

Métodos básicos de Cálculo Numérico

J. Tomás LázarO Ochoa
Antoni Gomà Nasarre

P06/75005/01001.
Módulo 5

Índice

Introducción	5
Objetivos	8
Conocimientos previos	9
1. Ceros de funciones	11
1.1. Método de la bisección	11
1.2. Método de Newton	16
1.2.1. Idea geométrica	16
1.3. Método de la secante	23
1.3.1. Idea geométrica	23
2. Interpolación de funciones	27
2.1. Introducción	27
2.2. Existencia y unicidad del polinomio interpolador	28
2.3. Método de Lagrange	29
2.4. Método de Newton	35
2.5. Fórmula del error en la interpolación polinomial	43
2.6. Interpolación inversa	45
2.7. Interpolación de Hermite	47
2.7.1. Fórmula del error en la interpolación de Hermite	50
2.8. Fenómeno de Runge	51
3. Aplicaciones de la interpolación de funciones	53
3.1. Derivación numérica	53
3.1.1. Introducción	53
3.1.2. Diferencias hacia delante y diferencias centradas	54
3.2. Integración numérica	59
3.2.1. Introducción	60
3.2.2. Regla de los trapecios compuesta	60

3.2.3. Regla de Simpson compuesta	64
Resumen	68
Ejercicios de autoevaluación	69
Solucionario	71
Glosario	94
Bibliografía	95

Introducción

Durante muchos años, la creencia de que la única forma de llegar a la solución de un problema matemático era a partir de un proceso analítico y exacto, más o menos complejo, hizo que las **matemáticas** fuesen muchas veces referidas con el nombre de **ciencias exactas**. No fue hasta los años 40 y, más concretamente, hasta el año 1947, con la fundación del **Institute of Numerical Analysis**, en Los Ángeles (USA), que la comunidad matemática comenzó a pensar en la posibilidad de resolver problemas no sólo de manera exacta sino también aproximadamente, con una precisión arbitraria y a partir de un número finito de pasos de un determinado algoritmo numérico. Desde entonces, su desarrollo ha sido vertiginoso y hoy en día es una rama fundamental dentro de la matemática moderna.

La intención de este breve manual de Cálculo Numérico es presentar algunas de los útiles básicos (y no por esto menos importantes) más usados que el Análisis Numérico pone a nuestro alcance a la hora de resolver de manera aproximada problemas de difícil resolución analítica. Se ha hecho un esfuerzo por reducir al máximo los contenidos teóricos (que podéis encontrar en muchos libros sobre el tema y, en particular, en la bibliografía indicada al final del módulo), dando especial énfasis en su simplicidad y su aspecto práctico. Hemos pretendido que sea un material de consulta ágil, con algoritmos claramente destacados, ejemplos resueltos y comentarios sobre aquellos puntos más importantes.

Como podréis observar a lo largo de este módulo, cada concepto o método numérico irá acompañado de ejemplos resueltos y de actividades propuestas (también resueltas al final del módulo), en los que los algoritmos estudiados se aplican en problemas concretos. Estas actividades vienen separadas en dos tipos diferentes:

- Un primer tipo, *manual*, en el que se pide al estudiante que desarrolle un algoritmo y que efectúe los cálculos correspondientes con la ayuda de papel, lápiz y una calculadora científica estándar.
- Un segundo, en un ámbito de programación más elevado, en el que el estudiante debe saber resolver estas actividades con la ayuda de un software adecuado, típicamente una **calculadora simbólica** aunque también sería posible su programación en algún lenguaje de alto nivel: C, C++, FORTRAN, etc. En este módulo la calculadora simbólica escogida ha sido la calculadora Wiris, de fácil manipulación y grandes prestaciones tanto manipulativas como docentes.

Cabe destacar que este módulo es la versión papel de un proyecto más ambicioso en el que la gran mayoría de los ejemplos y actividades son interactivos. Esto permitirá visualizar de manera muy docente las ideas geométricas que justifican muchos de los métodos numéricos presentados, así como la manipulación y exploración por parte del estudiante de gran cantidad de ejemplos.

Parece entonces natural preguntarse por la necesidad de saber resolver estos algoritmos de manera manual cuando disponemos de instrucciones (veréis muchos ejemplos en la calculadora Wiris) que buscan directamente soluciones numéricas de un problema dado. Ésta es una pregunta habitual en la docencia actual de la matemática.

Seguramente, el Cálculo Numérico es un buen ejemplo que justifica ambos conocimientos. Si bien es básico conocer los métodos numéricos implementados en nuestra calculadora simbólica de cara a la resolución rápida de un problema, no menos importante es poder determinar cuándo y cuáles son los métodos más adecuados para llevarlo a cabo en cada situación. Si el software nos proporciona velocidad y comodidad de cálculo, el dominio de cada método nos debe aportar una visión crítica de sus resultados y limitaciones y una correcta elección en su aplicación.

Para terminar, sólo comentar que los apartados que forman este módulo son tres:

- Ceros de funciones.
- Interpolación (polinómica) de funciones.
- Aplicaciones de la interpolación de funciones.

Sin embargo, último se puede considerar un pequeño apéndice del segundo.

Algunas definiciones básicas

Antes de entrar en el contenido del módulo en sí, permitidnos recordar de manera muy breve una serie de definiciones básicas de Análisis Numérico:

Sea x un número real y $\tilde{x}$ una aproximación al mismo. Entonces se define el **error absoluto** de esta aproximación como

$$e_a(\tilde{x}) = x - \tilde{x},$$

cantidad que nos proporciona una idea de *qué lejos* se encuentra dicha aprox-

imación $\tilde{x}$ del valor a calcular x . El **error relativo** se define como

$$e_r(\tilde{x}) = \frac{e_a(\tilde{x})}{\tilde{x}},$$

y nos da una estimación del error cometido en proporción a la magnitud del valor x buscado. Puesto que x en principio no es conocido, el error relativo se acostumbra a aproximar por

$$e_r(\tilde{x}) \simeq \frac{e_a(\tilde{x})}{\tilde{x}}.$$

Supongamos que queremos representar el número real $x = 2.5748679212874\dots$ utilizando una cantidad determinada de cifras decimales, por ejemplo 6. ¿Cómo podemos hacerlo y cuál es el error que cometemos en cada caso?

- Una primera posibilidad viene dada por la denominada representación **por truncado** y consiste en considerar de x únicamente el número de cifras decimales determinado. Así, en nuestro ejemplo la aproximación por truncado con 6 cifras decimales del valor x viene dada por

$$x_1 = 2.574867.$$

El error cometido en este caso cumple que $|e_a(x_1)| = |x - x_1| \leq 10^{-6}$.

- Otra forma de llevarlo a cabo es mediante la denominada representación **por redondeo** y que consiste en la siguiente idea: se considera x_2 coincidente con x en 6 cifras decimales, incrementándose en 1 la última cifra si el séptimo decimal del número x es mayor o igual que 5. Por ejemplo, en nuestro caso, escribiremos

$$x_2 = 2.57486\underline{8}$$

debido a que la séptima cifra decimal de x , ($x = 2.574867\underline{9}212874\dots$) es 9, valor superior a 5. En otras palabras, la representación por redondeo con 6 cifras decimales de x se obtiene considerando su aproximación por truncado, x_1 , y la aproximación x_2 que consiste en aumentar en una unidad la sexta cifra decimal de x_1 ; entonces, de estos dos valores se escoge el más cercano a x .

Si representamos el número x por su aproximación por redondeo x_2 el error absoluto cometido satisface

$$|e_a(x_2)| = |x - x_2| \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{-6}.$$

Notad que este error es inferior (o igual) al obtenido en la representación por truncado.

En general, aunque no es estrictamente cierto, si x_2 es una aproximación por redondeo de x cumpliendo $|e_a(x_2)| = |x - x_2| \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{-k}$ se acostumbra a decir que x y x_2 **coinciden en las primeras k cifras decimales**. Lo mismo se dice si x_1 es la aproximación por truncado de x y satisface que $|e_a(x_1)| = |x - x_1| \leq 10^{-k}$.

Objetivos

El objetivo principal de este módulo es introducir al alumno en el uso de útiles numéricos para resolver ecuaciones y para aproximar funciones, sus derivadas y sus integrales. En particular, los objetivos docentes que se pretende conseguir en este módulo son:

1. Presentar al alumno maneras aproximadas de resolución de problemas que no permiten una resolución analítica.
2. Introducir métodos básicos de Cálculo Numérico como herramienta habitual de trabajo.
3. Familiarizar al alumno con el manejo de algoritmos numéricos y su aplicación en una calculadora básica, sea en un ámbito de programación o con el empleo de software comercial.

Conocimientos previos

Es fundamental que el alumno haya adquirido las habilidades básicas relativas a funciones de una variable, tanto desde el punto de vista calculístico – especialmente en la derivación de funciones– como de su interpretación geométrica. La comprensión, en este nivel, de los módulos precedentes es suficiente.

Es también muy importante demostrar cierta habilidad con la calculadora Wiris, pues será la plataforma empleada para aplicar e implementar los algoritmos numéricos que presentaremos.

1. Ceros de funciones

A menudo, en situaciones prácticas, conviene encontrar soluciones aproximadas de ecuaciones que no podemos (o sabemos) resolver de manera analítica. El Cálculo Numérico es, dentro de la Matemática Aplicada, la disciplina que se ocupa de este problema, y presenta métodos de resolución aproximada y estudia sus características. Por esta razón, muchas calculadoras simbólicas, entre éstas Wiris, tienen incorporados módulos de resolución aproximada de ecuaciones.

A pesar de estas facilidades, es conveniente conocer cuáles son los métodos numéricos más usados y cuáles son las circunstancias que nos llevan a una solución satisfactoria de nuestro problema.

Veremos enseguida que todas las ecuaciones que queremos resolver se pueden considerar como una cierta función f igualada a cero, motivo por el cual este apartado se acostumbra a titular **Ceros de funciones**. Es interesante comentar que, en el caso de funciones polinómicas, la instrucción **resolver_numéricamente** de Wiris ya tiene incorporados métodos numéricos que nos dan, si es necesario, valores aproximados de los ceros o raíces (véase figura 1).

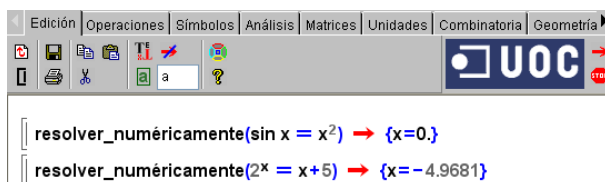


Figura 1: La instrucción **resolver_numéricamente** con la calculadora Wiris

1.1. Método de la bisección

Éste es, sin duda, el método más simple para buscar una solución aproximada α de la ecuación $f(x) = 0$ una vez conocemos un intervalo al cual pertenece. Está motivado por el siguiente resultado:

Teorema (Bolzano): Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua cumpliendo $f(a) \cdot f(b) < 0$ (es decir, $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos). Entonces, existe $\alpha \in [a, b]$ que satisface que $f(\alpha) = 0$.

Antes de detallar su algoritmo, ilustraremos su uso, en un ámbito intuitivo, con un ejemplo concreto.

Ejemplo 1

Supongamos que buscamos una solución aproximada de la ecuación $\sin x = x^2$. Observad que esto equivale a encontrar un punto de intersección entre las curvas

$$\begin{cases} y = \sin x \\ y = x^2 \end{cases}$$

las cuales se cortan en $x = 0$ y para un cierto valor α perteneciente al intervalo $[0.25, 1]$ (véase figura 2). Para encontrar α de manera aprox-

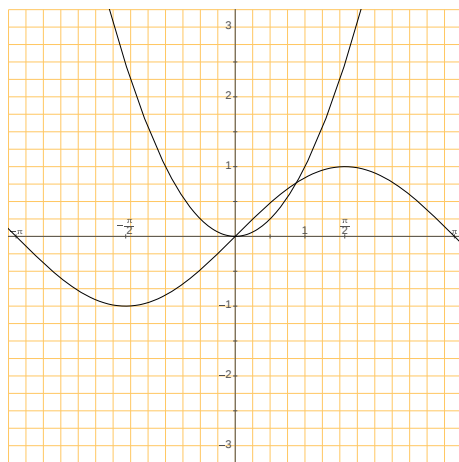


Figura 2: Las funciones $\sin x$ y x^2

imada, lo primero que se hace es escribir nuestra ecuación de la forma $f(x) = 0$ con $f(x) = \sin x - x^2$. Notad que f es una función continua. Además, $f(0.25) = \sin(0.25) - (0.25)^2 = 0.1849039593 > 0$ y $f(1) = \sin(1) - 1^2 = -0.1585290152 < 0$, por lo tanto, aplicando el **teorema de Bolzano** podemos asegurar que existe (como mínimo) un valor $\alpha \in [0.25, 1]$ que cumple $f(\alpha) = 0$ y, en consecuencia, satisfaciendo que $\sin \alpha = \alpha^2$.

Consideramos ahora el punto medio entre 0.25 y 1, es decir $(0.25 + 1)/2 =$

Observad que del hecho que $f(a) \cdot f(b) < 0$ no se deduce que exista una única raíz $\alpha \in (a, b)$ de la función $f(x)$ si no que podría haber muchas otras; lo único que asegura este teorema es que, como mínimo, existe una.

0.625, y calculamos $f(0.625) = 0.1944722729 > 0$. Puesto que $f(0.625)$ es positivo, y teniendo en cuenta que $f(1) < 0$, podemos concluir que en el intervalo $[0.625, 1]$ se tiene (como mínimo) un cero de f . De nuevo, consideramos el punto medio de este último intervalo: $(0.625 + 1)/2 = 0.8125$. Evaluando f en este punto encontramos $f(0.8125) = 0.0658524053 > 0$. Este valor es positivo y por tanto podemos nuevamente deducir que f tiene (como mínimo) un cero α en el intervalo $[0.8125, 1]$.

De manera análoga, procedemos hasta encontrar un intervalo de longitud tan pequeña como queramos que contenga α . Este intervalo proporciona una aproximación del cero que estamos buscando.

Método de la bisección

Algoritmo

Supongamos que un cero α de la función $f(x)$, continua, se encuentra en el intervalo $[a, b]$. Entonces,

- 1) Denominamos $x_0 = a$, $x_1 = b$ y definimos $x_2 = (x_0 + x_1)/2$, punto medio del intervalo $I_0 = [x_0, x_1]$.
- 2) Calculamos $f(x_2)$ y comparamos con $f(x_0)$ y $f(x_1)$: si $f(x_0) \cdot f(x_2) < 0$ entonces, aplicando el teorema de Bolzano, sabemos que en el intervalo $[x_0, x_2]$ se tiene (como mínimo) un cero de f . En este caso consideramos como nuevo intervalo el intervalo $[x_0, x_2]$. Si, en cambio, se tiene que $f(x_2) \cdot f(x_1) < 0$, entonces tomamos el intervalo $[x_2, x_1]$.
- 3) En general, dado un intervalo $[x_k, x_j]$, calculamos su punto medio $x_* = (x_k + x_j)/2$ y consideramos como nuevo intervalo el subintervalo $[x_k, x_*]$ que $[x_*, x_j]$ que presente un cambio de signo de la función f .

La calculadora Wiris permite aplicar el método de la bisección para obtener el valor del cero de una función continua en un cierto intervalo —en el cual se tiene un cambio de signo de la función—. La instrucción que lo ejecuta es **resolver numéricamente** y necesita la función, el intervalo y el nombre del método que se quiere utilizar (véase figura 3)

Aparte de efectuar el cálculo directo de un cero de una función con Wiris, es interesante que intentéis programar el método de la bisección.

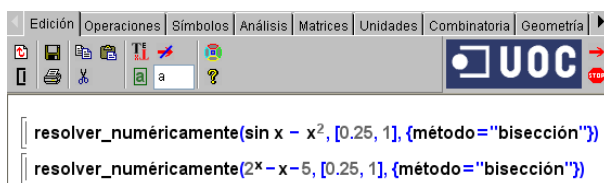


Figura 3: El método de la bisección con Wiris

- **Convergencia:** observad que este proceso proporciona una sucesión de intervalos, por ejemplo:

$$I_0 = [x_0, x_1], \quad I_1 = [x_2, x_1], \quad I_2 = [x_2, x_3], \dots,$$

encajados $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \dots \supset I_n \supset \dots$, de manera que α , cero de f , está contenido en todos éstos; además, la longitud de cada intervalo es siempre la mitad de la del anterior. Concretamente, si el intervalo I_0 tiene longitud $b - a$ entonces I_1 tiene longitud $\frac{b-a}{2}$, I_2 tiene $\frac{b-a}{2^2}$, I_3 tiene $\frac{b-a}{2^3}$ y, en general el intervalo I_n tiene longitud

$$\frac{b-a}{2^n}.$$

Notad que la longitud de tales intervalos es cada vez menor y continúa conteniendo un cero de f .

- **¿Cuándo acaba este proceso?**

Si bien hemos visto que, conceptualmente, la realización de este proceso infinitas veces proporciona exactamente el cero α que estamos buscando, es necesario un criterio que nos permita obtener una aproximación suficientemente satisfactoria de α . Concretamente, ¿podemos saber *a priori* cuántas iteraciones del método de la bisección se deben efectuar para obtener α con una precisión ε dada? Notad que esta precisión ε no es otra cosa que una cota del error absoluto máximo $|e_a(\alpha)|$ con el que se desea conocer α y será, habitualmente, del tipo 10^{-5} , 10^{-8} , 10^{-12} , ..., en función de nuestro problema y de nuestras necesidades.

Así pues, supongamos que queremos conseguir α con una precisión ε (también se acostumbra a decir “con un error inferior o igual a ε ”). Sabemos que si el intervalo inicial es $[a, b]$ entonces la longitud del intervalo I_N , obtenido después de N iteraciones, es $(b-a)/2^N$. Por lo tanto es suficiente pedir que

$$\varepsilon = \frac{b-a}{2^N} \quad (1.1)$$

pues de esta manera cualquier valor $x \in I_N$ se encuentra a una distancia de α menor o igual que ε , la precisión exigida. Podemos tomar así cualquiera de los dos extremos de I_N como aproximación de α . Además, de la igualdad (1.1) se deduce que

$$2^N = \frac{b-a}{\varepsilon} \Rightarrow \ln 2^N = \ln \left(\frac{b-a}{\varepsilon} \right) \Rightarrow N \ln 2 = \ln \left(\frac{b-a}{\varepsilon} \right)$$

$$\Rightarrow N = \left\lceil \frac{\ln \left(\frac{b-a}{\varepsilon} \right)}{\ln 2} \right\rceil + 1, \quad (1.2)$$

donde $[x]$ indica la parte entera del número x .

• **Ventajas y desventajas del método de la bisección:**

- Siempre converge al cero buscado, α , pues los intervalos que se obtienen contienen siempre α y su longitud tiende a ser cero.
- Desafortunadamente, su convergencia es muy lenta.
- A pesar de esto, antes de utilizar cualquier otro método de búsqueda de ceros de una función, es muy habitual efectuar dos o tres iteraciones del método de la bisección para obtener así una buena aproximación inicial del cero buscado.

Recordad que...

...la **parte entera** de un número real x se define como sigue: si consideramos todos los números enteros menores o iguales que x , entonces la parte entera de x , que denotamos por $[x]$, es el mayor de estos números. Así, por ejemplo $[3.7] = 3$. En cambio, $[-3.4] = -4$.

Ejemplo 2

Supongamos que queremos calcular α , cero de $f(x) = \sin x - x^2$ que se encuentra en el intervalo $I_0 := [a, b] = [0.625, 1]$ usando el método de la bisección.

¿Cuántas iteraciones N necesitamos para obtener una precisión de $\varepsilon = 10^{-3}$? Aplicando la fórmula anterior, tenemos que

$$N = \left\lceil \frac{\ln \left(\frac{0.375}{10^{-3}} \right)}{\ln 2} \right\rceil + 1 = [8.55 \dots] + 1 = 8 + 1 = 9$$

donde 0.375 es la longitud del intervalo $[0.625, 1]$. Entonces,

n	I_n	longitud de I_n
0	$[0.625, 1]$	0.375
1	$[0.8125, 1]$	0.1875000000
2	$[0.8125, 0.90625]$	0.0937500000
3	$[0.859375, 0.90625]$	0.0468750000
4	$[0.859375, 0.8828125]$	0.0234375000
5	$[0.87109375, 0.8828125]$	0.0117187500
6	$[0.87109375, 0.876953125]$	$5.859375000 \cdot 10^{-3}$
7	$[0.8740234375, 0.876953125]$	$2.929687500 \cdot 10^{-3}$
8	$[0.87548828125, 0.876953125]$	$1.464843750 \cdot 10^{-3}$
9	$[0.87548828125, 0.876220703125]$	$0.7324218750 \cdot 10^{-3}$

Observad que $0.7324218750 \cdot 10^{-3} \leq 10^{-3}$ y, por lo tanto, podemos decir que α es aproximadamente 0.87548828125 (o también 0.876953125) con una precisión de $\varepsilon = 10^{-3}$. En realidad, podemos tomar como aproximación con dicha precisión, 10^{-3} , cualquiera de los puntos del último intervalo calculado.

Notad que la convergencia ha sido relativamente lenta. ¿Cuántas iteraciones N necesitaríamos para obtener α con una precisión de $\varepsilon = 10^{-7}$? Al igual que antes, se tiene

$$N = \left\lceil \frac{\ln\left(\frac{0.375}{10^{-7}}\right)}{\ln 2} \right\rceil + 1 = [21.83 \dots] + 1 = 21 + 1 = 22.$$

Actividad 1

Aplicad el método de la bisección para encontrar todas las soluciones de la ecuación $e^{-x} = x^4$ con una precisión* de 10^{-2} .

* También se acostumbra a decir “con un error de 10^{-2} ” o “con un error menor o igual que 10^{-2} ”

Actividad 2

La ecuación $2 \sin x = x$ tiene un cero en el punto $\alpha_0 = 0$. Encontrad, utilizando el método de la bisección, el cero α que tiene en el intervalo $[\pi/2, \pi]$ con un error inferior a 10^{-2} .

Actividad 3

La ecuación $2^x = x + 5$ tiene una solución (por comprobación directa) para $x = 3$. Utilizad el método de la bisección para encontrar las dos soluciones de la ecuación $(2.2)^x = (1.1)x + 5.5$ con una precisión de 10^{-2} . Como ayuda, se han dibujado en la figura 4 las gráficas de las funciones $(2.2)^x$ y $(1.1)x + 5.5$.

1.2. Método de Newton

1.2.1. Idea geométrica

El método de Newton se basa en la aproximación de la gráfica $y = f(x)$ en un cierto punto $(x_0, f(x_0))$ por su recta tangente en tal punto. Recordad que la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en un punto $(x_0, f(x_0))$

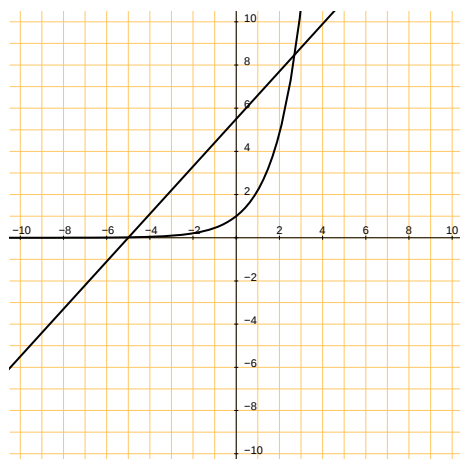


Figura 4: Gráficas de las funciones $(2.2)^x$ y $(1.1)x + 5.5$

viene dada por

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Observad que esta recta es el polinomio de Taylor de grado 1 de la función

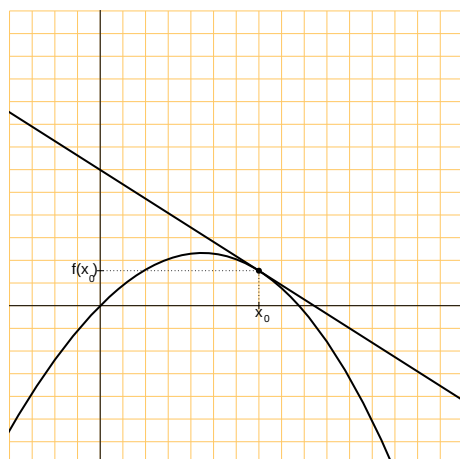


Figura 5: Recta tangente a $y = f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$

$f(x)$ en un entorno del punto x_0 . La idea del método consiste en tomar como nueva aproximación x_1 de α (cero de $f(x)$) el punto x donde la recta

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

corta al eje $y = 0$. Es decir:

$$0 = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0),$$

de manera que, despejando, se obtiene

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Repetimos esta construcción a partir del punto x_1 , considerando ahora la recta tangente a la gráfica $y = f(x)$ en el punto $(x_1, f(x_1))$ (véase figura 6) y, así,

El método de Newton se conoce también como el **método de Newton-Raphson**.

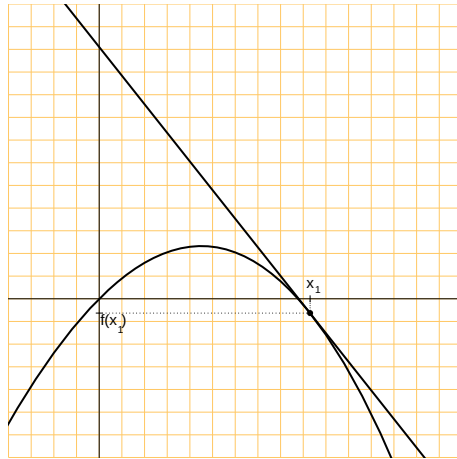


Figura 6: Recta tangente a $y = f(x)$ en el punto $(x_1, f(x_1))$

se obtiene

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

De manera similar calculamos x_3, x_4 , etc.

Método de Newton

Algoritmo

- 1) Consideremos x_0 aproximación (suficientemente cercana) de α , cero de $f(x)$.
- 2) Calculamos la sucesión de aproximaciones $\{x_k\}_{k \geq 1}$ a partir de la recurrencia

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k \geq 0. \quad (1.3)$$

Ejemplo 3

Calculamos la raíz $\alpha \in [0.25, 1]$ de la función $f(x) = \sin x - x^2$ (véase ejemplo 1.1) empleando ahora el método de Newton. Para esto, consideramos como primera aproximación el valor $x_0 = 0.5$ y obtenemos las siguientes aproximaciones: $x_1, x_2, x_3, \dots$ a partir de la fórmula (1.3), que en este caso equivale a

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\sin x_k - x_k^2}{\cos x_k - 2x_k}.$$

La siguiente tabla muestra estos iterados junto con sus correspondientes

estimaciones del error absoluto (máximo) cometido:

Iterado	Valor obtenido	$ x_k - x_{k-1} $
x_0	0.5	
x_1	2.37412465206752493	1.87412465206752493
x_2	1.4702796165662753	0.903845035501249632
x_3	1.05947583635088301	0.41080378021539229
x_4	0.905826786045670765	0.153649050305212244
x_5	0.877711878259780792	0.0281149077858899725
x_6	0.876727420147095326	0.0009844581126854665
x_7	0.876726215396866427	$1.2047502288986 \cdot 10^{-6}$
x_8	0.876726215395062446	$1.8039811 \cdot 10^{-12}$

Actividad 4

Aplicad el método de Newton para encontrar los ceros de la ecuación $e^x - 2 = x$ con un error menor que 10^{-12} .

- La calculadora Wiris también permite aplicar el método de Newton, para lo cual debemos pasarle como argumentos la función, el punto x_0 donde queremos iniciar las iteraciones y el nombre del método que queremos utilizar (véase figura 7).

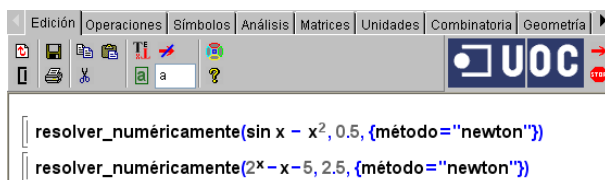


Figura 7: Aplicación del método de Newton con Wiris

- El método de Newton converge rápidamente. El estudio de la velocidad de convergencia de los diferentes métodos numéricos se escapa al propósito de estas notas. Únicamente, decir que, en condiciones adecuadas, el método de Newton tiene orden de convergencia cuadrático. Esto quiere decir que el error en una iteración determinada es aproximadamente el cuadrado del error en la iteración anterior: si por ejemplo éste fuese $\varepsilon_k \simeq 10^{-2}$, el error en la aproximación siguiente sería del tipo $\varepsilon_{k+1} \simeq (10^{-2})^2 = 10^{-4}$.
- Se suele preceder de unas cuantas iteraciones del método de la bisección (véase sección 1.1) que permiten localizar una raíz y proporcionar un valor inicial x_0 cercano a ésta.

Es interesante que intentéis programar el método de Newton. La calculadora Wiris os facilita las herramientas para hacerlo.

- Presenta problemas de convergencia en la proximidad de puntos críticos de la función $f(x)$, es decir, puntos que cumplen $f'(x) = 0$, pues el término $f(x_k)/f'(x_k)$ puede tomar valores muy grandes (véase figura 8). Un caso

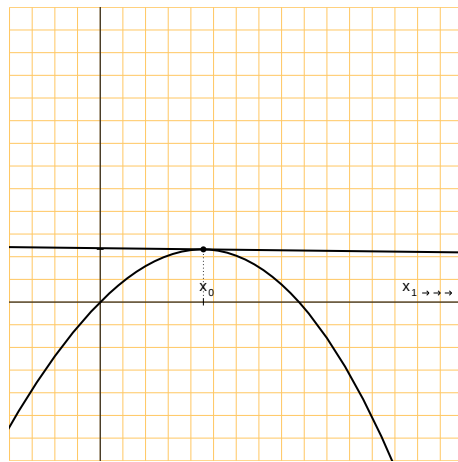


Figura 8: Ejemplo de divergencia de Newton cerca de un extremo relativo

particular de esta situación es el caso en el que la raíz α que buscamos es múltiple: $f(\alpha) = f'(\alpha) = \dots = f^{(n)}(\alpha) = 0$ y $f^{(n+1)}(\alpha) \neq 0$, con $n \neq 0$. En tal situación será conveniente, como en seguida veremos, utilizar una pequeña variante del método estándar.

Ejemplo 4

Queremos estudiar el comportamiento del método de Newton en el cálculo de una raíz de la función $f(x) = \cos x - 1$. Ya sabemos que esta raíz se encuentra en $\alpha = 0$; a pesar de esto permitidnos utilizarlo para poder comparar las diferentes aproximaciones obtenidas con dicha raíz y motivar a partir de esto alguna reflexión didáctica. Para esto, consideramos, por ejemplo $x_0 = 1$ como valor inicial y obtenemos las siguientes aproximaciones $x_1, x_2, x_3, \dots$ a partir de la fórmula

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\cos x_k - 1}{-\sin x_k} = x_k + \frac{\cos x_k - 1}{\sin x_k}.$$

Los resultados se muestran en la siguiente tabla:

k	x_k	$ x_k - x_{k-1} $
1	0.453698	0.546302
2	0.222876	0.230822
3	0.110974	0.111902
4	0.0554301	0.0555439
5	0.027708	0.0277221
6	0.0138531	0.0138549
7	0.00692644	0.00692666
8	0.0034632	0.00346324
9	0.0017316	0.0017316
10	0.0008658	0.0008658
11	0.0004329	0.0004329
12	0.00021546	0.00021744
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
24	$5.28444 \cdot 10^{-8}$	$5.28436 \cdot 10^{-8}$
25	$2.64218 \cdot 10^{-8}$	$2.64226 \cdot 10^{-8}$

Observad que estos iterados convergen hacia $\alpha = 0$ muy lentamente: en vez de hacerlo de manera cuadrática, es decir, con un comportamiento de la estimación del error del tipo $|x_{k+1} - x_k| \simeq |x_k - x_{k-1}|^2$, lo que tenemos en realidad es una convergencia de tipo lineal (concretamente $|x_{k+1} - x_k| \simeq 0.5|x_k - x_{k-1}|$). Esto es debido al hecho de que $\alpha = 0$ es un cero doble de la función $f(x)$ pues $f(0) = f'(0) = 0$ y $f''(0) \neq 0$. Por lo tanto, cuando x_k se aproxima a α , $f'(x_k)$ toma valores cercanos a 0 provocando errores de consideración en las sucesivas aproximaciones.

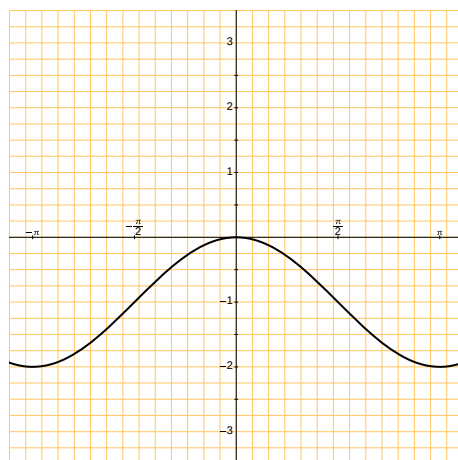


Figura 9: Gráfica de la función $f(x) = \cos x - 1$

En casos como éste, cuando sospechamos que la raíz buscada α puede ser

doble, es conveniente utilizar el **método de Newton modificado**, en el que la recurrencia viene dada a partir del procedimiento siguiente.

Método de Newton modificado (α raíz doble)

Algoritmo

- 1) Sea x_0 aproximación (suficientemente cercana) de α , cero (supuestamente) doble de $f(x)$.
- 2) Calculamos la sucesión de aproximaciones $\{x_k\}_{k \geq 1}$ a partir de la recurrencia

$$x_{k+1} = x_k - 2 \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k \geq 0. \quad (1.4)$$

Ejemplo 5

En el ejemplo anterior, si consideramos $x_0 = 1$ y utilizamos la fórmula recurrente

$$x_{k+1} = x_k - 2 \frac{\cos x_k - 1}{-\sin x_k} = x_k + 2 \frac{\cos x_k - 1}{\sin x_k},$$

se obtiene la siguiente tabla de aproximaciones de $\alpha = 0$:

k	x_k	$ x_k - x_{k-1} $
1	-0.092605	1.0926
2	$6.6236 \cdot 10^{-5}$	0.092671
3	$-2.38962 \cdot 10^{-14}$	$6.6236 \cdot 10^{-5}$

Observad que ahora la convergencia hacia la raíz $\alpha = 0$ es claramente más rápida que en el ejemplo anterior, en el que se usó el método de Newton convencional.

Actividad 5

Aplicad el método de Newton para encontrar las dos únicas soluciones de la ecuación $(2.2)^x = (1.1)x + 5.5$.

Actividad 6

Demostrad que es posible calcular $\sqrt{7}$, hasta una precisión fijada cualquiera, utilizando únicamente sumas, restas, multiplicaciones y divisiones. Indicación: observad que $\sqrt{7}$ es el cero positivo de la ecuación $f(x) = 0$ donde $f(x) = x^2 - 7$ y escribid para este caso el esquema de Newton.

En general, si se sospecha que α es un cero de multiplicidad m de $f(x)$, es decir, tal que cumple $f \in \mathcal{C}^{m+1}$ y $f(\alpha) = f'(\alpha) = f''(\alpha) = \dots = f^{(m-1)}(\alpha) = 0$, $f^{(m)}(\alpha) \neq 0$, entonces el método de Newton modificado se escribe

$$x_{k+1} = x_k - m \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

Actividad 7

Aplicad el método de Newton modificado para aproximar, con un error inferior a 10^{-7} , la raíz α de multiplicidad mayor que 1 que el polinomio $p(x) = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16$ tiene cercana a $x_0 = 3$.

1.3. Método de la secante

1.3.1. Idea geométrica

El método de la secante se inicia, a diferencia de los métodos anteriores, a partir de dos aproximaciones iniciales x_0 y x_1 . A partir de estos se calcula la recta que une los puntos $(x_0, f(x_0))$ y $(x_1, f(x_1))$ que viene dada por la ecuación

$$y - f(x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_1).$$

Esta recta es, en general, secante a la gráfica $y = f(x)$, es decir, la corta de manera no tangente. De aquí recibe el nombre el método. El siguiente iterado, x_2 , es aquel punto en el cual la recta corta el eje $y = 0$. O sea, sustituyendo $y = 0$ en la ecuación anterior, y denominando x_2 el valor de x correspondiente, se tiene

$$0 - f(x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x_2 - x_1),$$

de donde, despejando x_2 , obtenemos

$$x_2 = x_1 - f(x_1) \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)}.$$

La figura 10 muestra cómo se obtiene geométricamente x_2 : los puntos marcados corresponden a $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$ y el punto de corte de la recta con $y = 0$ es la aproximación x_2 . De manera análoga, el siguiente iterado se obtiene a partir de la fórmula

$$x_3 = x_2 - f(x_2) \frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)}.$$

Método de la secante

Algoritmo

- 1) Sean x_0, x_1 aproximaciones de α , cero de $f(x)$.
- 2) Calculamos la sucesión de aproximaciones $\{x_k\}_{k \geq 2}$ obtenidas a partir de la recurrencia

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k) \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}, \quad k \geq 1. \quad (1.5)$$

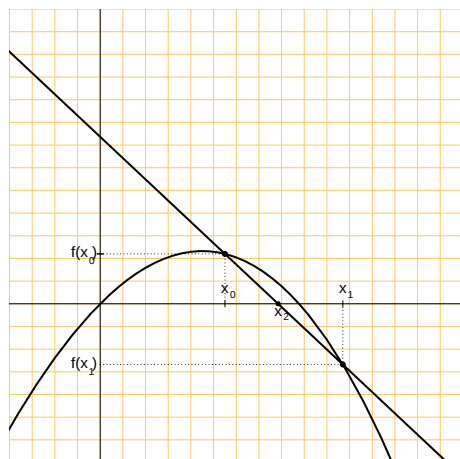


Figura 10: Primera iteración del método de la secante

- Este método se acostumbra a aplicar cuando la evaluación de la función derivada $f'(x)$ es relativamente costosa, es decir, si es complicada de calcular o bien requiere muchas operaciones y, por lo tanto, no interesa usar el método de Newton.
- Observad, a partir del algoritmo presentado, que los nuevos iterados se obtienen de la siguiente forma:

A partir de los iterados:	se calcula:
x_0, x_1	x_2
x_1, x_2	x_3
x_2, x_3	x_4
...	...

Existe una variante del método de la secante denominado **regula falsi** y que funciona como sigue:

- Comenzamos a partir de dos valores iniciales x_0, x_1 de manera que $\alpha \in [x_0, x_1]$.
- Calculamos x_2 a partir de la fórmula

$$x_2 = x_1 - f(x_1) \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)}.$$

Entonces se rechaza, de entre x_0 y x_1 , aquel que cumpla que su imagen por f tenga el mismo signo que $f(x_2)$. Así, por ejemplo, si $f(x_0) > 0$, $f(x_1) < 0$ y $f(x_2) < 0$, despreciamos x_1 y consideramos como aproximaciones válidas x_0 y x_2 . De esta manera, aplicando el teorema de Bolzano (véase sección 1.1.) podemos asegurar que $\alpha \in [x_0, x_2]$. La recurrencia continúa con

$$x_3 = x_2 - f(x_2) \frac{x_2 - x_0}{f(x_2) - f(x_0)},$$

y así sucesivamente.

La ventaja que supone la regla Falsi respecto al método de la secante es, fundamentalmente, asegurar que la raíz α buscada se encuentra siempre dentro del intervalo considerado en cada paso. A pesar de esto, el número de comparaciones que necesita puede hacer que necesitemos muchas iteraciones para obtener el cero buscado con la precisión deseada.

Ejemplo 6

A modo de resumen de los métodos presentados (bisección, Newton y secante), calculamos numéricamente una aproximación de la raíz α que la función $f(x) = 4 \sin x + 1 - x$ tiene en el intervalo $[-\pi, -\pi/2]$. Ésta es la tabla resultante:

n	Bisección	Newton	Secante
0	$[-\pi, -\pi/2]$	$-\pi$	$-\pi$
1	$[-2.35619449, -1.57079633]$	-2.31327412	$-\pi/2$
2	$[-2.35619449, -1.96349541]$	-2.21444913	-1.97378600
3	$[-2.35619449, -2.15984495]$	-2.21009292	-2.36694993
4	$[-2.25801972, -2.15984495]$	-2.21008394	-2.19144324
5	$[-2.25801972, -2.20893233]$	-2.21008394	-2.20882694
6	$[-2.23347603, -2.20893233]$		-2.21009521
7	$[-2.22120418, -2.20893233]$		-2.21008393
8	$[-2.21506826, -2.20893233]$		-2.21008394
$\vdots$	$\vdots$		
22	$[-2.21008432, -2.21008394]$		
23	$[-2.21008413, -2.21008394]$		

Se han destacado subrayadas las cifras decimales que coinciden con la anterior aproximación y que, numéricamente, podemos tomar como correctas. Más precisamente, si consideramos, por ejemplo, las aproximaciones $x_3 = -2.21009292$ y $x_4 = -2.21008394$ obtenidas por el método de Newton, podemos observar que coinciden en las cuatro primeras cifras decimales (2100). Su diferencia es

$$|x_4 - x_3| = |(-2.21008394) - (-2.21009292)| = 0.00000898 = 0.898 \cdot 10^{-5} < 10^{-5}$$

Sabemos que el método empleado proporciona, en condiciones adecuadas, aproximaciones cada vez mejores de la raíz α buscada. Por lo tanto, podemos decir que la mejora que representa la aproximación x_4 respecto de su

precedente, x_3 , es inferior a 10^{-5} . Podemos pensar que la raíz α comienza de la forma $\alpha = -2.2100 \dots$ y, aunque no sea estrictamente correcto, que $|e_a(x_4)| = |\alpha - x_4| \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{-4}$ si consideramos x_4 aproximación por redondeo de α .

Os referimos a la figura 11 para comprobar cómo Wiris aplica los diferentes métodos estudiados para encontrar una aproximación de la solución que la ecuación $4 \sin x + 1 = x$ tiene en el intervalo $[-\pi, -\pi/2]$.

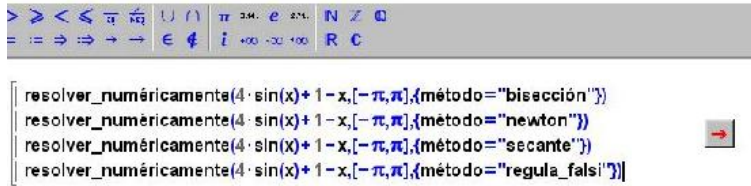


Figura 11: Cálculo de una raíz de la ecuación $4 \sin x + 1 = x$ con Wiris

Actividad 8

Encontrad α tal que cumple $\ln \alpha = 3/\alpha$, con un error inferior a 10^{-5} , usando los métodos de la secante y de la regula falsi.

2. Interpolación de funciones

2.1. Introducción

Supongamos que conocemos una tabla de valores de una determinada función $f(x)$, o sea, un conjunto de valores $\{x_k\}$ -que denominamos **abscisas**- y de sus imágenes $f(x_k)$ (que, de manera abreviada, denotaremos por f_k):

x_k	1	2	4	5	8
f_k	10	5	2	4	14

La pregunta básica que nos planteamos en esta sección es la siguiente: a partir de esta información, ¿somos capaces de proporcionar una aproximación de valores x del intervalo $[1, 8]$ (y que no sean ninguna de las abscisas anteriores)?

Éste es el objetivo principal del denominado **problema de la interpolación** y que consiste en encontrar una función $g(x)$, cercana a $f(x)$ de manera que cumpla que su imagen en las abscisas $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ coincida con la de $f(x)$, es decir, $g(x_k) = f_k$ para $k = 0, 1, \dots, n$.

En primer lugar, y como norma general, es necesario decidir qué **tipo** de función puede reproducir mejor el comportamiento de $f(x)$. Así, por ejemplo:

- escogeremos $g(x)$ como combinación de funciones $\sin x$, $\cos x$, si la función $f(x)$ presenta un comportamiento periódico;
- si $f(x)$ presenta valores muy grandes (positivos o negativos), concentrados en ciertos puntos -un posible comportamiento asintótico-, buscaremos $g(x)$ en forma de función racional, o sea, un cociente de dos polinomios;
- si, en cambio, $f(x)$ presenta un comportamiento suave, sin grandes variaciones, consideraremos $g(x)$ polinomios; en este caso se suele escribir $p(x)$ en vez de $g(x)$.

Este último caso es el más sencillo, recibe el nombre de *interpolación polinomial* y es el que trataremos en este apartado.

Con la calculadora Wiris podemos calcular directamente el polinomio interpolador. Véase una posible sintaxis, correspondiente al ejemplo anterior, en la figura 12 o, una sintaxis alternativa en la figura 13

$$\text{interpolador}(\{1,2,4,5,8\},\{10,5,2,4,14\},x) \rightarrow -\frac{5}{252} \cdot x^4 + \frac{5}{21} \cdot x^3 + \frac{7}{36} \cdot x^2 - \frac{146}{21} \cdot x + \frac{1042}{63}$$

Figura 12: Interpolando con Wiris (1)

$$\begin{aligned} &A=\text{punto}(1,10); B=\text{punto}(2,5); C=\text{punto}(4,2); D=\text{punto}(5,4); E=\text{punto}(8,14); \\ &\text{interpolador}(\{A,B,C,D,E\},x) \rightarrow -\frac{5}{252} \cdot x^4 + \frac{5}{21} \cdot x^3 + \frac{7}{36} \cdot x^2 - \frac{146}{21} \cdot x + \frac{1042}{63} \end{aligned}$$

Figura 13: Interpolando con Wiris (2)

Es conveniente destacar que la interpolación, al igual que el cálculo de ceros de funciones, son herramientas que el Cálculo Numérico pone en nuestras manos para, a menudo, permitirnos dar soluciones aproximadas de problemas de la vida cotidiana. Un ejemplo de este hecho puede ser el siguiente: supongamos que se posee el censo de una cierta población P en cuatro momentos distintos de los últimos cuarenta años:

any	1970	1980	1990	2000
número de habitantes	40543	35977	51068	65429

Entonces, ¿podríamos dar una cifra aproximada del número de habitantes que tenía dicha población en el año 1992? Al final de este tema podréis dar vosotros mismos una respuesta a esta pregunta.

2.2. Existencia y unicidad del polinomio interpolador

Respecto al problema de interpolación, en el caso polinomial, es conocido el siguiente resultado (cuya demostración podéis encontrar en la mayoría de los libros de Cálculo Numérico).

Teorema: dados $n + 1$ puntos $(x_0, f_0), (x_1, f_1), (x_2, f_2), \dots, (x_n, f_n)$, de abscisas x_k todas distintas, existe un único polinomio $p_n(x)$ de grado menor o igual que n tal que $p(x_k) = f_k$ para todo $k = 0, 1, 2, \dots, n$.

- Decimos que $p_n(x)$ **interpola*** la función $f(x)$ en los puntos (x_k, f_k) , para $k = 0, 1, \dots, n$.
- Observad que las abscisas en el problema de interpolación polinomial se acostumbran a numerar a partir del subíndice 0 (o sea, $x_0, x_1, \dots$).
- Una manera directa de encontrar $p_n(x) = a_n x^n + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

* O bien que $p_n(x)$ es el **polinomio interpolador de grado menor o igual que n** de la tabla $\{(x_k, f_k)\}_{k=0,1,\dots,n}$.

que interpole $\{(x_k, f_k)\}_{k=0,1,\dots,n}$ es plantear el sistema lineal de $n + 1$ ecuaciones y $n + 1$ incógnitas asociado

$$p_n(x_k) = f_k \quad k = 0, 1, 2, \dots, n,$$

es decir,

$$\begin{cases} a_n x_0^n + \dots + a_2 x_0^2 + a_1 x_0 + a_0 = f_0 \\ a_n x_1^n + \dots + a_2 x_1^2 + a_1 x_1 + a_0 = f_1 \\ \vdots \\ a_n x_n^n + \dots + a_2 x_n^2 + a_1 x_n + a_0 = f_n \end{cases}$$

y resolverlo (véase figura 14). Sin embargo, en la práctica, no es éste el

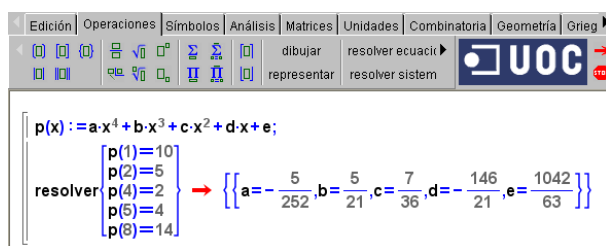


Figura 14: Resolución directa del polinomio interpolador

método más eficaz.

En las siguientes secciones mostraremos algunos de los métodos más usuales para calcular el polinomio interpolador de una tabla $\{(x_k, f_k)\}_{k=0,1,\dots,n}$ dada.

2.3. Método de Lagrange

Éste es el método más sencillo, conceptualmente, para obtener el polinomio interpolador $p_n(x)$. A partir de una tabla $\{(x_k, f_k)\}_{k=0,1,\dots,n}$ dada se construyen los siguientes $n + 1$ polinomios:

$$L_i(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_i - x_1)(x_i - x_2)(x_i - x_3) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)},$$

para $i = 0, 1, \dots, n$, es decir,

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \cdots (x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3) \cdots (x_0 - x_n)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3) \cdots (x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \cdots (x_1 - x_n)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3) \cdots (x - x_n)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3) \cdots (x_2 - x_n)}$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$L_n(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3) \cdots (x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)(x_n - x_3) \cdots (x_n - x_{n-1})}.$$

Estos $L_i(x)$, $i = 0, 1, \dots, n$ se denominan **polinomios de Lagrange** y satisfacen las siguientes propiedades:

- 1) Cada $L_i(x)$ es un polinomio de grado n .
- 2) $L_i(x_j) = \delta_{ij}$ para todo $i, j = 0, 1, \dots, n$ donde δ_{ij} es la conocida función **Delta de Dirac**:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j, \\ 1 & \text{si } i = j. \end{cases}$$

- 3) Observad que también se pueden escribir de la manera siguiente:

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0, \dots, n \\ j \neq i}} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Entonces, el **polinomio interpolador de Lagrange** en los puntos $\{(x_k, f_k)\}_{k=0, \dots, n}$ se obtiene a partir de

$$p_n(x) = f_0 L_0(x) + f_1 L_1(x) + \dots + f_n L_n(x) = \sum_{i=0}^n f_i L_i(x).$$

Método de Lagrange

Algoritmo

- 1) Para $i = 0, 1, 2, \dots, n$ calculamos los polinomios de Lagrange

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0, \dots, n \\ j \neq i}} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

- 2) Entonces, el polinomio que interpola la tabla de valores $\{(x_k, f_k)\}_{k=0, 1, \dots, n}$ viene dado por la expresión

$$p_n(x) = f_0 L_0(x) + f_1 L_1(x) + \dots + f_n L_n(x) = \sum_{i=0}^n f_i L_i(x).$$

Ejemplo 7

Aplicamos el método de Lagrange para encontrar el polinomio interpolador de grado menor o igual que 4, $p_4(x)$, correspondiente a la tabla:

x_k	1	2	4	5	8
f_k	10	5	2	4	14

Calculamos los polinomios de Lagrange asociados $L_0(x), \dots, L_4(x)$:

$$L_0(x) = \frac{(x-2)(x-4)(x-5)(x-8)}{(1-2)(1-4)(1-5)(1-8)} = \frac{1}{84} (x^4 - 19x^3 + 126x^2 - 344x + 320),$$

$$L_1(x) = \frac{(x-1)(x-4)(x-5)(x-8)}{(2-1)(2-4)(2-5)(2-8)} = -\frac{1}{36} (x^4 - 18x^3 + 109x^2 - 252x + 160),$$

$$L_2(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-5)(x-8)}{(4-1)(4-2)(4-5)(4-8)} = \frac{1}{24} (x^4 - 16x^3 + 81x^2 - 146x + 80),$$

$$L_3(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-4)(x-8)}{(5-1)(5-2)(5-4)(5-8)} = -\frac{1}{36} (x^4 - 15x^3 + 70x^2 - 120x + 64)$$

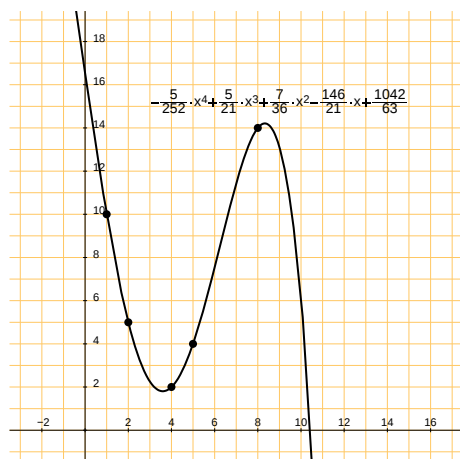
$$L_4(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-4)(x-5)}{(8-1)(8-2)(8-4)(8-5)} = \frac{1}{504} (x^4 - 12x^3 + 49x^2 - 78x + 40).$$

Entonces,

$$\begin{aligned} p_4(x) &= \sum_{j=0}^4 f_j L_j(x) = \\ &= f_0 L_0(x) + f_1 L_1(x) + \dots + f_4 L_4(x) = \\ &= -\frac{5}{252}x^4 + \frac{5}{21}x^3 + \frac{7}{36}x^2 - \frac{146}{21}x + \frac{1042}{63}. \end{aligned}$$

El resultado se puede observar en la figura 15.

La calculadora Wiris permite construir un gráfico interactivo para visualizar el polinomio interpolador y estudiar cómo influyen en el mismo los

Figura 15: El polinomio interpolador $p_4(x)$

diferentes cambios en los datos (véase figura 16).

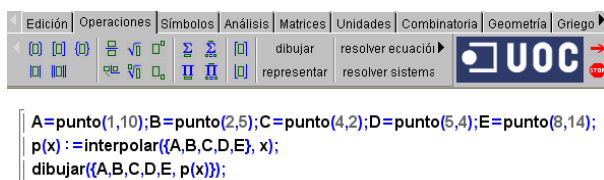


Figura 16: Interpolación interactiva con Wiris

Actividad 9

Encontrad el polinomio interpolador de la tabla siguiente:

x_k	-1	0	4	5
f_k	5	-3	2	-4

- ¿Qué ocurre si quisiésemos rehacer los cálculos del polinomio interpolador al añadir una abscisa x_5 (y su valor correspondiente f_5)?

En tal caso es necesario calcular de nuevo todos los polinomios de Lagrange sin poder apenas aprovechar los cálculos anteriores. Éste es uno de sus mayores inconvenientes.

- El polinomio interpolador $p_4(x)$ proporciona una aproximación de la función $f(x)$. Por lo tanto, para aproximar el valor de $f(\alpha)$ para un cierto valor α próximo al intervalo $[1, 8]$, podemos considerar $p_4(\alpha)$. Debemos destacar que si este valor α se encuentra lejos del intervalo de interpolación $[1, 8]$ el error cometido puede ser muy grande e, incluso, imposible de estimar *a priori*.

Tomemos, por ejemplo, $\alpha = 3$. ¿Cómo podemos evaluar $p_4(3)$ de manera eficiente?

Con Wiris la respuesta es clara: basta dar un nombre al polinomio interpolador y calcular el valor correspondiente (véase figura 17).

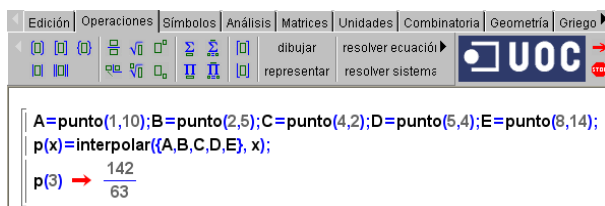


Figura 17: Evaluación de $p_4(\alpha)$ utilizando Wiris

Ahora bien, si no disponemos de una calculadora simbólica potente, ¿cómo podemos evaluar $p_4(3)$ (manualmente o mediante un lenguaje de programación) empleando para esto el mínimo número de operaciones?

La respuesta a esta pregunta la proporciona la denominada **regla de Horner**, que consiste en identificar esta evaluación con una división adecuada de polinomios. Expliquemos en primer lugar de dónde proviene y su funcionamiento básico, para dar posteriormente su algoritmo.

¿En qué consiste la Regla de Horner?

Supongamos que realizamos la división entre $p_4(x)$ y el monomio $x - 3$ (o, si se quiere, en general, entre $p(x)$ y $x - \alpha$ si lo que queremos es calcular $p(\alpha)$); puesto que $x - 3$ es de grado 1 el residuo r es una constante y, por lo tanto, podemos escribir

$$p_4(x) = q(x) (x - 3) + r,$$

donde $q(x)$ es el cociente. Observad entonces que $p_4(3) = q(3)(3 - 3) + r = r$. Así pues, para evaluar $p(\alpha)$ basta con conocer el residuo de la división entre los polinomios $p(x)$ y $x - \alpha$. Además, para efectuar dicha división, la **regla de Ruffini** nos proporciona un método sencillo y rápido. En nuestro caso

	-5/252	5/21	7/36	-146/21	1042/63
3	↓	-15/252	15/28	138/63	-300/21
	-5/252	5/28	46/63	-100/21	142/63

En consecuencia, $p_4(3) = 142/63$.

¿Cuál es el algoritmo general?

Supongamos que $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ y que queremos evaluar $p(\alpha)$. Como antes, calculamos la división $p(x) = q(x) (x - \alpha) + r$, con $q(x) = b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \dots + b_1 x + b_0$, gracias a la regla de

Ruffini. Así, tendremos una situación del tipo

$$\begin{array}{ccccccc}
 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\
 \alpha & \downarrow & \boxed{?} & \boxed{?} & \boxed{?} & \boxed{?} & \\
 \hline
 & b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \cdots & b_0 & \boxed{b_{-1}}
 \end{array}$$

donde los interrogantes indican cantidades que hay que calcular. Observad que las b_j se determinan de manera recurrente, bien a partir del esquema de Ruffini completo:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\
 \alpha & \downarrow & \boxed{\alpha b_{n-1}} & \boxed{\alpha b_{n-2}} & \boxed{\alpha b_{n-3}} & \boxed{\alpha b_1} & \\
 \hline
 & b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \cdots & b_0 & \boxed{b_{-1}}
 \end{array}$$

o bien aplicando las fórmulas:

$$\begin{aligned}
 b_{n-1} &= a_n, \\
 b_{n-2} &= a_{n-1} + \alpha b_{n-1}, \\
 b_{n-3} &= a_{n-2} + \alpha b_{n-2}, \\
 &\vdots \\
 b_0 &= a_1 + \alpha b_1,
 \end{aligned}$$

hasta llegar a $p(\alpha) = r = b_{-1} = a_0 + \alpha b_0$.

Regla de Horner

Algoritmo

Dado $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, para evaluar $p(\alpha)$ aplicamos la recurrencia:

$$\begin{aligned}
 b_{n-1} &= a_n, \\
 b_k &= a_{k+1} + \alpha b_{k+1}, \quad k = n-2, n-3, \dots, 0, -1.
 \end{aligned}$$

Entonces, $p(\alpha) = b_{-1}$.

También...

...se puede usar la regla de Horner, modificada convenientemente, para determinar $p'(\alpha), p''(\alpha), \dots, p^{(n)}(\alpha)$.

Actividad 10

Utilizad la Regla de Horner para evaluar $p(2)$, siendo $p(x)$ cada uno de los siguientes polinomios:

$$6x^5 - 3x^2 + 4x - 5, \quad x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

2.4. Método de Newton

Para explicarlo de manera más sencilla, presentaremos su teoría a partir de un ejemplo, extraeremos propiedades y, finalmente, escribiremos su algoritmo en el caso general. Para esto, consideremos nuevamente el ejemplo introducido para ilustrar el método de Lagrange.

Ejemplo 8

Se quiere calcular el polinomio interpolador de grado menor o igual que 4, $p_4(x)$, correspondiente a la tabla

x_k	1	2	4	5	8
f_k	10	5	2	4	14

utilizando el denominado método de Newton.

En primer lugar escribimos los datos en forma de dos columnas, definiendo previamente $f[x_j] = f_j$:

x_0	$f[x_0] = f_0$
x_1	$f[x_1] = f_1$
x_2	$f[x_2] = f_2$
x_3	$f[x_3] = f_3$
x_4	$f[x_4] = f_4$

A partir de estas dos columnas se obtiene una tercera

x_0	$f[x_0]$	
		$f[x_0, x_1]$
x_1	$f[x_1]$	
		$f[x_1, x_2]$
x_2	$f[x_2]$	
		$f[x_2, x_3]$
x_3	$f[x_3]$	
		$f[x_3, x_4]$
x_4	$f[x_4]$	

según las expresiones

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}, \quad f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1},$$

$$f[x_2, x_3] = \frac{f[x_3] - f[x_2]}{x_3 - x_2}, \quad f[x_3, x_4] = \frac{f[x_4] - f[x_3]}{x_4 - x_3}.$$

Notad que cada uno de estos nuevos valores se encuentra justamente entre las dos filas que necesita para ser calculado, es decir

$$\begin{array}{c|c}
 x_0 & f[x_0] \\
 & \nearrow f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} \\
 x_1 & f[x_1] \\
 & \nearrow f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1} \\
 x_2 & f[x_2] \\
 & \nearrow f[x_2, x_3] = \frac{f[x_3] - f[x_2]}{x_3 - x_2} \\
 x_3 & f[x_3] \\
 & \nearrow f[x_3, x_4] = \frac{f[x_4] - f[x_3]}{x_4 - x_3} \\
 x_4 & f[x_4]
 \end{array}$$

Análogamente, calculamos una cuarta columna a partir de las expresiones

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0},$$

$$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1},$$

$$f[x_2, x_3, x_4] = \frac{f[x_3, x_4] - f[x_2, x_3]}{x_4 - x_2}$$

o sea,

$$\begin{array}{c|c}
 x_0 & f[x_0] \\
 & f[x_0, x_1] \\
 x_1 & f[x_1] & f[x_0, x_1, x_2] \\
 & f[x_1, x_2] \\
 x_2 & f[x_2] & f[x_1, x_2, x_3] \\
 & f[x_2, x_3] \\
 x_3 & f[x_3] & f[x_2, x_3, x_4] \\
 & f[x_3, x_4] \\
 x_4 & f[x_4]
 \end{array}$$

Para obtener las últimas columnas de este esquema triangular, basta con calcular las expresiones

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0}$$

$$f[x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{f[x_2, x_3, x_4] - f[x_1, x_2, x_3]}{x_4 - x_1}$$

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{f[x_1, x_2, x_3, x_4] - f[x_0, x_1, x_2, x_3]}{x_4 - x_0}$$

de manera que el esquema final que se obtiene presenta el siguiente aspecto:

x_0	$f[x_0]$				
		$f[x_0, x_1]$			
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2]$		
		$f[x_1, x_2]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$	
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1, x_2, x_3]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$
		$f[x_2, x_3]$		$f[x_1, x_2, x_3, x_4]$	
x_3	$f[x_3]$		$f[x_2, x_3, x_4]$		
		$f[x_3, x_4]$			
x_4	$f[x_4]$				

Los cocientes

$$f[x_0], \dots, f[x_4], f[x_0, x_1], \dots, f[x_0, x_1, x_2], \dots, f[x_0, x_1, \dots, x_4]$$

se denominan *diferencias divididas* y se calculan a partir de las fórmulas

$$f[x_j] = f_j,$$

$$f[x_i, \dots, x_j] = \frac{f[x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_j] - f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}]}{x_j - x_i}.$$

Finalmente, el polinomio interpolador de grado menor o igual que 4 que buscamos viene dado por la expresión

$$p_4(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1] (x - x_0) +$$

$$f[x_0, x_1, x_2] (x - x_0)(x - x_1) +$$

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) +$$

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).$$

Observad que los coeficientes que constituyen $p_4(x)$ son los términos del

El método d'interpolación de Newton también se conoce como **método de las diferencias divididas**.

lado superior del esquema triangular anterior:

x_0	$f[x_0]$				
		$f[x_0, x_1]$			
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2]$		
		$f[x_1, x_2]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$	
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1, x_2, x_3]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$
		$f[x_2, x_3]$		$f[x_1, x_2, x_3, x_4]$	
x_3	$f[x_3]$		$f[x_2, x_3, x_4]$		
		$f[x_3, x_4]$			
x_4	$f[x_4]$				

Aplicado a nuestro ejemplo, el esquema triangular que se obtiene es el siguiente:

1	10				
		-5			
2	5		$7/6$		
		$-3/2$		0	
4	2		$7/6$		$-5/252$
		2		$-5/36$	
5	4		$1/3$		
		$10/3$			
8	14				

que da lugar a

$$p_4(x) = 10 - 5(x-1) + \frac{7}{6}(x-1)(x-2) - \frac{5}{252}(x-1)(x-2)(x-4)(x-5).$$

- Comprobad que

$$\begin{aligned} p_4(x) &= 10 - 5(x-1) + \frac{7}{6}(x-1)(x-2) - \\ &\quad \frac{5}{252}(x-1)(x-2)(x-4)(x-5) = \\ &\quad -\frac{5}{252}x^4 + \frac{5}{21}x^3 + \frac{7}{36}x^2 - \frac{146}{21}x + \frac{1042}{63}, \end{aligned}$$

es decir, que coincide con el polinomio interpolador obtenido (para la misma tabla de valores) aplicando el método de Lagrange. Esto ya lo sabíamos *a priori* pues, una vez fijada la tabla $\{(x_k, f_k)\}$ de valores, el polinomio interpolador es único.

- Habitualmente no se suelen desarrollar los productos que forman $p_4(x)$. Todo lo contrario, de cara a evaluar $p_4(x)$ en un cierto punto α es útil reescribir $p_4(x)$ de la forma

$$p_4(x) = 10 + (x-1) \left(-5 + (x-2) \left(\frac{7}{6} + (x-4) \left(-\frac{5}{252}(x-5) \right) \right) \right)$$

pues así el número de operaciones necesarias para obtener $p_4(\alpha)$ es mínimo. Observad que esta expresión se ha obtenido sacando como factor común, de manera recurrente, los monomios $(x-1)$, $(x-2)$ y $(x-4)$. En nuestro ejemplo, si consideramos $\alpha = 3$ se tiene que

$$p_4(3) = 10 + (3-1) \left(-5 + (3-2) \left(\frac{7}{6} + (3-4) \left(-\frac{5}{252} (3-5) \right) \right) \right),$$

que proporciona el valor $p_4(3) = 142/63$.

- **¿En qué varía el método de Newton si se añade una abscisa nueva?**

Como veremos en el siguiente ejemplo, una de las grandes ventajas del método de Newton consiste en que al añadir nuevas abscisas todos los cálculos anteriores se aprovechan, de manera que el número de operaciones que debemos efectuar para obtener el nuevo polinomio interpolador es relativamente pequeño. Tal propiedad se basa en el siguiente resultado:

Las diferencias divididas $f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_j]$ son funciones simétricas en los valores $x_i, x_{i+1}, \dots, x_j$, o sea, son invariantes bajo permutaciones de las x_k 's. Por ejemplo, $f[x_1, x_2, x_3] = f[x_3, x_2, x_1] = f[x_2, x_1, x_3] = f[x_3, x_1, x_2]$.

Así pues, supongamos que queremos añadir a la tabla anterior el dato $(x_5, f_5) = (7, 12)$ y calcular $p_5(x)$, el polinomio interpolador de grado menor o igual que 5 de la nueva tabla. En este caso basta con añadir $(7, 12)$ al final de las dos primeras columnas del esquema triangular anterior y calcular aquellas diferencias divididas que nos faltan. Es decir, consideramos la tabla

x_k	1	2	4	5	8	7
f_k	10	5	2	4	14	12

donde observad que **no se han ordenado** las abscisas sino que hemos situado los nuevos datos al final de la tabla. Ahora, en el anterior esquema de Newton calculamos solamente aquellas diferencias divididas que se encuentran subrayadas:

1	10					
		-5				
2	5		7/6			
		-3/2		0		
4	2		7/6		-5/252	
		2		-5/36		-1/315
5	4		1/3		-7/180	
		10/3		-1/3		
8	14		-2/3			
		2				
7	12					

De manera que el polinomio interpolador buscado es

$$p_5(x) = 10 - 5(x-1) + \frac{7}{6}(x-1)(x-2) - \frac{5}{252}(x-1)(x-2)(x-4)(x-5) - \frac{1}{315}(x-1)(x-2)(x-4)(x-5)(x-8).$$

Observad que únicamente hemos necesitado añadir un término (polinomial, claro) al polinomio $p_4(x)$.

- Es importante destacar que el número de abscisas de una tabla no determina el grado del polinomio interpolador sino únicamente su grado máximo. Concretamente, dada una tabla $\{(x_k, f_k)\}_{k=0, \dots, n}$ con $n+1$ abscisas (pues recordad que k se mueve desde 0 hasta n), el polinomio interpolador $p_n(x)$ no tiene por qué tener, *a priori*, grado **exactamente** n sino que sólo se puede asegurar que tenga grado **menor o igual que** n . El siguiente ejemplo ilustra este hecho.

Buscamos $p_6(x)$, el polinomio interpolador asociado a la siguiente tabla de valores:

x_k	1	2	3	4	5	6	7
f_k	1	5	14	30	55	91	140

Entonces, calculamos el esquema triangular de Newton

1	1						
		4					
2	5		5/2				
		9		1/3			
3	14		7/2		0		
		16		1/3	0		
4	30		9/2		0	0	
		25		1/3	0		
5	55		11/2		0		
		36		1/3			
6	91		13/2				
		49					
7	140						

de manera que el polinomio interpolador es

$$p_6(x) = 1 + 4(x-1) + \frac{5}{2}(x-1)(x-2) + \frac{1}{3}(x-1)(x-2)(x-3)$$

cuyo grado es exactamente 3 y no 6 como se podría esperar.

Método de Newton

Algoritmo

- Calculamos las **diferencias divididas**:

$$f[x_j] = f_j,$$

$$f[x_i, \dots, x_j] = \frac{f[x_{i+1}, \dots, x_j] - f[x_i, \dots, x_{j-1}]}{x_j - x_i}.$$

que conforman el esquema triangular

x_0	$f[x_0]$				
		$f[x_0, x_1]$			
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2]$		
		$f[x_1, x_2]$		$\dots$	
x_2	$f[x_2]$		$\dots$		$f[x_0, x_1, \dots, x_n]$
		$\dots$		$\dots$	
$\vdots$	$\vdots$		$f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$		
		$f[x_{n-1}, x_n]$			
x_n	$f[x_n]$				

- Entonces, el polinomio interpolador en los puntos $\{(x_k, f_k)\}_{k=0,1,\dots,n}$ viene dado por

$$\begin{aligned} p_n(x) = & f[x_0] + f[x_0, x_1] (x - x_0) + \\ & f[x_0, x_1, x_2] (x - x_0)(x - x_1) + \\ & \dots + f[x_0, x_1, \dots, x_n] (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}). \end{aligned}$$

Actividad 11

Utilizad el método de Newton para interpolar la siguiente tabla de valores:

x_k	-2	1	2	5
f_k	-7	0	3	1

Comprobad con la calculadora Wiris el resultado.

La interpolación polinomial no se reduce exclusivamente a aproximar una tabla de valores que presenten un comportamiento polinomial sino que, a veces, puede también aproximar algunos comportamientos exponenciales o potenciales, como se puede ver en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 9

Se sospecha que la siguiente tabla de valores

x_k	1	2
f_k	2	3

corresponde a una función $f(x) = ae^{bx}$ con $a > 0$, b dos constantes desconocidas. Utilizaremos el método de Newton para aproximar a , b y $f(x)$.

En primer lugar, observad que si tomamos logaritmos a ambos lados de la expresión $f(x) = ae^{bx}$ se tiene

$$\ln f(x) = \ln(ae^{bx}) = \ln a + \ln(e^{bx}) = \ln a + bx.$$

Por lo tanto, si definimos $g(x) = \ln f(x)$, $A = \ln a$, $B = b$, la igualdad anterior se convierte en

$$g(x) = A + Bx, \quad (2.1)$$

donde ahora $g(x)$ presenta un comportamiento claramente polinomial (en realidad, lineal). Calcularemos la tabla correspondiente a la función $g(x)$ y la interpolaremos por un polinomio de grado menor o igual que 1 (pues se tienen dos abscisas). De esta manera obtendremos aproximaciones para A y B en (2.1). Deshaciendo el cambio de variables, obtendremos a y b . En efecto, la nueva tabla, calculada a partir de $g_k = \ln f_k$, viene dada por

x_k	1	2
g_k	$\ln 2$	$\ln 3$

Construimos el esquema triangular de Newton

$$\begin{array}{c|c} 1 & \ln 2 \\ & \frac{\ln 3 - \ln 2}{2 - 1} = \ln \frac{3}{2} \\ 2 & \ln 3 \end{array}$$

y así, el polinomio de grado menor o igual que 1 que interpola la tabla de valores $\{(x_k, g_k)\}_{k=0,1}$ es

$$\begin{aligned} p_1(x) &= \ln 2 + \left(\ln \frac{3}{2}\right)(x - 1) = \left(\ln 2 - \ln \frac{3}{2}\right) + \left(\ln \frac{3}{2}\right)x = \\ &= \ln \frac{2}{3} + \left(\ln \frac{3}{2}\right)x = \ln \frac{4}{3} + \left(\ln \frac{3}{2}\right)x. \end{aligned}$$

Si la comparamos con $g(x) = A + Bx$ se obtiene $A = \ln(4/3)$ y $B = \ln(3/2)$. Teniendo en cuenta que $a = e^A$ y que $b = B$ se deduce que $a = 4/3$ y $b = \ln(3/2)$ y, finalmente,

$$f(x) = ae^{bx} = \frac{4}{3} e^{(\ln(3/2))x}.$$

Esta expresión de $f(x)$ admite una mayor simplificación: notad que

$$e^{(\ln(3/2))x} = \left(e^{\ln(3/2)}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^x,$$

de manera que podemos aproximar $f(x)$ por

$$\frac{4}{3} \left(\frac{3}{2}\right)^x = 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{3}{2}\right)^x = 2 \left(\frac{3}{2}\right)^{x-1}.$$

2.5. Fórmula del error en la interpolación polinomial

Un aspecto muy importante de la interpolación polinomial y, en general, de cualquier aproximación de una función por otra, es encontrar fórmulas que nos permitan estimar el error cometido en dicha aproximación. Para ser más precisos, supongamos que $p_n(x)$ es el polinomio interpolador de una función $f(x)$ en los puntos (todos éstos diferentes) $\{x_k\}_{k=0,1,\dots,n}$. Sabemos que en estos puntos, el error en la aproximación cumple que

$$f(x_k) - p_n(x_k) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

pues justamente $p_n(x_k) = f_k$ son las condiciones que se imponen para determinar $p_n(x)$. Tomemos ahora α , un punto diferente de las abscisas de interpolación (es decir, $\alpha \neq x_k$, para todo $k = 0, 1, \dots, n$). Entonces, ¿es posible estimar el error cometido al aproximar $f(\alpha)$ por $p_n(\alpha)$? La respuesta a tal pregunta se basa en el siguiente resultado:

Teorema: sean f una función con derivadas continuas hasta orden $n + 1$ * y $p_n(x)$ el polinomio interpolador en los puntos $\{(x_k, f_k)\}_{k=0,1,\dots,n}$. Entonces, el error (absoluto) cometido al aproximar $f(\alpha)$ por $p_n(\alpha)$ viene dado por

$$f(\alpha) - p_n(\alpha) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_\alpha)}{(n+1)!} (\alpha - x_0)(\alpha - x_1) \cdots (\alpha - x_n)$$

donde ξ_α pertenece al menor intervalo que contiene los puntos $x_0, x_1, \dots, x_n, \alpha$.

*es decir, tal que $f, f', f'', \dots, f^{(n+1)}$ son funciones continuas.

Actividad 12

La siguiente tabla corresponde a la función $f(x) = e^x$:

x_k	-1	0	1
f_k	0.3678794412	1	2.718281828

Calculad $p_2(x)$, polinomio interpolador de grado menor o igual que 2, y obtened su valor en el punto $x = 1/2$ usando para esto la regla de Horner.

Ejemplo 10

Considerad nuevamente la actividad anterior y tomad $\alpha = 1/2$. Entonces, ¿cuál es el error absoluto (máximo) que se comete al aproximar $f(1/2) = e^{1/2} = \sqrt{e}$ por $p_2(1/2)$?

Para determinarlo, apliquemos el teorema anterior. En primer lugar, notad que si tomamos valor absoluto en la fórmula del error se tiene que

$$\left| f\left(\frac{1}{2}\right) - p_2\left(\frac{1}{2}\right) \right| = \frac{|f^{(3)}(\xi_{1/2})|}{3!} \left| \frac{1}{2} - (-1) \right| \left| \frac{1}{2} - 0 \right| \left| \frac{1}{2} - 1 \right| \quad (2.2)$$

donde $\xi_{1/2} \in [-1, 1]$, intervalo menor que contiene los puntos $-1, 0, 1, 1/2$.

Por lo tanto, debemos encontrar una cota superior para

$$|f^{(3)}(\xi_{1/2})|, \quad \xi_{1/2} \in [-1, 1].$$

Puesto que $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = f''(x) = f^{(3)}(x) = e^x$ y teniendo en cuenta que la función e^x es estrictamente creciente, podemos deducir que

$$|f^{(3)}(\xi_{1/2})| \leq e^1 \simeq 2.718281828.$$

Sustituyendo esta cota en la expresión (2.2) y operando se obtiene

$$\left| f\left(\frac{1}{2}\right) - p_2\left(\frac{1}{2}\right) \right| \lesssim \frac{2.718281828}{6} \left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0.1698926142,$$

de modo que una cota superior del error cometido es

$$\left| \sqrt{e} - p_2\left(\frac{1}{2}\right) \right| \lesssim 0.1698926142,$$

Para tener una estimación más realista del error cometido es conveniente comparar el error absoluto con el valor aproximado, es decir, considerar el error relativo (el cual ya definimos en la introducción de este módulo) que, en este caso, viene dado por la expresión siguiente:

$$e_r\left(\frac{1}{2}\right) \simeq \frac{|\sqrt{e} - p_2(\frac{1}{2})|}{p_2(\frac{1}{2})}.$$

Calculadlo.

Actividad 13

Considerad la tabla de la función e^x de la actividad 12. Entonces:

- 1) Calculad el valor real de $\sqrt{e}$ y comparadlo con el valor obtenido gracias a la interpolación, $p_2(1/2)$, en la actividad 12. ¿Qué error se ha cometido? Comparad este error con la estimación obtenida en el ejemplo anterior.
- 2) Considerad la función $f(x) = \sin(2.2x + 1.1)$ y escribid la correspondiente tabla de valores de abscisas $x = 0.1, 0.2, 0.4$ y 0.5 (en radianes). Entonces:
 - Aplicad el método de Newton para encontrar el polinomio interpolador $p_3(x)$ de la tabla obtenida.
 - Evaluad $p_3(x)$ en el punto $x = 0.3$, usando la regla de Horner.
 - Calculad el error cometido en esta aproximación comparando $p_3(0.3)$ con el valor exacto $f(0.3)$.
 - Deducid una cota del error absoluto máximo para esta aproximación, $|f(0.3) - p_3(0.3)|$, utilizando el teorema anterior y comparadla con el valor obtenido en el apartado precedente.

2.6. Interpolación inversa

Permitidnos, nuevamente, presentar esta aplicación de la interpolación mediante un ejemplo.

Ejemplo 11

Dada la siguiente tabla de valores de una determinada función $f(x)$:

x_k	-1	0	3	4
f_k	-2	1	5	6

nos preguntamos para qué valor (aproximado) α esta función toma el valor $A = 3.5$.

Una primera posibilidad para resolverlo es la siguiente: consideramos $p_3(x)$ su polinomio interpolador y buscamos α que cumpla $p_3(\alpha) = A$. Gráficamente corresponde a la figura 18, y notad que resolver la ecuación $p_3(\alpha) = A$ es,

en general, no trivial. Otra posibilidad es la denominada **interpolación**

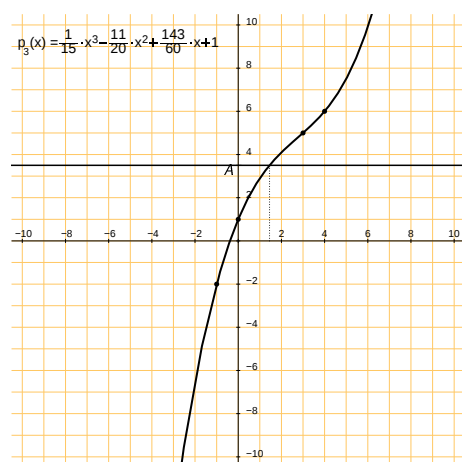


Figura 18: Intersección entre $y = p_3(x)$ e $y = A = 3.5$

inversa que consiste en la siguiente idea: si la tabla de valores de la función $f(x)$ es creciente o decreciente podemos suponer que, como mínimo, en el intervalo considerado la función $f(x)$ es invertible*. Sea $g(x)$ su inversa, o sea, $y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)$. Considerad ahora la tabla de valores correspondiente a la función $g(y)$. Esta tabla no es otra que la tabla de la función $f(x)$ invirtiendo los papeles de abscisas y sus imágenes:

y_k	-2	1	5	6
g_k	-1	0	3	4

Si calculamos $q_3(y)$ el polinomio interpolador de esta tabla se obtiene (aplicando el método de Newton), en primer lugar, el esquema triangular

-2	-1			
		1/3		
1	0		5/84	
		3/4		-1/840
5	3		1/20	
		1		
6	4			

del cual se deduce

$$q_3(y) = -1 + \frac{1}{3}(y+2) + \frac{5}{84}(y+2)(y-1) - \frac{1}{840}(y+2)(y-1)(y-5).$$

Con lo que encontrar un valor aproximado de α que cumpla $f(\alpha) = A$ equivale a calcular $\alpha = g(A)$. Así pues, en nuestro caso, teniendo en cuenta que $A = 3.5$, tenemos que

$$\alpha \simeq q_3(A) = q_3(3.5).$$

* En la práctica, lo que se suele exigir es no tener dos abscisas con el mismo valor de f , o sea, a x_k y x_j diferentes les deben corresponder f_k y f_j diferentes.

Si para evaluar $q_3(y)$ utilizamos la expresión

$$q_3(y) = -1 + (y + 2) \left(\frac{1}{3} + (y - 1) \left(\frac{5}{84} - \frac{1}{840}(y - 5) \right) \right),$$

que minimiza el número de operaciones, se obtiene $\alpha \simeq q_3(3.5) = 1.67633929$.

2.7. Interpolación de Hermite

El problema de la interpolación de Hermite consiste en encontrar el polinomio interpolador de una tabla de valores correspondiente a una cierta función $f(x)$ donde, además, se conocen valores de sus derivadas en algunas de sus abscisas. Por ejemplo:

x_k	x_0	x_1	x_2
$f(x_k)$	f_0	f_1	f_2
$f'(x_k)$	f'_0		f'_2

Notad que esta tabla impone cinco condiciones sobre el polinomio interpolador. Éstas determinan cinco coeficientes y, por lo tanto, el polinomio interpolador es de grado menor o igual que 4, $H_4(x)$. Este polinomio recibe el nombre de *polinomio de Hermite* de la tabla anterior. Al igual que en el caso del polinomio interpolador, el polinomio de Hermite $H_4(x)$ se puede encontrar imponiendo las condiciones

$$H_4(x_k) = f_k, \quad k = 0, 1, 2 \quad H'_4(x_0) = f'_0, \quad H'_4(x_2) = f'_2,$$

y resolviendo el sistema lineal obtenido (véase figura 19).

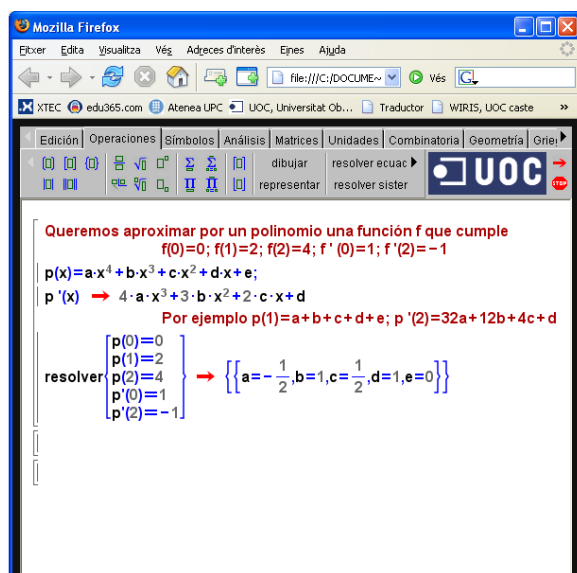


Figura 19: Obtención directa del polinomio de Hermite

El polinomio de Hermite correspondiente a una tabla de valores $\{(x_k, f_k, f'_k)\}_k$ se puede calcular a partir de una generalización del método de Newton que a

continuación detallamos y que presenta las siguientes variaciones respecto a tal método:

- En la primera y segunda columnas debemos repetir los valores (x_k, f_k) si conocemos el valor f'_k de la derivada en la abscisa x_k . Por ejemplo, en nuestro caso sería

$$\begin{array}{c|c} x_0 & f[x_0] = f_0 \\ x_0 & f[x_0] = f_0 \\ x_1 & f[x_1] = f_1 \\ x_2 & f[x_2] = f_2 \\ x_2 & f[x_2] = f_2 \end{array}$$

- Calculamos ahora la tercera columna:

$$\begin{array}{c|c} x_0 & f[x_0] \\ & f[x_0, x_0] \\ x_0 & f[x_0] \\ & f[x_0, x_1] \\ x_1 & f[x_1] \\ & f[x_1, x_2] \\ x_2 & f[x_2] \\ & f[x_2, x_2] \\ x_2 & f[x_2] \end{array}$$

Observad que aparecen dos diferencias divididas que, en principio, no tienen sentido pues se están evaluando en el mismo punto: $f[x_0, x_0]$ y $f[x_2, x_2]$. Para calcularlas, conviene tener en cuenta que

$$\begin{aligned} f[x_0, x_0] &= \lim_{x \rightarrow x_0} f[x_0, x] = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f[x] - f[x_0]}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) = f'_0. \end{aligned}$$

De manera análoga, se deduce que $f[x_2, x_2] = f'(x_2) = f'_2$, y así el esquema anterior se escribe:

$$\begin{array}{c|c} x_0 & f[x_0] \\ & f[x_0, x_0] = f'_0 \\ x_0 & f[x_0] \\ & f[x_0, x_1] \\ x_1 & f[x_1] \\ & f[x_1, x_2] \\ x_2 & f[x_2] \\ & f[x_2, x_2] = f'_2 \\ x_2 & f[x_2] \end{array}$$

Por este motivo el método que explicamos se conoce también como **de las diferencias divididas generalizadas**.

- A partir de este paso, el esquema se completa de manera similar a como se hace en el método de Newton:

x_0	$f[x_0]$			
		$f[x_0, x_0] = f'_0$		
x_0	$f[x_0]$		$f[x_0, x_0, x_1]$	
		$f[x_0, x_1]$		$f[x_0, x_0, x_1, x_2]$
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2]$	$f[x_0, x_0, x_1, x_2, x_2]$
		$f[x_1, x_2]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_2]$
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1, x_2, x_2]$	
		$f[x_2, x_2] = f'_2$		
x_2	$f[x_2]$			

Por lo tanto, el polinomio de Hermite viene dado por la expresión

$$\begin{aligned}
 H_4(x) = & f[x_0] + f[x_0, x_0](x - x_0) + f[x_0, x_0, x_1](x - x_0)^2 + \\
 & f[x_0, x_0, x_1, x_2](x - x_0)^2(x - x_1) + \\
 & f[x_0, x_0, x_1, x_2, x_2](x - x_0)^2(x - x_1)(x - x_2).
 \end{aligned}$$

- Se puede generalizar esta misma idea al caso en el que se conozcan derivadas de orden superior de la función $f(x)$ en algunas de las abscisas, es decir, por ejemplo, una tabla del siguiente tipo:

x_k	x_0	x_1	x_2	x_3
$f(x_k)$	f_0	f_1	f_2	f_3
$f'(x_k)$	f'_0		f'_2	f'_3
$f''(x_k)$	f''_0			f''_3

En tal caso deberemos utilizar que $f[x_j, x_j, x_j] = f''_j$.

Ejemplo 12

Se desea calcular el polinomio de Hermite correspondiente a la tabla

x_k	0	1	2
f_k	0	2	4
f'_k	1		-1

El número de condiciones que se deben satisfacer son cinco y que determinan un polinomio de grado menor o igual que 4, $H_4(x)$. Calculamos el

correspondiente esquema de diferencias divididas generalizadas

0	$f_0 = 0$			
		$f[x_0, x_0] = f'_0 = 1$		
0	$f_0 = 0$		1	
		$f[x_0, x_1] = 2$		$-1/2$
1	$f_1 = 2$		0	$-1/2$
		$f[x_1, x_2] = 1$		$-3/2$
2	$f_2 = 4$		-3	
		$f[x_2, x_2] = f'_2 = -1$		
2	$f_2 = 4$			

Finalmente,

$$\begin{aligned}
 H_4(x) &= 0 + 1(x-0) + 1(x-0)^2 - \frac{1}{2}(x-0)^2(x-1) - \\
 &\quad \frac{1}{2}(x-0)^2(x-1)(x-2) = \\
 &\quad x + x^2 - \frac{1}{2}x^2(x-1) - \frac{1}{2}x^2(x-1)(x-2).
 \end{aligned}$$

2.7.1. Fórmula del error en la interpolación de Hermite

De manera análoga al caso polinomial, el siguiente resultado proporciona una expresión del error cometido en la interpolación de Hermite. Para simplificar su formulación nos restringiremos únicamente al caso en el que la tabla está formada por valores de la función y de su derivada, concretamente, $\{(x_k, f_k, f'_k)\}_{k=0,1,\dots,n}$.

Teorema: sean f una función con derivadas continuas hasta orden $2n+2$ y $H_{2n+1}(x)$ el polinomio de Hermite en los puntos $\{(x_k, f_k, f'_k)\}_{k=0,1,\dots,n}$. Entonces, el error (absoluto) cometido al aproximar $f(\alpha)$ por $H_{2n+1}(\alpha)$ viene dado por

$$f(\alpha) - H_{2n+1}(\alpha) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi_\alpha)}{(2n+2)!} [(\alpha - x_0)(\alpha - x_1) \cdots (\alpha - x_n)]^2,$$

donde ξ_α pertenece al intervalo menor que contiene los puntos $x_0, x_1, \dots, x_n, \alpha$.

Actividad 14

En la actividad 12 se buscó $p_2(x)$, polinomio interpolador de la función e^x en los puntos $x = -1, 0, 1$, y se utilizó para proporcionar una aproximación $p_2(1/2)$ de $\sqrt{e}$. Considerad ahora la misma tabla y añadid la condición para

la derivada: $f'(0) = 1$. Buscad el correspondiente polinomio de Hermite $H_3(x)$ y usadlo para estimar $\sqrt{e}$. Comparad la aproximación obtenida con el valor real de $\sqrt{e}$. ¿Ha mejorado la aproximación respecto a la que se encontró en aquella ocasión?

Actividad 15

Encontrad el polinomio de Hermite $H_5(x)$ que interpola la tabla

x_k	-1	3	4
f_k	1	-2	4
f'_k	0	1	2

y evaluad $H_5(0)$ usando la regla de Horner.

2.8. Fenómeno de Runge

Parece intuitivamente razonable pensar que, si queremos aproximar una cierta función $f(x)$, en un intervalo $[a, b]$, cuanto mayor sea el número de abscisas que interpoemos mayor será la similitud entre la función y su polinomio interpolador. A pesar de esto, este resultado es, en general, falso y un ejemplo que lo demuestra es el denominado **fenómeno de Runge**. Este fenómeno se observa al considerar un conjunto relativamente grande ($n \geq 9, 10$, aprox.) de abscisas equiespaciadas (es decir, la distancia entre dos abscisas consecutivas es siempre la misma) y calculamos el correspondiente polinomio interpolador $p(x)$. Se observa entonces que, aunque la similitud entre $p(x)$ y la función $f(x)$ es grande en el centro del intervalo de interpolación, la discrepancia entre ambas gráficas en los extremos del intervalo es muy grande, siendo esta diferencia más acusada cuanto mayor es el grado del polinomio interpolador.

Ejemplo 13

Consideremos la función $f(x) = 1/(35x^2 + 2)$ y sea $p_{10}(x)$ el polinomio interpolador de grado menor o igual que 10 en los puntos $-1, -0.8, -0.6, \dots, 0, \dots, 0.6, 0.8, 1$. El dibujo de las dos gráficas se observa en la figura 20.

Para evitar este fenómeno conviene evitar manejar grados de interpolación altos ni, en tal caso, usar abscisas equiespaciadas. Los métodos alternativos que se suelen utilizar dividen el intervalo de interpolación en subintervalos con un número pequeño de abscisas en cada uno de los mismos. Después se buscan los correspondientes polinomios interpoladores (ahora de grado bajo, típicamente 3) y se les imponen condiciones añadidas para que dichos polinomios “encajen” bien entre sí: además de coincidir en los puntos de inter-

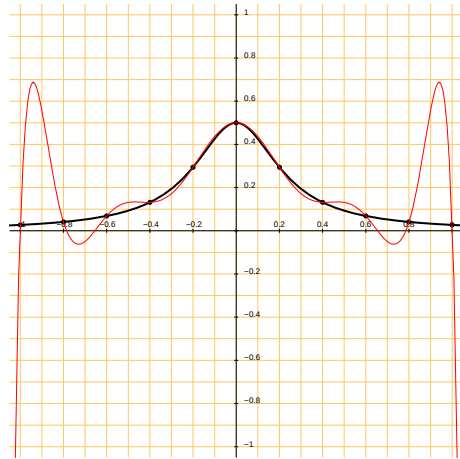


Figura 20: Gráficas de la función $f(x) = 1/(35x^2 + 2)$ y el polinomio interpolador $p_{10}(x)$

sección entre subintervalos también se les exige que coincidan en sus primeras y segundas derivadas. De esta manera se obtienen funciones polinomiales definidas a trozos y que, en su conjunto forman una función de clase C^2 (o sea, continua, derivable dos veces y con segunda derivada continua). Estos polinomios interpoladores a trozos se denominan *splines* y son muy utilizados, especialmente, en ingeniería.

3. Aplicaciones de la interpolación de funciones

Aparte de su utilidad *per se* como herramienta de aproximación de funciones, la interpolación polinómica proporciona fórmulas de aproximación de derivadas e integrales de estas funciones. En las siguientes secciones presentaremos brevemente algunas de las más utilizadas.

3.1. Derivación numérica

3.1.1. Introducción

Supongamos que conocemos la siguiente tabla de valores relativa a una función $f(x)$:

x_k	1.8	1.9	2	2.1	2.2
f_k	1.280725	1.345581	1.417223	1.483962	1.552837

(3.1)

y que queremos aproximar $f'(x)$. Una posible forma de hacerlo es la siguiente: consideramos $p_4(x)$ su polinomio interpolador de grado menor o igual que 4 y entonces podemos aproximar

$$f'(x) \simeq p'_4(x).$$

Lamentablemente, esta fórmula no es del todo satisfactoria ya que no se tiene una expresión del error cometido en un punto x cualquiera. Explicamos brevemente el motivo de esto. Recordad (véase 2.2) que, en nuestro caso:

$$f(x) - p_4(x) = \frac{f^{(5)}(\xi_x)}{5!} (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$$

o, equivalentemente,

$$f(x) - p_4(x) = g(x) \omega_4(x)$$

donde hemos definido

$$g(x) = \frac{f^{(5)}(\xi_x)}{5!}, \quad \omega_4(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$$

y ξ_x pertenece al intervalo menor que contiene $x_0, x_1, \dots, x_4, x$. Observad que derivando la anterior expresión obtenemos

$$f'(x) - p'_4(x) = g'(x) \omega_4(x) + g(x) \omega'_4(x),$$

fórmula del error cometido al aproximar $f'(x)$ por $p'_4(x)$. El inconveniente de esta fórmula es que $g(x)$ depende de una cierta función ξ_x que desconocemos, de manera que *a priori* no podemos determinar $g'(x)$ en un punto x cualquiera. Lo que sí podemos hacer, en cambio, es evaluar esta expresión en valores $x = x_k$ donde x_k es cualquiera de las abscisas de interpolación. En este caso sabemos que $\omega_4(x_k) = 0$ y, como consecuencia de esto, tenemos que

$$f'(x_k) - p'_4(x_k) = g'(x_k) \omega_4(x_k) + g(x_k) \omega'_4(x_k) = g(x_k) \omega'_4(x_k)$$

para $k = 0, 1, \dots, 4$. Además, no es difícil comprobar que

$$\omega'_4(x_k) = (x - x_0) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_4),$$

de manera que podemos escribir

$$f'(x_k) - p'_4(x_k) = \frac{f^{(5)}(\xi_{x_k})}{5!} (x_k - x_0) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_4)$$

con ξ_{x_k} perteneciente al intervalo $[x_0, x_4]$. Por ejemplo, tendríamos que

$$f'(x_2) - p'_4(x_2) = \frac{f^{(5)}(\xi_{x_2})}{5!} (x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4),$$

o también que

$$f'(x_4) - p'_4(x_4) = \frac{f^{(5)}(\xi_{x_4})}{5!} (x_4 - x_0)(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3).$$

En general se tiene el siguiente resultado.

Teorema: sean f una función con derivadas continuas hasta orden $n+1$ y $p_n(x)$ el polinomio interpolador en los puntos $\{(x_k, f_k)\}_{k=0,1,\dots,n}$. Entonces, el error (absoluto) cometido al aproximar $f'(x_k)$ por $p'_n(x_k)$, para $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ viene dado por

$$f'(x_k) - p'_n(x_k) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_{x_k})}{(n+1)!} (x_k - x_0) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n)$$

con $\xi_{x_k} \in [x_0, x_n]$.

Por esta razón, solamente podremos efectuar aproximaciones de $f'(x)$ en las abscisas de interpolación. Mostraremos ahora las fórmulas más usuales.

3.1.2. Diferencias hacia delante y diferencias centradas

Por simplicidad, supondremos que nuestras abscisas se distribuyen de manera **equiespaciada**, es decir, entre dos abscisas consecutivas la distancia es h , fijada. Además, si suponemos que queremos aproximar $f'(x_0)$ lo que se hace,

habitualmente, es centrar la tabla de abscisas en torno al mismo. O sea, las supondremos de la forma

$$x_k = x_0 + kh, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Por ejemplo, si a partir de la tabla 3.1 de la función $f(x)$ queremos aproximar $f'(2)$, numeramos las abscisas de manera que $x_0 = 2$:

k	-2	-1	0	1	2
x_k	1.8	1.9	2	2.1	2.2
f_k	1.280725	1.345581	1.417223	1.483962	1.552837

En este ejemplo se tiene $h = 0.1$.

Las dos fórmulas que presentaremos se basan en la aproximación de $f(x)$ por $p_1(x)$, polinomio interpolador de grado menor o igual que 1. En el primer caso, esta interpolación se lleva a cabo en los puntos (x_0, f_0) y (x_1, f_1) , mientras que en el segundo la interpolación se realiza en los puntos (x_{-1}, f_{-1}) y (x_1, f_1) .

- En el primero de los casos, aplicando el método de Newton, tenemos que

$$\begin{aligned} f(x) &\simeq p_1(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) = \\ &f_0 + \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} (x - x_0) = f_0 + \frac{f_1 - f_0}{h} (x - x_0) \end{aligned}$$

de donde se deduce que

$$f'(x) \simeq p'_1(x) = \frac{f_1 - f_0}{h}$$

y, por lo tanto, que

$$f'_0 = f'(x_0) \simeq p'_1(x_0) = \frac{f_1 - f_0}{h}.$$

Es decir, si h es suficientemente pequeño (en caso contrario el error puede ser muy grande), podemos aproximar

$$f'_0 \simeq \frac{f_1 - f_0}{h}. \quad (3.2)$$

O, equivalentemente,

$$f'(x_0) \simeq \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h}$$

Este cociente recibe el nombre de **diferencia hacia delante** en el punto x_0 .

Si la aplicamos a nuestro ejemplo, se obtiene:

$$f'(2) = f'_0 \simeq \frac{f_1 - f_0}{h} = \frac{1.483962 - 1.417223}{0.1} = 0.667390.$$

- La segunda fórmula se deduce al aproximar $f(x)$ por su polinomio interpolador en las abscisas x_{-1} y x_1 :

$$\begin{aligned} f(x) &\simeq p_1(x) = f[x_{-1}] + f[x_{-1}, x_1](x - x_{-1}) = \\ &f_{-1} + \frac{f_1 - f_{-1}}{x_1 - x_{-1}}(x - x_{-1}) = f_{-1} + \frac{f_1 - f_{-1}}{2h}(x - x_{-1}). \end{aligned}$$

Análogamente al caso anterior

$$f'(x) \simeq p'_1(x) = \frac{f_1 - f_{-1}}{2h}$$

de donde se obtiene la denominada aproximación de la derivada por **diferencia centrada**:

$$f'_0 \simeq \frac{f_1 - f_{-1}}{2h}. \quad (3.3)$$

O, equivalentemente,

$$f'(x_0) \simeq \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} = \frac{f(x_1) - f(x_{-1})}{2h}.$$

Con esta fórmula, la aproximación que tenemos de $f'(2)$ es

$$f'(2) = f'_0 \simeq \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} = \frac{1.483962 - 1.345581}{2 \cdot 0.1} = 0.691905.$$

Observad que existe cierta discrepancia entre ambas aproximaciones. Sin entrar en el estudio del error de cada una de las dos fórmulas presentadas, diremos únicamente que, en general

$$\begin{aligned} f'_0 &= \frac{f_1 - f_0}{h} + O(h) \\ f'_0 &= \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} + O(h^2) \end{aligned}$$

donde $O(h)$ indica que el error en la primera fórmula, **diferencia hacia delante**, es aproximadamente de la forma $a_e h$, con a_e una constante desconocida. De igual manera el término $O(h^2)$ en la fórmula de la **diferencia centrada** nos indica que el error que estamos cometiendo con esta aproximación es del tipo $a_c h^2$, con a_c otra constante desconocida *a priori*. En nuestro ejemplo, esto quiere decir que

$$f'(2) \simeq 0.667390, \quad \text{con un error de la forma } a_e \cdot 10^{-1}$$

si usamos *diferencia hacia delante* y que

$$f'(2) \simeq 0.691905, \quad \text{con un error de la forma } a_c \cdot 10^{-2}$$

si utilizamos *diferencia centrada*. Por lo tanto, observad que, como regla general, la aproximación usando *diferencia centrada* de la derivada es mejor que la obtenida utilizando *diferencia hacia delante*.

Actividad 16

Obtened aproximaciones de $f'(1.9)$ y $f'(2.1)$, a partir de la misma tabla, usando la fórmula de la diferencia centrada.

Siguiendo la misma idea, podemos obtener fórmulas más precisas (con menos error) si interpolamos $f(x)$ por polinomios de grado más alto*. En particular, si interpolamos $f(x)$ en los puntos $\{(x_k, f_k)\}_{k=-2, \dots, 2}$ por $p_4(x)$, y lo reescribimos de manera conveniente, obtenemos la siguiente fórmula

$$f'_0 \simeq p'_4(x_0) = \frac{1}{12h} (-f_2 + 8f_1 - 8f_{-1} + f_{-2}). \quad (3.4)$$

Es decir,

$$f'(x_0) \simeq p'_4(x_0) = \frac{1}{12h} (-f(x_0 + 2h) + 8f(x_0 + h) - 8f(x_0 - h) + f(x_0 - 2h)),$$

cuyo error es del tipo $O(h^4)$. Observad que este error es significativamente menor (y por lo tanto mejor es la aproximación que proporciona) pero en cambio necesita conocer el valor de la función $f(x)$ en más puntos. Aplicando esta fórmula tenemos

$$f'(2) = f'_0 \simeq \frac{1}{12 \cdot 0.1} (-1.552837 + 8 \cdot 1.483962 - 8 \cdot 1.345581 + 1.280725) = 0.69578.$$

Ejemplo 14

Considerad la siguiente tabla de valores de la función $f(x) = \frac{\sin x}{1 + e^x}$:

x_k	f_k	x_k	f_k
1.6	0.16790998	2.1	0.094173398
1.7	0.15317776	2.2	0.080647912
1.8	0.13814132	2.3	0.067950867
1.9	0.12312166	2.4	0.056180094
2.0	0.10839091		

Se desea aproximar $f'(2)$ tomando $h = 0.2$ y $h = 0.1$ y comparando después los resultados obtenidos con el valor real $f'(2) = -0.14507631$.

Así pues:

- Para $h = 0.2$ debemos considerar abscisas equidistantes con distancia $h = 0.2$. En nuestro caso equivale a considerar la siguiente parte de la

* Recordad que si el grado del polinomio interpolador es alto entonces aparece el fenómeno de Runge. Por lo tanto "más alto" debe entenderse como "hasta grado 6, 7".

tabla anterior:

x_k	f_k
1.6	0.16790998
1.8	0.13814132
2.0	0.10839091
2.2	0.080647912
2.4	0.056180094

Aplicando la fórmula (3.4) se tiene

$$f'(2) \simeq \frac{1}{12 \cdot 0.2} (-0.056180094 + 8 \cdot 0.080647912 - 8 \cdot 0.13814132 + 0.16790998) = -0.14509057.$$

Observad que el error cometido es, aproximadamente,

$$|-0.14507631 - (-0.14509057)| = 0.1426 \cdot 10^{-4}.$$

- Para $h = 0.1$, necesitamos la siguiente porción de la tabla inicial:

x_k	f_k
1.8	0.13814132
1.9	0.12312166
2.0	0.10839091
2.1	0.094173398
2.2	0.080647912

Ahora la fórmula (3.4) se escribe

$$f'(2) \simeq \frac{1}{12 \cdot 0.1} (-0.080647912 + 8 \cdot 0.094173398 - 8 \cdot 0.12312166 + 0.13814132) = -0.14507724,$$

siendo el error cometido, aproximadamente,

$$|-0.14507631 - (-0.14507724)| = 9.3 \cdot 10^{-7}.$$

Aproximación numérica de la derivada

Dada una tabla de valores $\{(x_k, f_k)\}_{k=-n, \dots, n}$, con abscisas equidistantes $x_k = x_0 + kh$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ las siguientes fórmulas proporcionan una aproximación de $f'_0 = f'(x_0)$.

- Diferencia hacia delante: $f'_0 \simeq \frac{f_1 - f_0}{h} + O(h)$.
- Diferencia centrada: $f'_0 \simeq \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} + O(h^2)$.
- Diferencia centrada de grado 4:

$$f'_0 \simeq p'_4(x_0) = \frac{1}{12h} (-f_2 + 8f_1 - 8f_{-1} + f_{-2}) + O(h^4).$$

Actividad 17

Considerad la tabla de valores siguiente, correspondiente a una cierta función

$f(x)$:

x_k	f_k
1.00	1.50954
1.25	1.69843
1.50	1.90432
1.75	2.12952
2.00	2.36459

Calculad aproximadamente $f'(1.50)$ empleando para esto las tres fórmulas del cuadro anterior.

3.2. Integración numérica

3.2.1. Introducción

Otra de las aplicaciones de la interpolación polinomial es la integración numérica, que proporciona fórmulas aproximadas de cálculo de integrales definidas

$$\int_a^b f(x) dx. \quad (3.5)$$

Análogamente a lo que se hizo en el tema de derivación numérica, daremos las ideas que conducen a esta aproximación pero no entraremos (no es el propósito de estos apuntes) en un estudio exhaustivo de sus métodos ni del error cometido.

La calculadora Wiris tiene incorporado el cálculo de primitivas y, siempre que le es posible, lo utiliza para el cálculo de integrales. También tiene incorporada la integración numérica y, cuando la usa, emite un aviso en la ventana inferior de la pantalla (véase figura 21)

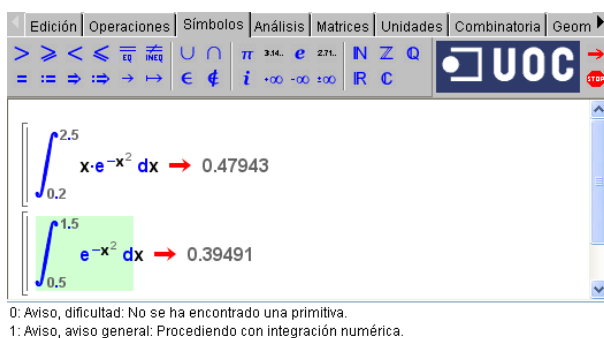


Figura 21: Integración numérica con Wiris

Así pues, para aproximar (3.5) lo que haremos es considerar abscisas $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ equiespaciadas ($x_k = x_0 + kh$, $k = 0, 1, \dots, n$). Si $p_n(x)$ es el polinomio interpolador de grado menor o igual que n de la tabla $\{(x_k, f_k)\}_{k=0,1,\dots,n}$ entonces aproximaremos

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx \simeq \int_{x_0}^{x_n} p_n(x) dx.$$

Teniendo en cuenta que la parte derecha de esta expresión es la integral de un polinomio, que podemos resolver explícitamente, deduciremos de ésta fórmulas numéricas aproximadas de (3.5).

3.2.2. Regla de los trapecios compuesta

Consideremos primero el caso $n = 1$. Observad que el polinomio interpolador es de grado 1 y se obtiene aplicando el método de Newton en los puntos (x_0, f_0) , y (x_1, f_1) :

$$p_1(x) = f_0 + f[x_0, x_1](x - x_0) = f_0 + \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} (x - x_0).$$

Entonces

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx &= \int_{x_0}^{x_1} p_1(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} f_0 + \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} (x - x_0) dx = \\ &= \left[f_0 x + \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} \frac{(x - x_0)^2}{2} \right]_{x_0}^{x_1} = \\ &= f_0(x_1 - x_0) + \frac{f_1 - f_0}{2} (x_1 - x_0) = \\ &= \frac{x_1 - x_0}{2} (f_0 + f_1).\end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos que

$$\int_a^b f(x) dx \simeq \frac{x_1 - x_0}{2} (f_0 + f_1)$$

o, si usamos que $h = x_1 - x_0$,

$$\int_a^b f(x) dx \simeq \frac{h}{2} (f_0 + f_1) \quad (3.6)$$

que es la denominada **regla del trapecio**, ya que

$$\frac{x_1 - x_0}{2} (f_0 + f_1)$$

no es otra que la fórmula del área de un trapecio de base $x_1 - x_0$ y alturas f_0 y f_1 (véase figura 22). Observad que cuanto menor es la base $x_1 - x_0$,

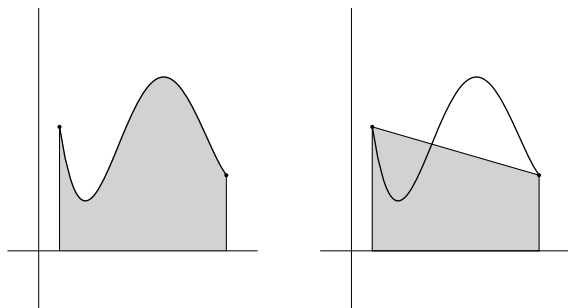


Figura 22: $\int_a^b f(x) dx$ y su aproximación mediante la regla del trapecio

mejor aproxima el área del trapecio la integral de $f(x)$. La pregunta natural es entonces la siguiente: supongamos que consideramos $c = (a + b)/2$ el punto medio del intervalo $[a, b]$; sabemos, por las propiedades de la integral, que

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx;$$

por lo tanto, ¿qué sucede si aplicamos la regla del trapecio a cada subintervalo y sumamos después los resultados parciales? ¿Mejora esto la aproximación de la integral inicial?

La respuesta es sí. ¿Da esto lugar a una fórmula compacta que evite aplicar la regla varias veces de manera paralela? En seguida veremos que también es así.

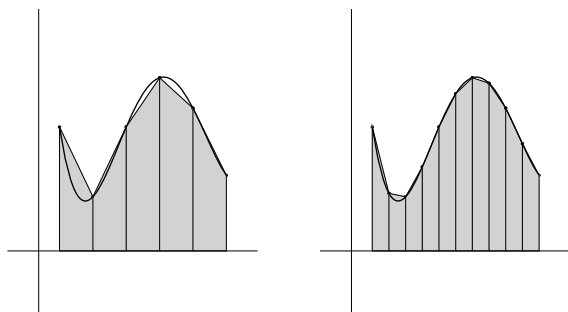


Figura 23: Aproximación de $\int_a^b f(x) dx$ con cinco y diez trapecios

Observad en primer lugar, gráficamente, que conforme aumentamos el número de subintervalos la aproximación mejora (véase figura 23). Estudiémoslo en el caso en el que dividimos el intervalo $[a, b]$ en $N = 3$ subintervalos iguales.

Dado el intervalo $[a, b]$ definimos $h = (b - a)/N = (b - a)/3$ y consideramos las abscisas $x_0 = a$ y $x_k = x_0 + kh$, para $k = 0, 1, \dots, 3$. Observad que $x_3 = x_0 + 3h = a + (b - a) = b$. Calculamos f_k , $k = 0, 1, \dots, 3$. Sabemos que

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{x_0}^{x_3} f(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x) dx.$$

Por lo tanto, si aplicamos la regla del trapecio a cada una de estas integrales tenemos que

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\simeq \frac{h}{2} (f_0 + f_1) + \frac{h}{2} (f_1 + f_2) + \frac{h}{2} (f_2 + f_3) = \\ &\frac{h}{2} (f_0 + 2f_1 + 2f_2 + f_3). \end{aligned}$$

La fórmula que se obtiene al aplicar la regla del trapecio a cada uno de los subintervalos en los que se ha dividido el intervalo $[a, b]$ inicial se denomina **regla de los trapecios compuesta** y viene dada por la siguiente fórmula:

Regla de los trapecios (compuesta):

Dado el intervalo $[a, b]$ consideramos $N \geq 1$ subintervalos y definimos

$$h = \frac{b-a}{N}, \quad x_k = x_0 + kh, \quad k = 0, 1, \dots, N$$

de manera que $x_0 = a$, $x_N = b$ y $f_k = f(x_k)$. Entonces

$$\int_a^b f(x) dx \simeq T_N(f) + \mathcal{O}(h^2)$$

donde

$$T_N(f) = \frac{h}{2} (f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \dots + 2f_{N-2} + 2f_{N-1} + f_N).$$

Ejemplo 15

Se quiere calcular una aproximación de

$$\int_{0.5}^{1.5} e^{-x^2} dx$$

utilizando la regla de los trapecios compuesta con $N = 5$ subintervalos (véase figura 24).

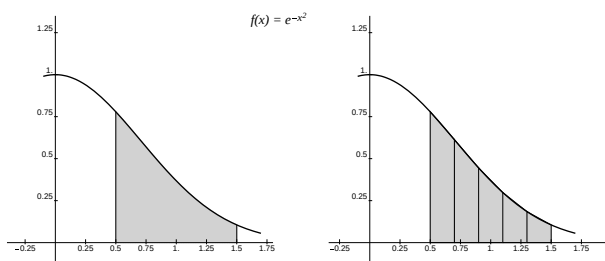


Figura 24: Regla de los trapecios compuesta para la función $f(x) = e^{-x^2}$

En este caso, tenemos $a = 0.5$, $b = 1.5$ y

$$h = \frac{b-a}{N} = \frac{1.5-0.5}{5} = 0.2$$

Por lo tanto, consideramos las abscisas

k	0	1	2	3	4	5
x_k	0.5	0.7	0.9	1.1	1.3	1.5

Si calculamos $f_k = f(x_k)$ para cada punto nos queda

x_k	0.5	0.7	0.9	1.1	1.3	1.5
f_k	0.77880	0.61263	0.44486	0.29820	0.18452	0.10540

Entonces

$$T_5(f) = \frac{0.2}{2} (0.77880 + 2 \cdot 0.61263 + 2 \cdot 0.44486 + 2 \cdot 0.29820 + 2 \cdot 0.18452 + 0.10540) = 0.396462$$

y así,

$$\int_{0.5}^{1.5} e^{-x^2} dx \simeq T_5(f) = 0.396462.$$

Actividad 18

La función $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ no tiene primitiva expresable de manera analítica y por lo tanto cualquier integral definida del tipo

$$\int_a^b \frac{\sin x}{x} dx$$

debe ser necesariamente calculada a partir de métodos numéricos. Aplicad la regla de los trapecios compuesta para calcular

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx$$

con $N = 8$ subintervalos.

3.2.3. Regla de Simpson compuesta

La deducción de la regla de Simpson corresponde al caso en el que en el intervalo $[a, b]$ interpolamos $f(x)$ por un polinomio de grado menor o igual que 2, $p_2(x)$. Entonces

$$\int_a^b f(x) dx \simeq \int_a^b p_2(x) dx$$

Notad que $p_2(x)$ es sencillamente una parábola. Así, la **regla de Simpson** de un único intervalo se expresa de la siguiente manera:

$$\int_a^b f(x) dx \simeq \frac{h}{3} \left(f(a) + 4 f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right). \quad (3.7)$$

Análogamente al caso de la regla de los trapecios compuesta, podemos subdividir el intervalo dado $[a, b]$ en diferentes subintervalos, todos éstos de igual longitud y obtener así una fórmula derivada de aplicar a cada subintervalo la regla de Simpson (véase figura 25).

Deduzcámoslo también para un valor pequeño N de subintervalos antes de dar la expresión general. Para esto consideremos el intervalo $[a, b]$ dividido en $N = 3$ subintervalos iguales. Como en el caso de la regla de los trapecios compuesta, escribimos

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{I_1} f(x) dx + \int_{I_2} f(x) dx + \int_{I_3} f(x) dx$$

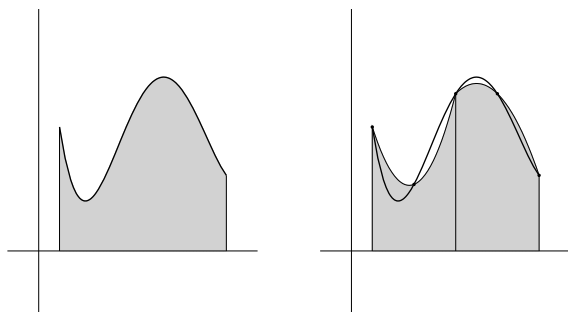


Figura 25: Aproximación de $\int_a^b f(x) dx$ por la Regla de Simpson

donde I_1, I_2, I_3 son los tres subintervalos obtenidos, y aproximamos cada una de estas integrales por la integral del correspondiente polinomio interpolador de grado menor o igual que 2. Esto implica que debemos considerar tres abscisas en cada intervalo I_j : sus extremos y su correspondiente punto medio. Por lo tanto, en cada subintervalo tendremos

I_1 : abscisas: x_0, x_1, x_2 ,

I_2 : abscisas: x_2, x_3, x_4 ,

I_3 : abscisas: x_4, x_5, x_6 ,

donde x_1 es el punto medio del intervalo $[x_0, x_2]$, x_3 del intervalo $[x_2, x_4]$ y x_5 de $[x_4, x_6]$. Esta partición de $[a, b]$ equivale a considerar $x_0 = a$ y a definir las abscisas

$$x_k = x_0 + kh, \quad k = 0, 1, 2, \dots, 2N, \quad \text{donde} \quad h = \frac{b-a}{2N}.$$

Calculando entonces los respectivos valores f_k y aplicando la regla de Simpson a cada subintervalo I_j se deduce

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_{x_0}^{x_2} f(x) dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x) dx + \int_{x_4}^{x_6} f(x) dx \simeq \\ &\frac{h}{3} (f_0 + 4f_1 + f_2) + \frac{h}{3} (f_2 + 4f_3 + f_4) + \\ &\frac{h}{3} (f_4 + 4f_5 + f_6) = \\ &\frac{h}{3} (f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + 4f_5 + f_6). \end{aligned}$$

A diferencia del caso de los trapecios, en la regla compuesta de Simpson necesitamos conocer $f(x)$ en un número impar de abscisas. Entonces la regla general se escribe así:

Regla de Simpson (compuesta):

Dado el intervalo $[a, b]$ consideramos un número $N \geq 1$ de subintervalos y definimos $x_0 = a$,

$$h = \frac{b-a}{2N}, \quad x_k = x_0 + kh, \quad k = 0, 1, \dots, 2N$$

y $f_k = f(x_k)$. Entonces

$$\int_a^b f(x) dx \simeq S_N(f) + \mathcal{O}(h^4)$$

donde

$$S_N(f) = \frac{h}{3} (f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \dots + 2f_{2N-2} + 4f_{2N-1} + f_{2N})$$

Ejemplo 16

Considerad nuevamente el ejemplo 3.2 y calculemos la misma aproximación usando ahora la regla de Simpson (compuesta) para $N = 3$ subintervalos (un ejemplo de cómo se ve gráficamente para $N = 2$ subintervalos lo podéis encontrar en la figura 26). En nuestro caso tenemos

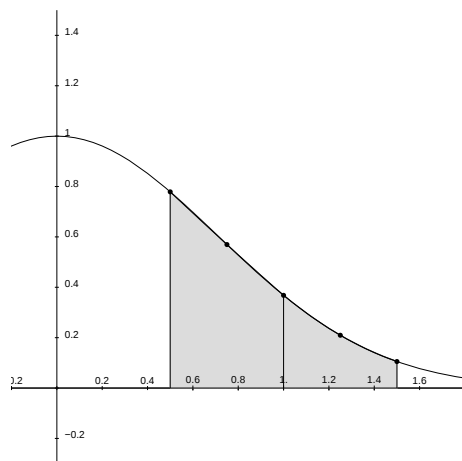


Figura 26: Aproximación por Simpson: dos subintervalos

$$h = \frac{b-a}{2N} = \frac{1.5-0.5}{6} \simeq 0.1666667.$$

Por lo tanto podemos considerar la tabla

k	x_k	f_k
0	0.5	0.7788008
1	0.6666667	0.6411804
2	0.8333333	0.4993518
3	1.	0.3678794
4	1.1666667	0.2563758
5	1.3333333	0.1690133
6	1.5	0.1053992

Entonces,

$$\int_{0.5}^{1.5} e^{-x^2} dx \simeq S_3(f)$$

donde

$$\begin{aligned} S_3(f) &= \frac{0.1666667}{3} (0.7788008 + 4 \cdot 0.6411804 + \\ &2 \cdot 0.4993518 + 4 \cdot 0.3678794 + 2 \cdot 0.2563758 + \\ &4 \cdot 0.1690133 + 0.1053992) \simeq 0.3948861 \end{aligned}$$

Actividad 19

Aplicad la regla de Simpson compuesta para calcular

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx$$

con $N = 4$.

Resumen

El propósito de este módulo es introducir al alumno en el uso de algoritmos numéricos para la resolución de problemas de difícil, si no imposible, resolución analítica. Se han presentado procedimientos básicos en dos líneas diferentes: cálculo de ceros de funciones e interpolación polinómica de funciones, y se ha derivado de este último apartado una sección de aplicaciones a la derivación y la integración numéricas de funciones.

Ejercicios de autoevaluación

1. – Sabemos que la función $f(x) = -3 + x^3 \sin(x) + x$ tiene un cero en el intervalo $[0, 2]$. Calculadlo, con una precisión de 10^{-4} , aplicando el método de la bisección. ¿Cuántas iteraciones necesitaremos?
2. – Repetid el mismo cálculo aplicando el método de Newton y tomando $x_0 = 2$ como valor inicial y con una precisión de 10^{-12} .
3. – Resolved el mismo problema, aplicando ahora el método de la secante, iniciándolo a partir de los puntos $x_0 = 0$ y $x_1 = 2$, y con una precisión de 10^{-11} .
4. – Aplicad el método de la regla falsi al mismo problema a partir de los valores iniciales $x_0 = 0$ y $x_1 = 2$ y con una precisión de 10^{-7} .
5. – Calculad $p_3(x)$, polinomio interpolador de la tabla siguiente:

x_k	0.2	0.8	1.3	1.9
f_k	3	2.2	1.7	2.1

usando el método de Lagrange. Una vez obtenido $p_3(x)$, desarrolladlo en potencias de x y calculad $p_3(1)$ utilizando la regla de Horner.

6. – De una función f se conocen los siguientes valores:

x_k	-0.5	2	3	3.5
f_k	2	3	-1	0.5

Calculad el polinomio $p_3(x)$ que la interpola utilizando el método de Newton. Usadlo para dar una aproximación, $p_3(1)$, de $f(1)$. Evaluad $p_3(1)$ usando la regla de Horner. ¿Qué polinomio interpolador se obtiene si añadimos el dato $(x_4, f_4) = (0, 1.2)$?

7. – Considerad la siguiente tabla de valores correspondiente a una función $f(x)$:

x_k	-0.5	0.1	1	2.5
f_k	2.527	3.879	6.452	10.346

Usad interpolación inversa para dar una aproximación del valor α que cumpla $f(\alpha) = 9$.

8. – Calculad el polinomio de Hermite correspondiente a la siguiente tabla de

valores

x_k	2	3	4
f_k	7.325	8.975	6.018
f'_k	2.234	-0.453	1.018

9. – Usad la regla de los trapecios compuesta para obtener una aproximación de la integral

$$\int_3^4 \left(\sqrt{x^3 + 1} \right) \ln x \, dx,$$

con $N = 4, 8$ y 16 subintervalos.

10. – Aplicad la fórmula de Simpson compuesta para aproximar la integral

$$\int_0^1 x^2 e^{x^2} \, dx$$

con $N = 5$ subintervalos.

Solucionario

Actividades

1. – Si definimos $f(x) = e^{-x} - x^4$ entonces encontrar una solución de la ecuación $e^{-x} = x^4$ es equivalente a encontrar un cero de la función (continua) $f(x)$. Busquemos ahora un intervalo $[a, b]$ en el que f presente un cambio de signo. Podemos hacerlo a partir de su gráfica o bien calculando $f(x)$ para una serie de puntos. En nuestro caso podéis comprobar que para $a = 0$ y $b = 3$ tenemos $f(a) = 1 > 0$ y $f(b) = -80.9502 < 0$. Por lo tanto, existe $\alpha \in [0, 3]$ tal que $f(\alpha) = 0$. Entonces se tiene

n	I_n	longitud de I_n
1	[0.00000000, 1.50000000]	1.500000
2	[0.75000000, 1.50000000]	$7.500000 \cdot 10^{-1}$
3	[0.75000000, 1.12500000]	$3.750000 \cdot 10^{-1}$
4	[0.75000000, 0.93750000]	$1.875000 \cdot 10^{-1}$
5	[0.75000000, 0.84375000]	$9.375000 \cdot 10^{-2}$
6	[0.79687500, 0.84375000]	$4.687500 \cdot 10^{-2}$
7	[0.79687500, 0.82031250]	$2.343750 \cdot 10^{-2}$
8	[0.80859375, 0.82031250]	$1.171875 \cdot 10^{-2}$
9	[0.81445313, 0.82031250]	$5.859375 \cdot 10^{-3}$

Por lo que podemos dar como respuesta cualquier valor del intervalo $[0.81445313, 0.82031250]$. Habitualmente, se suele dar su punto medio, que en este caso es 0.81738281, o sea, $\alpha \simeq 0.81738281$. Comprobad que $f(0.81738281) = -0.00479135$. Observad que el número (mínimo) de iteraciones necesarias para conseguir la precisión pedida ha sido 9, que viene dado por la fórmula

$$N = \left\lceil \frac{\ln \frac{3-0}{10^{-2}}}{\ln 2} \right\rceil + 1 = 9.$$

2. – Consideremos la función (continua) $f(x) = 2 \sin x - x$ y busquemos $\alpha \in [\pi/2, \pi]$ tal que cumpla $f(\alpha) = 0$ con una precisión de 10^{-2} . Aplicando el

método de la bisección se obtiene la tabla de aproximaciones siguiente:

n	I_n	longitud de I_n
0	[1.57079633, 3.14159265]	1.57079633
1	[1.57079633, 2.35619449]	$7.853982 \cdot 10^{-1}$
2	[1.57079633, 1.96349541]	$3.926991 \cdot 10^{-1}$
3	[1.76714587, 1.96349541]	$1.963495 \cdot 10^{-1}$
4	[1.86532064, 1.96349541]	$9.817477 \cdot 10^{-2}$
5	[1.86532064, 1.91440802]	$4.908739 \cdot 10^{-2}$
6	[1.88986433, 1.91440802]	$2.454369 \cdot 10^{-2}$
7	[1.88986433, 1.90213618]	$1.227185 \cdot 10^{-2}$
8	[1.88986433, 1.89600025]	$6.135923 \cdot 10^{-3}$

Si damos el punto medio del último intervalo como aproximación de α tendremos $\alpha \simeq 1.89293229$ y $f(1.89293229) = 0.00419041$.

3. – Consideremos la función $f(x) = (2.2)^x - (1.1)x - 5.5$. Entonces encontrar α solución de la ecuación $(2.2)^x = (1.1)x + 5.5$ equivale a encontrar α , punto de corte entre las curvas $y = (2.2)^x$ e $y = (1.1)x + 5.5$ y, a su vez, a encontrar α , cero de la función continua $f(x)$. Según se observa en la figura 4, estas gráficas se cortan en un punto situado en el intervalo $[a, b] = [2, 4]$. En efecto, $f(a) = f(2) = -2.86 < 0$ y $f(b) = f(4) = 13.5256 > 0$. Aplicando el método de la bisección obtenemos los siguientes intervalos:

n	I_n	longitud de I_n
1	[2.00000000, 3.00000000]	1.000000
2	[2.50000000, 3.00000000]	$5.000000 \cdot 10^{-1}$
3	[2.50000000, 2.75000000]	$2.500000 \cdot 10^{-1}$
4	[2.62500000, 2.75000000]	$1.250000 \cdot 10^{-1}$
5	[2.68750000, 2.75000000]	$6.250000 \cdot 10^{-2}$
6	[2.68750000, 2.71875000]	$3.125000 \cdot 10^{-2}$
7	[2.70312500, 2.71875000]	$1.562500 \cdot 10^{-2}$
8	[2.71093750, 2.71875000]	$7.812500 \cdot 10^{-3}$

Observad que si queremos una aproximación de α mucho más precisa necesitaríamos un número considerable de iteraciones. Al igual que hemos hecho hasta ahora damos como aproximación de α el punto medio del último intervalo: 2.71484375. Comprobad que $f(2.71484375) = 0.01768800$ y que el número de iteraciones necesarias es 8. Efectivamente,

$$N = \left\lceil \frac{\ln \frac{4-2}{10^{-2}}}{\ln 2} \right\rceil + 1 = 8.$$

Para encontrar la otra raíz procedemos de manera análoga: notad que $f(-6) =$

$1.10882 > 0$ y que $f(-4) = -1.05731 < 0$. Entonces,

n	I_n	longitud de I_n
1	$[-5.00000000, -4.00000000]$	1.000000
2	$[-5.00000000, -4.50000000]$	$5.000000 \cdot 10^{-1}$
3	$[-5.00000000, -4.75000000]$	$2.500000 \cdot 10^{-1}$
4	$[-5.00000000, -4.87500000]$	$1.250000 \cdot 10^{-1}$
5	$[-5.00000000, -4.93750000]$	$6.250000 \cdot 10^{-2}$
6	$[-5.00000000, -4.96875000]$	$3.125000 \cdot 10^{-2}$
7	$[-4.98437500, -4.96875000]$	$1.562500 \cdot 10^{-2}$
8	$[-4.98437500, -4.97656250]$	$7.812500 \cdot 10^{-3}$

Por tanto podemos tomar $\alpha \simeq -4.98046875$ y comprobad que en este punto el valor de f es relativamente pequeño: $f(-4.98046875) = -0.00177946$.

4. – Si dibujamos las gráficas de las funciones $y = e^x - 2$ e $y = x$ podéis observar que se cortan únicamente en dos puntos α_1, α_2 situados, aproximadamente, cerca de $x = -2$ y 1 , respectivamente. Así pues aplicamos el método de Newton, que en nuestro caso equivale a la fórmula recurrente

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{e^{x_k} - 2 - x_k}{e^{x_k} - 1}$$

Para α_1 tomamos valor inicial $x_0 = -2$ y obtenemos la siguiente tabla:

k	x_k	$ x_k - x_{k-1} $
0	-2.00000000000000	
1	-1.8434823572503345	$1.56518 \cdot 10^{-1}$
2	-1.8414060661579266	$2.07629 \cdot 10^{-3}$
3	-1.8414056604369762	$4.05721 \cdot 10^{-7}$
4	-1.8414056604369606	$1.55431 \cdot 10^{-14}$

De manera que se tiene $\alpha_1 \simeq -1.8414056604370$. Podéis de nuevo comprobar que $f(-1.8414056604370) = 0.000000 \dots$

Análogamente, para calcular α_2 tomamos $x_0 = 1$ y se obtiene

k	x_k	$ x_k - x_{k-1} $
0	1.00000000000000	
1	1.1639534137386529	$1.63953 \cdot 10^{-1}$
2	1.1464211850430086	$1.75322 \cdot 10^{-2}$
3	1.1461932587044987	$2.27926 \cdot 10^{-4}$
4	1.1461932206205836	$3.80839 \cdot 10^{-8}$
5	1.1461932206205825	$1.11022 \cdot 10^{-15}$

Por tanto, podemos decir también que $\alpha_2 = 1.1461932206206$ con un error inferior a 10^{-12} (de hecho, también es inferior a 10^{-14}). Para comprobarlo, observad que $f(1.1461932206206) = -2.22045 \cdot 10^{-16}$.

5. – Si dibujamos las gráficas de las funciones $(2.2)^x$ y $(1.1)x + 5.5$ podemos observar que se cortan en dos puntos: uno en el intervalo $[-6, -4]$ y el otro en el intervalo $[2, 4]$. En otras palabras, si definimos $f(x) = (2.2)^x - (1.1)x - 5.5$, esta función tiene dos raíces en los intervalos anteriores. Entonces, el esquema de Newton es

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{(2.2)^{x_k} - (1.1)x_k - 5.5}{(2.2)^{x_k} \ln 2.2 - 1.1}.$$

Para el primer cero consideramos condición inicial $x_0 = -6$ y se obtiene

k	x_k	$ x_k - x_{k-1} $
0	-6.	
1	-4.9855687445768648	1.01443
2	-4.9821096699293967	$3.45907 \cdot 10^{-3}$
3	-4.9821096025625220	$6.73669 \cdot 10^{-8}$
4	-4.9821096025625220	$< 10^{-14}$

Podéis comprobar que $f(-4.9821096025625220) = 3.33501 \cdot 10^{-16}$. Por lo tanto $\alpha_1 \simeq -4.9821096025625220$ con una precisión de 10^{-12} . Respecto al segundo cero, consideramos $x_0 = 2$ y obtenemos

k	x_k	$ x_k - x_{k-1} $
0	2.	
1	3.0529673409868638	1.05297
2	2.7597905075050395	$2.93177 \cdot 10^{-1}$
3	2.7127537535002006	$4.70368 \cdot 10^{-2}$
4	2.7116838609380296	$1.06989 \cdot 10^{-3}$
5	2.7116833205472379	$5.40391 \cdot 10^{-7}$
6	2.7116833205471003	$1.37668 \cdot 10^{-13}$

Por tanto, $\alpha_2 \simeq 2.7116833205471003$ con un error inferior a 10^{-12} . Podéis comprobar que $f(\alpha_2) \simeq 0$. En efecto, $f(2.7116833205471003) = 4.25007 \cdot 10^{-16}$. Comparad el número de iteraciones efectuadas y la precisión obtenida con la resolución usando el método de la bisección.

6. – En este caso, $\sqrt{7}$ es la raíz positiva de la ecuación $f(x) = 0$ con $f(x) = x^2 - 7$. Si escribimos en este caso el algoritmo de Newton tenemos

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^2 - 7}{2x_k} = x_k - \frac{x_k}{2} + \frac{7}{2x_k}.$$

Observad que esta fórmula sólo necesita operaciones elementales (suma,

resta, producto y división). Aplicándolo se obtiene

k	x_k	$ x_k - x_{k-1} $
0	1.	
1	4.	3.
2	2.875	1.125
3	2.6548913043478262	$2.20109e - 01$
4	2.6457670441902899	$9.12426e - 03$
5	2.6457513111113693	$1.57331e - 05$
6	2.6457513110645907	$4.67786e - 11$
7	2.6457513110645907	$0.00000e + 00$

Por esto, $\sqrt{7} \simeq 2.6457513110645907$ con un error inferior a $\frac{1}{2} \cdot 10^{-10}$. Podríamos decir (aunque recordad que no es exactamente correcto) que esta aproximación tiene al menos diez cifras decimales correctas teniendo en cuenta el redondeo.

7. – Si aplicamos el método de Newton

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^4 - 8x_k^3 + 24x_k^2 - 32x + 16}{4x_k^3 - 24x^2 + 48x - 32}$$

la convergencia es muy lenta:

k	x_k	$ x_k - x_{k-1} $
0	3.0000000000000000	
1	2.7500000000000000	$2.50000 \cdot 10^{-1}$
2	2.5625000000000000	$1.87500 \cdot 10^{-1}$
3	2.4218750000000000	$1.40625 \cdot 10^{-1}$
4	2.3164062500000000	$1.05469 \cdot 10^{-1}$
5	2.2373046875000000	$7.91016 \cdot 10^{-2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
21	2.0023784033623917	$7.92806 \cdot 10^{-4}$
22	2.0017838057105326	$5.94598 \cdot 10^{-4}$
23	2.0013379016681130	$4.45904 \cdot 10^{-4}$
24	2.0010034571134154	$3.34445 \cdot 10^{-4}$
25	2.0007529403896229	$2.50517 \cdot 10^{-4}$
26	2.0005652508728522	$1.87690 \cdot 10^{-4}$

En cambio, puesto que sabemos que la raíz buscada tiene multiplicidad mayor que 1, podemos utilizar el método de Newton modificado variando la multiplicidad sospechada. Así, por ejemplo, podemos considerar

$$x_{k+1} = x_k - 2 \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - 2 \frac{x_k^4 - 8x_k^3 + 24x_k^2 - 32x + 16}{4x_k^3 - 24x^2 + 48x - 32}$$

que proporciona la siguiente tabla de valores

k	x_k	$ x_k - x_{k-1} $
0	3.0000000000000000	
1	2.5000000000000000	$5.00000 \cdot 10^{-1}$
2	2.2500000000000000	$2.50000 \cdot 10^{-1}$
3	2.1250000000000000	$1.25000 \cdot 10^{-1}$
4	2.0625000000000000	$6.25000 \cdot 10^{-2}$
5	2.0312500000000000	$3.12500 \cdot 10^{-2}$
6	2.0156250000000000	$1.56250 \cdot 10^{-2}$
7	2.0078125000000000	$7.81250 \cdot 10^{-3}$
8	2.0039062500000000	$3.90625 \cdot 10^{-3}$
9	2.0019531250000000	$1.95312 \cdot 10^{-3}$
10	2.0009765625000000	$9.76562 \cdot 10^{-4}$
11	2.0004882812500000	$4.88281 \cdot 10^{-4}$
12	2.0002441406250000	$2.44141 \cdot 10^{-4}$
13	2.0001220703125000	$1.22070 \cdot 10^{-4}$
14	2.0001220703125000	$< 10^{-8}$

Si en cambio usamos

$$x_{k+1} = x_k - 3 \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - 3 \frac{x_k^4 - 8x_k^3 + 24x_k^2 - 32x_k + 16}{4x_k^3 - 24x_k^2 + 48x_k - 32}$$

obtenemos

k	x_k	$ x_k - x_{k-1} $
0	3.0000000000000000	
1	2.2500000000000000	$7.50000 \cdot 10^{-1}$
2	2.0625000000000000	$1.87500 \cdot 10^{-1}$
3	2.0156250000000000	$4.68750 \cdot 10^{-2}$
4	2.0039062500000000	$1.17188 \cdot 10^{-2}$
5	2.0009765625000000	$2.92969 \cdot 10^{-3}$
6	2.0002441406250000	$7.32422 \cdot 10^{-4}$
7	2.0000610351562500	$1.83105 \cdot 10^{-4}$
8	2.0000610351562500	$< 10^{-8}$

que proporciona una aproximación de esta raíz $\alpha \simeq 2.0000610351562500$ con un error inferior a 10^{-8} . Si ahora probásemos con $m = 4$, es decir,

$$x_{k+1} = x_k - 4 \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - 4 \frac{x_k^4 - 8x_k^3 + 24x_k^2 - 32x_k + 16}{4x_k^3 - 24x_k^2 + 48x_k - 32}$$

tendríamos problemas de cálculo efectivo de las aproximaciones x_k ya que el denominador se hace muy pequeño (y, en consecuencia, $f(x_k)/f'(x_k)$ muy grande). Por tanto, tomamos como mejor aproximación la anteriormente enunciada.

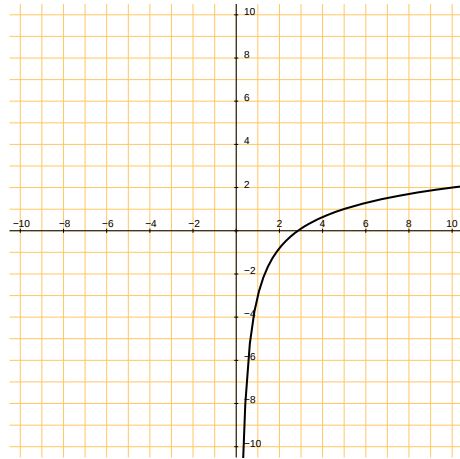


Figura 27: Gráfica de la función $f(x) = \ln x - \frac{3}{x}$

8. — Dibujamos la función $f(x) = \ln x - \frac{3}{x}$ (véase la figura 27). Observad que presenta un cero α en el intervalo $[2, 4]$. Si usamos el método de la secante con valores iniciales $x_0 = 2$ y $x_1 = 4$ se obtiene la siguiente sucesión de iterados:

k	x_k	$ x_k - x_{k-1} $
0	2.0000000000000000	
1	4.0000000000000000	
2	3.1181850753808678	$8.81815 \cdot 10^{-1}$
3	2.7832497403478276	$3.34935 \cdot 10^{-1}$
4	2.8624647071846421	$7.92150 \cdot 10^{-2}$
5	2.8574906575988535	$4.97405 \cdot 10^{-3}$
6	2.8573906494567360	$1.00008 \cdot 10^{-4}$
7	2.8573907835179084	$1.34061 \cdot 10^{-7}$

que proporciona la aproximación $\alpha \simeq 2.8573907835179084$ con una precisión superior a 10^{-5} . Si en cambio aplicamos el método de la regla falsi, donde recordad que en cada iteración elegimos aquellos dos puntos

que presentan cambio de signo de la función f , se obtiene

k	x_k	$ x_k - x_{k-1} $
0	2.0000000000000000	
1	4.0000000000000000	
1	3.1181850753808678	$8.81815 \cdot 10^{-1}$
2	2.9187427994188853	$1.99442 \cdot 10^{-1}$
3	2.8719358548652667	$4.68069 \cdot 10^{-2}$
4	2.8608455225844382	$1.10903 \cdot 10^{-2}$
5	2.8582117181306783	$2.63380 \cdot 10^{-3}$
6	2.8575858793602076	$6.25839 \cdot 10^{-4}$
7	2.8574371493875010	$1.48730 \cdot 10^{-4}$
8	2.8574018027499903	$3.53466 \cdot 10^{-5}$
9	2.8573934023311534	$8.40042 \cdot 10^{-6}$

que nos da $\alpha \simeq 2.8573934023311534$ con la precisión pedida.

9. – Para las abscisas $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 4$ y $x_3 = 5$ calculamos los correspondientes polinomios de Lagrange:

$$L_0(x) = \frac{(x-0)(x-4)(x-5)}{(-1-0)(-1-4)(-1-5)} = -\frac{1}{30}x^3 + \frac{3}{10}x^2 - \frac{2}{3}x$$

$$L_1(x) = \frac{(x+1)(x-4)(x-5)}{(0+1)(0-4)(0-5)} = \frac{1}{20}x^3 - \frac{2}{5}x^2 + \frac{11}{20}x + 1$$

$$L_2(x) = \frac{(x+1)(x-0)(x-5)}{(4+1)(4-0)(4-5)} = -\frac{1}{20}x^3 + \frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{4}x$$

$$L_3(x) = \frac{(x+1)(x-0)(x-4)}{(5+1)(5-0)(5-4)} = \frac{1}{30}x^3 - \frac{1}{10}x^2 - \frac{2}{15}x.$$

Entonces, el polinomio interpolador de grado menor o igual que 3 viene dado por

$$\begin{aligned} p_3(x) &= f_0L_0(x) + f_1L_1(x) + f_2L_2(x) + f_3L_3(x) = \\ &= 5L_0(x) - 3L_1(x) + 2L_2(x) - 4L_3(x) = \\ &= -\frac{11}{20}x^3 + \frac{7}{2}x^2 - \frac{79}{20}x - 3. \end{aligned}$$

10. – Si tomamos $p(x) = 6x^5 - 3x^2 + 4x - 5$ tenemos

$$\begin{array}{rcccccc} & 6 & 0 & 0 & -3 & 4 & -5 \\ 2 & \downarrow & 12 & 24 & 48 & 90 & 188 \\ \hline & 6 & 12 & 24 & 45 & 94 & \boxed{183} \end{array}$$

Por tanto, $p(2) = 183$. En el segundo caso, $p(x) = x^7 + x^6 + x^5 + x^4 +$

$x^3 + x^2 + x + 1$. Análogamente al caso anterior:

	1	1	1	1	1	1	1	1
2	↓	2	6	14	30	62	126	254
	1	3	7	15	31	63	127	255

de manera que $p(2) = 255$.

11. – El esquema triangular de diferencias divididas es

-2	-7				
		$\frac{7}{3}$			
1	0		$\frac{1}{6}$		
		3		$-\frac{13}{84}$	
2	3		$-\frac{11}{12}$		
		$-\frac{2}{3}$			
5	1				

y, por lo tanto, el polinomio interpolador es

$$p_3(x) = -7 + \frac{7}{3}(x+2) + \frac{1}{6}(x+2)(x-1) - \frac{13}{84}(x+2)(x-1)(x-2).$$

12. – El esquema de diferencias divididas se escribe

-1	0.3678794412		
		0.6321205588	
0	1		0.5430806346
		1.718281828	
1	2.718281828		

y da lugar al siguiente polinomio interpolador:

$$p_2(x) = 0.3678794412 + 0.6321205588(x+1) + 0.5430806346(x+1)x.$$

Recordad que, para evaluar $p_2(x)$ en un punto dado x de manera que el número de operaciones realizadas sea mínimo, conviene reescribirlo de la manera siguiente:

$$p_2(x) = 0.3678794412 + (x+1)(0.6321205588 + 0.5430806346x).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} p_2(0.5) &= 0.3678794412 + (0.5+1)(0.6321205588 + \\ &\quad 0.5430806346 \cdot 0.5) = 1.72337075535. \end{aligned}$$

- 13.– (a) Si calculamos el valor de $\sqrt{e} = e^{1/2}$ con la calculadora Wiris se obtiene 1.6487212707*. Por lo tanto, el error cometido al aproximar $e^{1/2}$ por $p_2(0.5)$ (véase la actividad anterior) es, aproximadamente,

$$e_1 = \left| e^{1/2} - p_2(0.5) \right| = |1.6487212707 - 1.72337075535| = 0.07464948465.$$

Por otro lado, en el ejemplo 2.4 se calculó una estimación del error cometido al aproximar $e^{1/2}$ por $p_2(0.5)$ mediante la fórmula del error en la interpolación. La cota obtenida fue la siguiente:

$$e_2 = \left| e^{1/2} - p_2(0.5) \right| \leq 0.1698926142.$$

Observad que esta cota del error es aproximadamente el doble de la diferencia real:

$$e_1 = 0.07464948465 < 0.1698926142 = e_2.$$

Este hecho es muy habitual y es debido a que las cotas empleadas en la fórmula del error no pueden ser nunca tan precisas como desearíamos.

- (b) Consideremos ahora la función $f(x) = \sin(2.2x + 1.1)$. La tabla de valores correspondiente a las abscisas 0.1, 0.2, 0.4 y 0.5 es la siguiente:

x_k	0.1	0.2	0.4	0.5
f_k	0.9687151001	0.9995258306	0.9174379553	0.808496404

Entonces:

- El esquema de diferencias divididas asociado es

0.1	0.9687151001			
		0.3081073049		
0.2	0.9995258306		–2.3951556050	
		–0.4104393766		0.3297545291
0.4	0.9174379553		–2.2632537933	
		–1.0894155146		
0.5	0.8084964038			

que proporciona el polinomio interpolador

$$p_3(x) = 0.9687151001 + 0.3081073049 (x - 0.1) - 2.3951556050 (x - 0.1)(x - 0.2) + 0.3297545291 (x - 0.1)(x - 0.2)(x - 0.4).$$

- Para evaluar $p_3(0.3)$ usamos la regla de Horner que, en este caso, presenta la forma

$$p_3(x) = 0.9687151001 + (x - 0.1) (0.3081073049 - (x - 0.2) (2.3951556050 + 0.3297545291 (x - 0.4))) .$$

* En realidad, si escribimos $e^{0.5}$ en Wiris se obtiene 1.6487. Si queremos que nos proporcione un mayor número de cifras decimales, podemos variar la precisión de los resultados ejecutando previamente la orden **precisión(N)**, donde N es el número de cifras que queremos que aparezcan en los cálculos.

y proporciona

$$p_3(0.3) = 0.9687151001 + (0.3 - 0.1)(0.3081073049 - (0.3 - 0.2)(2.3951556050 + 0.3297545291(0.3 - 0.4))) = 0.9817739399.$$

- Usando la calculadora Wiris, obtenemos $f(0.3) = 0.982154317138$, de manera que el error real de la aproximación es

$$|f(0.3) - p_3(0.3)| = |0.9821543171 - 0.9817739399| = 0.0003803772 \simeq 0.38 \cdot 10^{-3}.$$

- Utilizando la fórmula del error en la interpolación, tenemos que

$$f(0.3) - p_3(0.3) = \frac{f^{(4)}(\xi_{0.3})}{4!} (0.3 - 0.1)(0.3 - 0.2)(0.3 - 0.4)(0.3 - 0.5),$$

donde $\xi_{0.3} \in [0.1, 0.4]$. Si tomamos valor absoluto tenemos

$$|f(0.3) - p_3(0.3)| \leq \frac{|f^{(4)}(\xi_{0.3})|}{4!} |(0.3 - 0.1)(0.3 - 0.2)(0.3 - 0.4)(0.3 - 0.5)| \leq \frac{23.4256}{24} (0.2)^2 (0.1)^2 = 0.0003904267 \simeq 0.39 \cdot 10^{-3},$$

en el que hemos usado la cota

$$f^{(4)}(x) = 23.4256 \sin(2.2x + 1.1) \Rightarrow |f^{(4)}(x)| \leq 23.4256.$$

Observad que la cota teórica del error obtenida es cercana al error real, calculado en apartados anteriores. Por lo tanto, la aproximación considerada es muy satisfactoria.

- 14.— Tenemos la siguiente tabla de valores de la función $f(x) = e^x$:

x_k	-1	0	1
f_k	0.3678794412	1	2.718281828
f'_k		1	

El esquema de diferencias generalizadas correspondiente es

-1	0.3678794412			
		0.632120056		
0	1		0.367879441	
		1		0.175201193 ,
0	1		0.718281828	
		1.718281828		
1	2.718281828			

del que deducimos el polinomio de Hermite

$$H_3(x) = 0.3678794412 + 0.632120056 (x + 1) + \\ 0.367879441 (x + 1)x + 0.175201193 (x + 1)x^2.$$

De nuevo, para evaluar $H_3(x)$ en $x = 0.5$ escribimos

$$H_3(x) = 0.3678794412 + (x + 1) (0.632120056 + \\ x (0.367879441 + 0.175201193 x))$$

y obtenemos $H_3(0.5) = 1.6576695533$. Si comparamos estas aproximaciones con el valor real, podemos comprobar cierta mejoría respecto a la obtenida en la actividad 12. En efecto,

$$\begin{aligned} \sqrt{e} &= 1.6487212707 \\ p_2(0.5) &= 1.7233707554 \quad (\text{actividad 12}) \\ H_3(0.5) &= 1.6576695533. \end{aligned}$$

15.— A partir de la tabla

x_k	-1	3	4
f_k	1	-2	4
f'_k	0	1	2

se construye el esquema de diferencias divididas generalizadas

-1	1					
		0				
-1	1		-3/16			
		-3/4		5/32		
3	-2		7/16		121/800	
		1		73/80		-1707/4000 ,
3	-2		5		-793/400	
		6		-9		
4	4		-4			
		2				
4	4					

del que deducimos

$$H_5(x) = 1 - \frac{3}{16} (x + 1)^2 + \frac{5}{32} (x + 1)^2 (x - 3) + \\ \frac{121}{800} (x + 1)^2 (x - 3)^2 - \frac{1707}{4000} (x + 1)^2 (x - 3)^2 (x - 4).$$

Para evaluarlo en el punto $x = 0$, lo escribimos de la forma

$$H_5(x) = 1 + (x + 1)^2 \left(-\frac{3}{16} + (x - 3) \left(\frac{5}{32} + \right. \right. \\ \left. \left. (x - 3) \left(\frac{121}{800} - \frac{1707}{4000} (x - 4) \right) \right) \right).$$

Si sustituimos x por 0, se obtiene $H_5(0) = \frac{4267}{250}$.

16.— A partir de la tabla

k	-2	-1	0	1	2
x_k	1.8	1.9	2	2.1	2.2
f_k	1.280725	1.345581	1.417223	1.483962	1.552837

calculamos

$$f'(1.9) \simeq \frac{1.417223 - 1.280725}{0.2} = 0.68249$$

$$f'(2.1) \simeq \frac{1.552837 - 1.417223}{0.2} = 0.67807.$$

17.— Dada la tabla

x_k	f_k
1.00	1.50954
1.25	1.69843
1.50	1.90432
1.75	2.12952
2.00	2.36459

tenemos

$$f'(1.50) \simeq \frac{2.12952 - 1.90432}{0.25} = 0.9008 \quad (\text{hacia delante})$$

$$f'(1.50) \simeq \frac{2.12952 - 1.69843}{0.5} = 0.86218 \quad (\text{centrada})$$

$$f'(1.50) \simeq \frac{1}{3} (-2.36459 + 8 \cdot 2.12952 - 8 \cdot 1.69843 + 1.50954) = 0.8645567 \quad (\text{centrada, de orden 4}).$$

18.— En este caso,

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx,$$

tenemos $a = \pi/2$ y $b = \pi$. Si el número de subintervalos es $N = 8$ entonces el **paso de integración** h viene dado por

$$h = \frac{b - a}{N} = \frac{\pi - \pi/2}{8} = 0.19634954.$$

Por lo tanto, debemos considerar

$$x_k = a + k \cdot h = \frac{\pi}{2} + k \cdot 0.19634954, \quad f_k = f(x_k) = \frac{\sin x_k}{x_k},$$

para $k = 0, 1, \dots, 8$, que dan lugar a la siguiente tabla de valores

k	x_k	f_k
0	1.57079633	0.63661977
1	1.76714587	0.55501094
2	1.96349541	0.47052798
3	2.15984495	0.38496727
4	2.35619449	0.30010544
5	2.55254403	0.21765354
6	2.74889357	0.13921362
7	2.94524311	0.06623912
8	3.14159265	0.00000000

Si usamos la fórmula de trapezios compuesta:

$$T_N(f) = \frac{h}{2} (f_0 + 2 f_1 + 2 f_2 + \dots + 2 f_{N-1} + f_N)$$

se obtiene, en este caso,

$$T_8(f) = \frac{0.19634954}{2} (f_0 + 2 f_1 + 2 f_2 + \dots + 2 f_7 + f_8) = 0.48145453.$$

19.— Consideremos, de nuevo,

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx,$$

con $a = \pi/2$ y $b = \pi$. Si aplicamos la fórmula de Simpson compuesta con $N = 4$ subintervalos tenemos

$$h = \frac{b-a}{2N} = \frac{\pi - \pi/2}{8} = 0.19634954.$$

Por lo tanto, debemos considerar, para $k = 0, 1, \dots, 8$, los puntos:

$$x_k = a + k \cdot h = \frac{\pi}{2} + k \cdot 0.19634954, \quad f_k = f(x_k) = \frac{\sin x_k}{x_k},$$

que definen la tabla de valores siguiente:

k	x_k	f_k
0	1.57079633	0.63661977
1	1.76714587	0.55501094
2	1.96349541	0.47052798
3	2.15984495	0.38496727
4	2.35619449	0.30010544
5	2.55254403	0.21765354
6	2.74889357	0.13921362
7	2.94524311	0.06623912
8	3.14159265	0.00000000

En este caso, la fórmula de Simpson se escribe

$$S_4(f) = \frac{h}{3} (f_0 + 4 f_1 + 2 f_2 + 4 f_3 + 2 f_4 + 4 f_5 + 2 f_6 + 4 f_7 + f_8),$$

y proporciona, en nuestro caso, la aproximación $S_4(f) = 0.48117401$. Podéis comprobar este resultado con la Wiris y obtendréis

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x}{x} \rightarrow 0.4811748836,$$

si se selecciona previamente la opción **precisión(10)** (véase la figura 28). Observad la mejora en esta aproximación respecto a la obtenida en la ac-

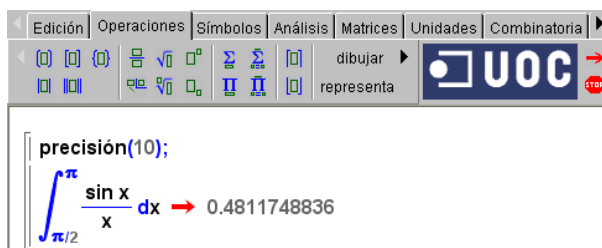


Figura 28: Integración numérica con Wiris

tividad anterior, en la que se aplicó la fórmula de trapezios compuesta.

Ejercicios de autoevaluación

1. – Podéis comprobar que tenemos (al menos) un cero de la función $f(x) = -3 + x^3 \sin(x) + x$ en el intervalo $[0, 2]$ aplicando el teorema de Bolzano: f es una función continua en toda la recta real y tenemos un cambio de signo en los extremos del intervalo, puesto que $f(0) = -3 < 0$ y $f(2) = 6.2744 \dots > 0$. Sabemos que el número de iteraciones necesarias viene dado por la fórmula (1.2), donde ahora $\varepsilon = 10^{-4}$, $a = 0$ y $b = 2$:

$$N = \left\lceil \frac{\ln\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)}{\ln 2} \right\rceil + 1 = \left\lceil \frac{\ln\left(\frac{2-0}{10^{-4}}\right)}{\ln 2} \right\rceil + 1 = 15.$$

Por lo tanto, tenemos

1	[1.00000000, 2.00000000]	1.000000
2	[1.00000000, 1.50000000]	$5.000000 \cdot 10^{-1}$
3	[1.00000000, 1.25000000]	$2.500000 \cdot 10^{-1}$
4	[1.12500000, 1.25000000]	$1.250000 \cdot 10^{-1}$
5	[1.18750000, 1.25000000]	$6.250000 \cdot 10^{-2}$
6	[1.21875000, 1.25000000]	$3.125000 \cdot 10^{-2}$
7	[1.21875000, 1.23437500]	$1.562500 \cdot 10^{-2}$
8	[1.22656250, 1.23437500]	$7.812500 \cdot 10^{-3}$
9	[1.23046875, 1.23437500]	$3.906250 \cdot 10^{-3}$
10	[1.23242188, 1.23437500]	$1.953125 \cdot 10^{-3}$
11	[1.23242188, 1.23339844]	$9.765625 \cdot 10^{-4}$
12	[1.23242188, 1.23291016]	$4.882813 \cdot 10^{-4}$
13	[1.23266602, 1.23291016]	$2.441406 \cdot 10^{-4}$
14	[1.23266602, 1.23278809]	$1.220703 \cdot 10^{-4}$
15	[1.23272705, 1.23278809]	$6.103516 \cdot 10^{-5}$

que proporciona como aproximación del cero buscado, por ejemplo, el punto medio del último intervalo: 1.23275757.

2. – En este caso, tomamos como valor inicial $x_0 = 2$ y aplicamos la recurrencia

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k + \frac{-3 + x_k^3 \sin(x_k) + x_k}{3x_k^2 \sin x_k + x_k^3 \cos x_k + 1}$$

y obtenemos la tabla de valores siguiente:

k	x_k	$ x_k - x_{k-1} $
0	2.0000000000000000	
1	1.2689243699851374	$7.31076 \cdot 10^{-1}$
2	1.2335973346606131	$3.53270 \cdot 10^{-2}$
3	1.2327333842164889	$8.63950 \cdot 10^{-4}$
4	1.2327328653099767	$5.18907 \cdot 10^{-7}$
5	1.2327328653097895	$1.87184 \cdot 10^{-13}$

Por lo tanto, se obtiene 1.2327328653097895 con unas doce cifras decimales correctas, aproximadamente.

3. — En este caso, tomamos como valores iniciales $x_0 = 0$ y $x_1 = 2$. El algoritmo es, así,

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k) \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}, \quad k \geq 1,$$

con $f(x) = -3 + x^3 \sin(x) + x$. De esta manera se obtiene la tabla de aproximaciones siguiente:

k	x_k	$ x_k - x_{k-1} $
0	0.0000000000000000	
1	2.0000000000000000	
2	0.6469435561964498	1.35306
3	0.9970038797971186	$3.50060 \cdot 10^{-1}$
4	1.3990997050246325	$4.02096 \cdot 10^{-1}$
5	1.2045341553104323	$1.94566 \cdot 10^{-1}$
6	1.2297903638027441	$2.52562 \cdot 10^{-2}$
7	1.2327918460709746	$3.00148 \cdot 10^{-3}$
8	1.2327327444031269	$5.91017 \cdot 10^{-5}$
9	1.2327328653048319	$1.20902 \cdot 10^{-7}$
10	1.2327328653097895	$4.95759 \cdot 10^{-12}$

que proporciona 1.2327328653097895 como aproximación del cero buscado, con una precisión de $\frac{1}{2} \cdot 10^{-11}$.

4. — Recordad que el método de la Regula Falsi difiere del método de la secante en el hecho que, en cada iteración, se escoge el intervalo en el que la función presenta un cambio de signo. En este caso, si iniciamos también el algoritmo a partir de $x_0 = 0$ y $x_1 = 2$, obtenemos la siguiente tabla de

aproximaciones:

k	x_k	$ x_k - x_{k-1} $
0	0.0000000000000000	
1	2.0000000000000000	
1	0.6469435561964498	1.35306
2	0.9970038797971186	$3.50060 \cdot 10^{-1}$
3	1.1547168474308966	$1.57713 \cdot 10^{-1}$
4	1.2097537364185080	$5.50369 \cdot 10^{-2}$
5	1.2262671646840739	$1.65134 \cdot 10^{-2}$
6	1.2309394356484356	$4.67227 \cdot 10^{-3}$
7	1.2322374459806820	$1.29801 \cdot 10^{-3}$
8	1.2325961663425768	$3.58720 \cdot 10^{-4}$
9	1.2326951584624724	$9.89921 \cdot 10^{-5}$
10	1.2327224652146420	$2.73068 \cdot 10^{-5}$
11	1.2327299968818266	$7.53167 \cdot 10^{-6}$
12	1.2327320741800711	$2.07730 \cdot 10^{-6}$
13	1.2327326471118452	$5.72932 \cdot 10^{-7}$
14	1.2327328051296220	$1.58018 \cdot 10^{-7}$
15	1.2327328487117777	$4.35822 \cdot 10^{-8}$

que proporciona la aproximación 1.2327328487117777, con un error inferior a 10^{-7} .

5. — Calculamos los polinomios de Lagrange asociados:

$$L_0(x) = \frac{(x - 0.8)(x - 1.3)(x - 1.9)}{(0.2 - 0.8)(0.2 - 1.3)(0.2 - 1.9)} = -0.8913x^3 + 3.656x^2 - 4.483x + 1.761$$

$$L_1(x) = \frac{(x - 0.2)(x - 1.3)(x - 1.9)}{(0.8 - 0.2)(0.8 - 1.3)(0.8 - 1.9)} = 3.03x^3 - 10.3x^2 + 9.424x - 1.497$$

$$L_2(x) = \frac{(x - 0.2)(x - 0.8)(x - 1.9)}{(1.3 - 0.2)(1.3 - 0.8)(1.3 - 1.9)} = -3.03x^3 + 8.788x^2 - 6.242x + 0.9212$$

$$L_3(x) = \frac{(x - 0.2)(x - 0.8)(x - 1.3)}{(1.9 - 0.2)(1.9 - 0.8)(1.9 - 1.3)} = 0.8913x^3 - 2.05x^2 + 1.301x - 0.1854.$$

Por lo tanto, el polinomio interpolador $p_3(x)$ viene dado por

$$p_3(x) = f_0L_0 + f_1L_1 + f_2L_2 + f_3L_3 = 3L_0 + 2.2L_1 + 1.7L_2 + 2.1L_3 = 0.713x^3 - 1.337x^2 - 0.5954x + 3.167.$$

Si queremos ahora evaluar $p_3(1)$, podemos aplicar la regla de Horner (en su “versión Ruffini”):

$$\begin{array}{r}
 0.713 \quad -1.337 \quad -0.5954 \quad 3.167 \\
 1 \quad \downarrow \quad 0.713 \quad -0.624 \quad -1.2194 \\
 \hline
 0.713 \quad -0.624 \quad -1.2194 \quad \boxed{1.9476}
 \end{array}$$

Finalmente, $p_3(1) = 1.9476$.

6. – El esquema triangular de Newton es, en este caso, el siguiente:

$$\begin{array}{c|c}
 -0.5 & 2 \\
 & 0.4 \\
 2 & 3 & -1.25714 \\
 & -4 & 1.48095 \\
 3 & -1 & 4.66667 \\
 & 3 \\
 3.5 & 0.5
 \end{array}$$

y proporciona el polinomio interpolador

$$p_3(x) = 2 + 0.4(x+0.5) - 1.25714(x+0.5)(x-2) + 1.48095(x+0.5)(x-2)(x-3).$$

Recordad que, para evaluarlo en un punto dado, es conveniente escribirlo de la forma

$$p_3(x) = 2 + (x + 0.5) (0.4 + (x - 2) (-1.25714 + 1.48095(x - 3))),$$

de manera que

$$p_3(1) = 2 + (1+0.5) (0.4 + (1 - 2) (-1.25714 + 1.48095(1 - 3))) = 8.92857.$$

Si añadimos $(x_4, f_4) = (0, 1.2)$, el esquema anterior se modifica de la siguiente manera (aprovechando, sin embargo, los cálculos efectuados anteriormente):

$$\begin{array}{c|c}
 -0.5 & 2 \\
 & 0.4 \\
 2 & 3 & -1.25714 \\
 & -4 & 1.48095 \\
 3 & -1 & 4.66667 & \mathbf{0.6381} \\
 & 3 & \mathbf{1.8} \\
 3.5 & 0.5 & \mathbf{1.0667} \\
 & \mathbf{-0.2} \\
 0 & 1.2
 \end{array}$$

El polinomio interpolador es ahora

$$\begin{aligned}
 p_4(x) = & 2 + 0.4(x+0.5) - 1.25714(x+0.5)(x-2) + \\
 & 1.48095(x+0.5)(x-2)(x-3) + 0.6381(x+0.5)(x-2)(x-3)x,
 \end{aligned}$$

es decir,

$$p_4(x) = p_3(x) + 0.6381(x + 0.5)(x - 2)(x - 3)x.$$

7. — Notad que la función $f(x)$ es creciente en las abscisas dadas, de manera que podemos suponer que, en este intervalo, $f(x)$ es invertible. Sea g la función inversa de f en este intervalo: $y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)$. Por lo tanto, buscar α que cumpla $f(\alpha) = 9$ es equivalente a buscar $\alpha = g(9)$. Puesto que no conocemos $g(y)$, lo que hacemos es aproximarla por el polinomio $q_3(y)$ que interpola la tabla

y_k	2.527	3.879	6.452	10.346
g_k	-0.5	0.1	1	2.5

obtenida al invertir la tabla inicial. El esquema triangular de Newton es

2.527	-0.5			
		0.4438		
3.879	0.1		-0.0240	
		0.3498		0.0038
6.452	1		0.0055	
		0.3852		
10.346	2.5			

y el polinomio interpolador asociado

$$\begin{aligned} q_3(y) = & -0.5 + 0.4438(y - 2.527) - \\ & 0.0240(y - 2.527)(y - 3.879) + \\ & 0.0038(y - 2.527)(y - 3.879)(y - 6.452). \end{aligned}$$

Para evaluar $q_3(y)$ en el punto $y = 9$, lo escribimos de la forma

$$q_3(y) = -0.5 + (y - 2.527)(0.4438 + (y - 3.879)(-0.0240 + 0.0038(y - 6.452))).$$

Por lo tanto, $\alpha = g(9) \simeq q_3(9)$ donde

$$q_3(9) = -0.5 + (9 - 2.527)(0.4438 + (9 - 3.879)(-0.0240 + 0.0038(9 - 6.452))) = 1.8981.$$

Es decir, tenemos que $f(1.8981) \simeq 9$.

8. — Consideremos la tabla de valores siguiente:

x_k	2	3	4
f_k	7.325	8.975	6.018
f'_k	2.234	-0.453	1.018

Entonces, el esquema de diferencias generalizadas es:

2	7.325			
		2.234		
2	7.325		-0.584	
		1.65		-1.519
3	8.975		-2.103	0.659
		-0.453		-0.2005
				1.340 ,
3	8.975		-2.504	3.340
		-2.957		6.479
4	6.018		3.975	
		1.018		
4	6.018			

que da lugar al polinomio de Hermite

$$H_5(x) = 7.325 + 2.234(x-2) - 0.584(x-2)^2 - 1.519(x-2)^2(x-3) + 0.6593(x-2)^2(x-3)^2 + 1.340(x-2)^2(x-3)^2(x-4).$$

9. — Queremos usar la regla de los trapecios compuesta para aproximar el valor de la integral

$$\int_3^4 \left(\sqrt{x^3 + 1} \right) \ln x \, dx,$$

con $N = 4, 8$ y 16 subintervalos. Sabemos que $a = 3$ y $b = 4$. En el primer caso, tenemos

$$h = \frac{4-3}{4} = 0.25,$$

que da lugar a $x_k = a + k \cdot h = 3 + k \cdot 0.25$, para $k = 0, 1, \dots, 4$ i $f_k = f(x_k) = \left(\sqrt{x_k^3 + 1} \right) \ln x_k$, y a la tabla

k	x_k	f_k
0	3.00000000	5.81330981
1	3.25000000	7.00562676
2	3.50000000	8.29807722
3	3.75000000	9.68896392
4	4.00000000	11.17666245

La fórmula de trapecios proporciona, con $N = 4$ subintervalos, la aproximación $T_4(f) = 8.37191351$.

Análogamente, con $N = 8$ tenemos: $h = 1/8 = 0.125$ y de la tabla

k	x_k	f_k
0	3.00000000	5.81330981
1	3.12500000	6.39684314
2	3.25000000	7.00562676
3	3.37500000	7.63944292
4	3.50000000	8.29807722
5	3.62500000	8.98131942
6	3.75000000	9.68896392
7	3.87500000	10.42081012
8	4.00000000	11.17666245

obtenemos $T_8(f) = 8.36575870$.

Siguiendo la misma idea, con $N = 16$ subintervalos: $h = 1/16 = 0.0625$ y de la tabla

k	x_k	f_k
0	3.00000000	5.81330981
1	3.06250000	6.10190648
2	3.12500000	6.39684314
3	3.18750000	6.69809234
4	3.25000000	7.00562676
5	3.31250000	7.31941926
6	3.37500000	7.63944292
7	3.43750000	7.96567105
8	3.50000000	8.29807722
9	3.56250000	8.63663529
10	3.62500000	8.98131942
11	3.68750000	9.33210404
12	3.75000000	9.68896392
13	3.81250000	10.05187415
14	3.87500000	10.42081012
15	3.93750000	10.79574754
16	4.00000000	11.17666245

se obtiene $T_{16}(f) = 8.36421999$. Si usamos wiris para hacer este cálculo obtenemos 8.363707079 (véase la figura 29).

10.— En este caso, tenemos

$$a = 0, \quad b = 1, \quad N = 5$$

y, por lo tanto, $h = \frac{1-0}{2 \cdot 5} = 0.1$. Así pues, las abscisas e imágenes a con-

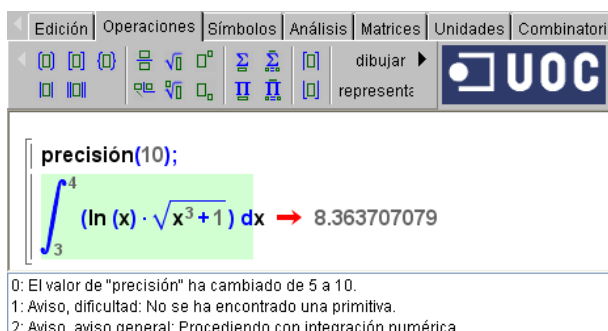


Figura 29: Integración numérica con Wiris

siderar son:

$$x_k = a + k \cdot h = k \cdot 0.1, \quad f_k = f(x_k) = x_k^2 e^{x_k^2},$$

que corresponden a la tabla siguiente:

k	x_k	f_k
0	0.00000000	0.00000000
1	0.10000000	0.01010050
2	0.20000000	0.04163243
3	0.30000000	0.09847569
4	0.40000000	0.18776174
5	0.50000000	0.32100635
6	0.60000000	0.51599859
7	0.70000000	0.79983495
8	0.80000000	1.21374776
9	0.90000000	1.82080547
10	1.00000000	2.71828183

Por lo tanto,

$$S_5(f) = \frac{0.1}{3} (f_0 + 4 f_1 + 2 f_2 + \dots + 2 f_8 + 4 f_9 + f_{10}) = 0.62791516.$$

Recordad que el error cometido al aplicar la fórmula compuesta de Simpson es del tipo $O(h^4)$. Puesto que $h = 0.1$, en nuestro caso este error es del tipo 10^{-4} , de manera que podríamos decir que $S_5(f)$ tiene entre tres y cuatro cifras decimales correctas, aproximadamente.

Glosario

abscisa de interpolación f Primera componente o abscisa de cada uno de los puntos en los que buscamos el polinomio interpolador.

algoritmo numérico m Procedimiento de cálculo que consiste en cumplir un conjunto ordenado y finito de instrucciones que conduce, una vez especificados los datos, a una solución aproximada del problema.

cero de una función m Valor de la variable que da como resultado cero si evaluamos en él la función dada.

fenómeno de Runge m Gran divergencia en los extremos del intervalo de interpolación entre una función y el polinomio interpolador cuando éste tiene grado alto (mayor o igual que 9, aproximadamente).

interpolación de Hermite f Problema en el que se busca un polinomio que interpole la función y algunas de sus derivadas en un conjunto dado de puntos.

método de la bisección m Método para encontrar un cero de una función consistente en situarlo en un intervalo de longitud cada vez la mitad de la longitud del intervalo precedente.

método de Lagrange m Método, de interés teórico pero poco eficiente desde un punto de vista numérico, para obtener el polinomio interpolador de un conjunto de puntos.

método de la secante m Ceros de funciones. Método similar al de Newton en el que la aproximación de la función se efectúa mediante la recta secante.

método de Newton (ceros de funciones) m Método que proporciona una sucesión de iterados obtenidos al aproximar la función en un punto por su recta tangente. También se conoce como método de Newton-Raphson.

método de Newton (interpolación de funciones) m Es el método más habitual y eficiente de cálculo del polinomio interpolador, basado en un desarrollo de la fórmula de Taylor, aplicado hábilmente al problema que nos interesa.

método de regula falsi m Ceros de funciones. Variante del método de la secante en el que en cada iteración, efectuada aproximando la función por la recta secante, se selecciona aquel intervalo que muestra un cambio de signo de la función.

polinomio interpolador de un conjunto de puntos m Polinomio cuya gráfica pasa por los puntos dados.

regla de Horner f Algoritmo, basado en la regla de Ruffini, que permite evaluar un polinomio en un punto con el mínimo número de operaciones.

regla de Simpson f Método de cálculo aproximado de una integral a partir de la interpolación de grado 2.

regla de los trapecios f Método análogo al anterior, pero que interpola la función con un polinomio de grado 1.

Bibliografía

Aubanell, A.; Benseny, A.; Delshams, A. (1993). *Útiles básicos de Cálculo Numérico*. Barcelona: Labor.

Bonet, C. y otros (1994). *Càlcul Numèric*. Barcelona: Edicions UPC (“Aula Teòrica”).

Conte, S.D.; Boor, de C. (1972). *Análisis Numérico*. México: McGraw-Hill.

Dalquist, G.; Björck, A. (1974). *Numerical Methods*. New Jersey: Prentice Hall.

Henrici, P. (1968). *Elementos de Análisis Numérico*. México: Trillas.

Stoer, J.; Bulirsch, R. (2002). *Introduction to Numerical Analysis (3a. ed.)*. New York / Berlín / Heidelberg: Springer.