebraicos, geométricos, probabilísticos,...

Paul Erdös (1913-1996)