

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CATALUÑA
DEP. DE MATEMÁTICA APLICADA Y TELEMÁTICA

**Contribución a la teoría de redes con enlaces
bidireccionales derivadas de los digrafos línea**

Tesis Doctoral realizada por

J.L. Villar Santos

y dirigida por M.A. Fiol Mora

Junio de 1994

Agradecimientos

De entre las muchas personas que han permitido consciente o inconscientemente que este trabajo llegue a su fin, agradezco especialmente a M.A. Fiol, director de esta Tesis, las sugerencias y comentarios realizados durante el desarrollo del trabajo (así como su infinita paciencia conmigo).

Agradezco también a mis compañeros de trabajo su constancia en “empujarme” hacia la realización final de esta Tesis, incluso en aquellos momentos en los que era tema prohibido de conversación.

Mi agradecimiento más sincero a P. Morillo por sus comentarios no sólo sobre el contenido de este trabajo sino por su desarrollo y su forma final.

Por último, agradezco a W. Dicks el interés mostrado, cuyos comentarios han permitido mejorar notablemente la calidad de alguno de los capítulos.

Índice general

| | |
|--|-----------|
| Introducción | 5 |
| 1. Conceptos básicos | 7 |
| 1.1. Grafos | 7 |
| 1.2. Digrafos | 8 |
| 1.3. Grafos y digrafos completos | 9 |
| 1.4. Ciclos y caminos | 10 |
| 1.5. Conectividad | 10 |
| 1.6. Automorfismos | 12 |
| 1.7. Coloraciones | 13 |
| 1.8. Digrafo línea | 14 |
| 1.9. Digrafos línea restringidos | 15 |
| 1.10. Digrafos de de Bruijn y de Kautz | 17 |
| 2. Grafos subyacentes | 19 |
| 2.1. Caracterización de los Grafos Subyacentes | 20 |
| 2.2. Orientación de los Subgrafos Fundamentales | 22 |
| 2.2.1. Caso de intersección vacía | 23 |
| 2.2.2. Caso de intersección no vacía | 24 |
| 2.3. Ubicación de los dígonos | 26 |
| 2.4. Subgrafos fundamentales adyacentes | 28 |
| 2.5. Grupo de automorfismos del grafo subyacente | 30 |

| | |
|---|-----------|
| 2.6. Caso particular: digrafos de Kautz y de Bruijn | 32 |
| 3. Digrafos con índice no trivial | 35 |
| 3.1. Digrafos sin dígonos | 36 |
| 3.2. Digrafo \mathcal{T} | 37 |
| 3.3. Diagramas de Schreier | 39 |
| 3.4. Isomorfismos entre diagramas de Schreier | 41 |
| 3.5. Subgrupos de \mathbf{pgg} | 43 |
| 3.6. Subgrupos de \mathbf{pgg}^2 | 45 |
| 3.6.1. Subgrupos de índice infinito | 45 |
| 3.6.2. Subgrupos de índice finito | 46 |
| 3.7. Subgrupos restantes de $\langle \alpha, \mathbf{pgg}^2 \rangle$ | 46 |
| 3.7.1. Subgrupos de índice infinito | 47 |
| 3.7.2. Subgrupos de índice finito | 47 |
| 3.8. Clasificación de los digrafos de índice no trivial con $\text{girth} \geq 3$. . | 48 |
| 3.9. Unicidad de la HCR-coloración | 49 |
| 3.10. ‘Embeddings’ naturales | 52 |
| 4. Rama-conectividad | 53 |
| 4.1. Conjuntos de corte y subgrafos fundamentales | 54 |
| 4.2. Construcción de grafos con $\lambda = 2d - 2$ | 57 |
| 4.3. Digrafos κ -conexos | 58 |
| 4.4. Super-rama-conectividad | 61 |
| 4.5. Construcción de grafos no super-rama-conexos | 63 |
| 4.6. Digrafos con dígonos | 64 |
| 5. Ciclos en digrafos línea iterados | 67 |
| 5.1. Digrafos línea pancíclicos | 70 |
| 5.2. Digrafos de Kautz | 72 |
| 6. Conclusiones | 79 |

Introducción

El marco en el que se sitúa esta tesis es el de la Teoría de Grafos como fuente de modelos para Redes de Interconexión.

El conocimiento de ciertas propiedades de los grafos y digrafos revierte directamente en las prestaciones de las redes de interconexión que en ellos se basan. Aparte de las características obvias como son el número de vértices (o nudos de la red) y el número de arcos o ramas en cada vértice (enlaces uni y bidireccionales de la red en cada nudo), también son importantes, entre otras características, el diámetro del grafo o digrafo (o máxima distancia entre dos nudos, medida por el número de enlaces que hay que recorrer), la conectividad (o número de elementos que es preciso destruir para que la red deje de funcionar), la simetría y la vulnerabilidad del diámetro ante posibles fallos (o lo que se degrada dicho diámetro cuando falla un cierto número de elementos de la red).

Una fuente importante de digrafos útiles como modelos de redes de interconexión es la técnica del digrafo línea iterado, ejemplo de ello son los conocidos digrafos de de Bruijn y de Kautz. Entre otros aspectos, conviene destacar que la aplicación del digrafo línea a un digrafo aumenta la conectividad, manteniendo un buen diámetro (ver, por ejemplo, [12]). Por otra parte, el digrafo línea de un digrafo tiene el mismo grupo de automorfismos que el digrafo original. Ello es importante, ya que una gran simetría del digrafo (grupo de automorfismos mayor) conduce a algoritmos de encaminamiento más sencillos.

En el estudio de redes bidireccionales se ha demostrado que los grafos de de Bruijn y de Kautz presentan también buenas propiedades.

En este trabajo, hemos querido analizar la utilidad en general de los grafos subyacentes a los digrafos línea iterados como modelos para redes con enlaces bidireccionales.

El trabajo presentado se centra en el estudio de algunas propiedades de los grafos subyacentes a los digrafos que se obtienen tomando distintas iteraciones del digrafo línea de un digrafo dado. El digrafo de partida debe cumplir ciertas

restricciones. En particular, debe tener grado mínimo no inferior a 2 y debe ser simple, es decir, sin arcos paralelos. En los párrafos siguientes denominaremos a tales digrafos línea *digrafos línea restringidos*.

Las secciones siguientes de este capítulo se dedican a dar las definiciones, notaciones y nomenclatura utilizadas en este trabajo.

En el Capítulo 2 se da una caracterización de los grafos subyacentes a digrafos línea restringidos. Esta caracterización es similar a la introducida por Harary y Norman en [14] y se basa en la determinación de dos particiones adecuadas del conjunto de vértices. Ello permite expresar el grafo a partir de un conjunto de subgrafos especiales denominados *subgrafos fundamentales*.

Con las herramientas introducidas en el capítulo se demuestra que, salvo en un conjunto reducido de casos, para cada grafo subyacente a un digrafo línea restringido, G , existen a lo sumo dos orientaciones como digrafo línea restringido, G y su inverso $-G$ (pudiendo ser ambos isomorfos).

Este resultado equivale a afirmar que salvo ciertas excepciones las particiones utilizadas en la caracterización de un grafo subyacente a un digrafo línea son únicas.

Además, el resultado anterior se puede relacionar con el grupo de automorfismos del grafo y el de sus orientaciones como digrafo línea restringido. En particular, el grupo de automorfismos de la orientación tiene índice 1 o 2 en el grupo de automorfismos del grafo.

La aplicación del resultado anterior a los grafos de de Bruijn y de Kautz permite caracterizar totalmente el grupo de automorfismos. En el caso de los grafos de de Bruijn, la estructura del grupo de automorfismos ya fue conjeturada por J. Bond ([4]).

Los grafos subyacentes a digrafos línea restringidos que no satisfacen los resultados anteriores (grafos excepcionales) provienen de dos familias distintas: los grafos subyacentes a digrafos con dígonos adyacentes y los grafos subyacentes a digrafos 2-regulares.

En el Capítulo 3, se clasifican totalmente los grafos de la segunda familia utilizando para ello el lenguaje de digrafos recubridores. El valor del índice del grupo de automorfismos de las orientaciones para los grafos excepcionales clasificados resulta ser 4 excepto en un caso en que vale 6.

Finalmente, en el Capítulo 4 se estudia la conectividad de los grafos subyacentes a digrafos línea restringidos a partir de la conectividad del propio digrafo, y en el Capítulo 5 se determinan las longitudes posibles de los ciclos de los digrafos de Kautz (siguiendo los resultados ya presentados por Lempel en [21]).

Capítulo 1

Conceptos básicos

Definiremos en este capítulo los conceptos básicos de Teoría de Grafos y las notaciones utilizadas a lo largo de este trabajo.

1.1. Grafos

Podemos definir un *grafo* G_0 como el par (V, E) donde V es el conjunto de *vértices* y E el conjunto de *ramas* de G_0 . Cada rama del grafo es un par no ordenado de vértices que se denominan *extremos*. Denotaremos indistintamente por $x - y$ o por $y - x$ la rama cuyos extremos son los vértices x e y .

El conjunto de ramas de un grafo define la relación de adyacencia entre sus vértices, de modo que dos vértices x e y son *adyacentes* si existe la rama $x - y$. Denotaremos por $\Gamma(x)$ el conjunto de todos los vértices adyacentes al vértice x . El número de vértices adyacentes a x se denomina *grado* del vértice. Diremos que un grafo es *regular* si todos sus vértices tienen el mismo grado. Denominamos *grado máximo* y *grado mínimo* del grafo, denotados por Δ y δ respectivamente, al máximo y mínimo de los grados de los distintos vértices del grafo.

En este trabajo nos restringimos al uso de grafos *simples*, es decir, grafos en los que no existen varias ramas con los mismos vértices extremos, y sin ramas de la forma $x - x$ (denominadas *autolazos*).

Por otra parte, diremos que un vértice x es incidente a una rama e si ésta tiene a x como vértice extremo. Finalmente, la propia estructura del grafo permite definir una relación de adyacencia entre sus ramas. Diremos que dos ramas son *adyacentes* si tienen un vértice extremo en común.

Diremos que el par (V', E') es un *subgrafo* de (V, E) si $V' \subset V$, $E' \subset E$ y

todas las ramas de E' tienen sus vértices extremos en V' . Un subgrafo (V', E') se denomina *inducido* si E' contiene todas las ramas de E cuyos vértices extremos pertenecen a V' .

1.2. Digrafos

Un *digrafo* o *grafo dirigido* G se define de manera análoga a la anterior. En este caso, un digrafo es un par de conjuntos (V, A) en el que V es el conjunto de *vértices* y A el de *arcos*. Un arco de G es un par ordenado de vértices de G , que también denominaremos *extremos*. Denotaremos por $x \rightarrow y$ al arco cuyos extremos son x e y .

La relación de adyacencia definida en un digrafo ya no es simétrica. Por ello, dado el arco $x \rightarrow y$ diremos que x es *adyacente hacia y* y que y es *adyacente desde x* . Denotaremos por $\Gamma^+(x)$ y por $\Gamma^-(x)$ los conjuntos de vértices adyacentes desde y hacia x , respectivamente. El número de vértices adyacentes desde o hacia x se denomina grado de salida o de entrada, respectivamente.

En este trabajo utilizaremos principalmente digrafos simples, es decir, en los que no hay varios arcos con los mismos vértices extremos, salvo el caso de tener dos arcos en sentido contrario o *dígono*. Sin embargo, permitiremos la existencia de arcos de la forma $x \rightarrow x$, denominados *autolazos*.

Diremos que un digrafo es *localmente regular* si en cada vértice coinciden el grado de salida y el de entrada. Si, además, coinciden todos los grados de entrada y de salida de todos los vértices, se dice que el digrafo es *regular* (o *d-regular* si se quiere indicar que el grado es exactamente d). Denominamos *grado máximo de salida* y *grado mínimo de salida* del digrafo, denotados por Δ^+ y δ^+ respectivamente, al máximo y mínimo de los grados de salida de los distintos vértices del grafo. Análogamente, definimos los grados *mínimo* y *máximo* de entrada, denotados por Δ^- y δ^- , respectivamente. Denominamos *grado máximo* y *grado mínimo* del digrafo, denotados por Δ y δ respectivamente, al máximo y mínimo de los grados de entrada o de salida de los distintos vértices del grafo.

Análogamente a los grafos, diremos que el arco $x \rightarrow y$ es *incidente desde x* y es *incidente hacia y* . Diremos también que el arco $x \rightarrow y$ es adyacente hacia el arco $y \rightarrow z$, y que el arco $y \rightarrow z$ es adyacente desde el arco $x \rightarrow y$.

Diremos que el par (V', A') es un *subdigrafo* de (V, A) si $V' \subset V$, $A' \subset A$ y todas los arcos de A' tienen sus vértices extremos en V' . Un subdigrafo (V', A') se denomina *inducido* si A' contiene todas los arcos de A cuyos vértices extremos pertenecen a V' .

Dado un digrafo G definimos su *grafo subyacente* \mathcal{UG} como el grafo simple que tiene el mismo conjunto de vértices que G y que tiene la rama $x - y$ si y sólo si G tiene el arco $x \rightarrow y$ o el arco $y \rightarrow x$, excepto el caso de los autolazos, que se suprimen.

Recíprocamente, diremos que un digrafo G es una *orientación* del grafo G_0 si $G_0 = \mathcal{UG}$. Nótese que si no imponemos alguna restricción adicional, el número de orientaciones posibles de un grafo es, en general, elevado.

Denominamos digrafo *inverso* de G , denotado por $-G$, al digrafo que tiene los mismos vértices de G y los arcos opuestos, es decir, si G contiene el arco $x \rightarrow y$, $-G$ tiene el arco $y \rightarrow x$. Evidentemente, G y $-G$ son orientaciones de un mismo grafo.

1.3. Grafos y digrafos completos

El *grafo completo* de n vértices, K_n , es el grafo de n vértices que contiene todas las ramas posibles (excluyendo autolazos).

El *grafo bipartito completo* con n y m vértices, $K_{n,m}$, tiene un conjunto de vértices que consta de dos partes: A con n vértices y B con m vértices. Las ramas de $K_{n,m}$ son todas las ramas posibles que tienen un extremo en A y el otro en B .

Las versiones dirigidas de los grafos anteriores son los digrafos completos con o sin autolazos y los digrafos bipartitos completos.

El *digrafo completo con autolazos* y con n vértices, K_n° , tiene todos los arcos posibles, es decir, $V \times V$. El *digrafo completo sin autolazos*, K_n^* , se obtiene suprimiendo en el anterior los n autolazos.

El *digrafo bipartito completo* (unidireccional) con n y m vértices, $\vec{K}_{n,m}$, se define como en el caso anterior, dividiendo el conjunto de vértices en dos partes: A con n vértices y B con m vértices. El conjunto de arcos es el conjunto $A \times B$. Denotaremos a dicho digrafo simplemente por $A \times B$.

Nótese la diferencia entre la definición anterior y la *conjunción* de los digrafos G y H , denotada por $G \otimes H$, cuyo conjunto de vértices es $V(G) \times V(H)$ y el vértice (g_1, h_1) es adyacente hacia el vértice (g_2, h_2) si g_1 es adyacente hacia g_2 en G y, a su vez, h_1 es adyacente hacia h_2 en H .

1.4. Ciclos y caminos

Denominamos *recorrido* de un grafo (digrafo) G a toda secuencia de vértices x_0, x_1, \dots, x_n tal que cada vértice sea adyacente (desde) el anterior. La longitud del recorrido es el número de ramas (arcos) recorridos en la secuencia (pudiendo, en general, estar repetidos). Un recorrido del grafo subyacente a un digrafo G se denomina en general *recorrido no dirigido*, pudiendo en particular ser también un recorrido dirigido.

Denominaremos *circuito* a todo recorrido cerrado que no repite ramas (arcos). Denominamos *circuito euleriano* a todo circuito que recorre todas las ramas (arcos) del grafo (digrafo). Se puede demostrar que en todo digrafo localmente regular existen circuitos eulerianos (ver [6]).

Denominamos *camino* a todo recorrido que no repite vértices. Si un camino es cerrado, se le denomina *ciclo*. Un ciclo que contiene a todos los vértices de un grafo (digrafo) es denominado *ciclo hamiltoniano*.

Los ciclos de longitud 1 son los autolazos y los de longitud 2 son dígonos. Denominamos *girth* de un grafo (digrafo) a la longitud de su ciclo más corto.

Definimos *distancia* entre dos vértices x e y de un grafo o un digrafo como la longitud del camino más corto desde x hacia y . Nótese que en el caso de un digrafo, la distancia desde x hacia y no tiene porqué coincidir con la distancia desde y hacia x .

Se denomina *diámetro* de un grafo o digrafo al valor máximo de las distancias entre todos los pares de vértices del grafo o digrafo.

Diremos que un grafo o digrafo es *localmente finito* si para todo vértice x , los conjuntos $\Gamma(x)$ o bien $\Gamma^+(x)$ y $\Gamma^-(x)$ son finitos y la distancia entre dos vértices cualesquiera es finita.

1.5. Conectividad

Diremos que un grafo es *conexo* si existen caminos que conectan dos vértices cualesquiera. Dado que en el caso de los digrafos la relación de adyacencia no tiene que ser necesariamente simétrica, decimos que un digrafo es *conexo* si para todo par de vértices, x e y , existen caminos que van desde x hacia y y viceversa.

Diremos que un digrafo es *débilmente conexo* si su grafo subyacente es conexo.

Un grafo no conexo puede verse como la unión de grafos conexos disjuntos

en vértices. Cada uno de dichos grafos se denomina *componente conexa*. Las componentes conexas establecen una partición del conjunto de vértices del grafo.

Un *vértice aislado* es un vértice que no tiene ramas incidentes a él. Todo vértice aislado es en sí mismo una componente conexa del grafo.

En el caso de digrafos, decimos que un vértice es una *fuentes* si su grado de entrada es nulo. Recíprocamente, si es nulo el grado de salida, decimos que es un *sumidero*.

Un subconjunto de vértices, F , de un grafo (digrafo) es un *conjunto de corte* si el grafo (digrafo) resultante al suprimir los vértices de F y las ramas (arcos) incidentes a los mismos es no conexo. Análogamente, un subconjunto de ramas (arcos) F de un grafo (digrafo) es un *conjunto de corte* si al suprimir las ramas (arcos) de dicho conjunto el grafo (digrafo) resultante no es conexo.

Denominamos *conjunto de corte minimal* a todo aquel conjunto de corte de vértices, ramas o arcos tal que ninguno de sus subconjuntos es a su vez conjunto de corte.

La *conectividad* o *vértice-conectividad* de un grafo (digrafo), denotada por κ , es el mínimo número de vértices que puede contener un conjunto de corte. Análogamente, la *rama-conectividad* de un grafo (*arco-conectividad* de un digrafo), denotada por λ , es el mínimo número de ramas (arcos) que puede contener un conjunto de corte.

Es ampliamente conocido (ver [6]) que en cualquier grafo o digrafo G podemos establecer las siguientes desigualdades

$$\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta_G.$$

Denominamos *conectividad máxima* al grado mínimo δ , que siempre es una cota superior de la conectividad.

Nótese que para desconectar un grafo (digrafo) basta suprimir todas las ramas incidentes (arcos incidentes desde o hacia) a un vértice dado, o bien todos los vértices adyacentes desde (o hacia) un vértice dado. Denominamos *conjunto de corte trivial* a todo conjunto de corte tal que el grafo (digrafo) resultante al ser suprimidos los elementos del conjunto de corte tiene algún vértice aislado.

Decimos que un grafo o digrafo es *super-conexo* si tiene conectividad máxima y los únicos conjuntos de corte con κ vértices son triviales. Definimos análogamente los grafos *super-rama-conexos* y los digrafos *super-arco-conexos*.

Se puede demostrar que dados dos vértices cualesquiera, x e y , de un grafo o digrafo conexo existen κ caminos desde x hacia y disjuntos en los vértices intermedios. Análogamente, dados dos vértices cualesquiera, x e y , de un grafo

(digrafo) conexo existen λ caminos desde x hacia y disjuntos en ramas (arcos) (ver [6]).

1.6. Automorfismos

Dados dos grafos G_1 y G_2 podemos definir aplicaciones entre sus conjuntos de vértices que conserven en cierto grado la relación de adyacencia.

Diremos que una aplicación $\psi : V(G_1) \longrightarrow V(G_2)$ es un *morfismo de grafos* si transforma ramas en ramas, esto es, $x - y$ es una rama de G_1 si y sólo si $\psi(x) - \psi(y)$ es rama de G_2 .

Como es habitual, diremos que la aplicación anterior es un *isomorfismo de grafos* si además es una biyección, y diremos que es un *automorfismo* si además G_1 y G_2 son el mismo grafo. Los automorfismos de un grafo con la composición forman grupo. Denotamos el *grupo de automorfismos* de un grafo G por $\mathbf{Aut}G$.

Las definiciones y notaciones son análogas en el caso de digrafos. Obsérvese que un morfismo de digrafos es, en particular, un morfismo de los grafos subyacentes. Así, dado un digrafo G tenemos que $\mathbf{Aut}G$ es subgrupo de $\mathbf{Aut}G_0$. Claramente, el añadir direcciones a las ramas de un grafo puede, en general, disminuir la simetría, pero la reducción puede ser pequeña si se imponen restricciones adicionales en el momento de orientar el grafo.

Siguiendo la nomenclatura habitual, diremos que un grupo de permutaciones de los vértices del grafo o digrafo actúa *semiregularmente* si la única permutación que deja algún vértice invariante es la identidad. Diremos que dicho grupo actúa *transitivamente* si existen permutaciones en dicho grupo que transforman un vértice dado en cualquier otro vértice del grafo o digrafo. Si se cumplen ambas condiciones diremos que el grupo actúa *regularmente*.

Dado un grupo Γ y un conjunto generador del mismo $\{g_0, \dots, g_{d-1}\}$ podemos definir un digrafo cuyos vértices son los elementos de Γ y las ramas son de la forma $x \longrightarrow g_i x$ con $i = 0, \dots, d-1$. A dicho digrafo se le denomina *diagrama de Cayley* del grupo Γ con el conjunto generador $\{g_0, \dots, g_{d-1}\}$.

A cada elemento de Γ se le asocia de manera natural una permutación del conjunto de vértices del diagrama de Cayley, que justamente es la acción por la izquierda de dicho elemento. De este modo, Γ es isomorfo a un subgrupo del grupo de automorfismos del diagrama de Cayley y, además, actúa regularmente sobre sus vértices.

1.7. Coloraciones

Aunque habitualmente se definen coloraciones tanto para grafos como para digrafos, en este trabajo sólo se requiere el uso de coloraciones de digrafos regulares. Del mismo modo, se pueden colorear tanto arcos como vértices como ambos objetos. Aquí nos restringiremos al caso de arco-coloraciones de digrafos regulares.

Dado un digrafo G definimos *arco-coloración* de G a toda aplicación del conjunto de arcos a un conjunto de colores $\{c_0, \dots, c_{n-1}\}$, tal que dos arcos incidentes desde o hacia un mismo vértice tengan distinto color.

Claramente, el número de colores de una arco-coloración debe ser como mínimo el grado máximo del digrafo. En el caso de un digrafo d -regular se demuestra que existen coloraciones del mismo con exactamente d colores (ver [6]).

En este caso, en cada vértice x hay exactamente un arco de cada color incidente hacia x y exactamente un arco de cada color indidente desde x . Así, una manera de definir la coloración es dar en cada vértice una biyección entre $\gamma^-(x)$ y $\gamma^+(x)$, donde $\gamma^-(x)$ denota el conjunto de arcos incidentes hacia x y análogamente $\gamma^+(x)$ son los arcos incidentes desde x .

Fijando la atención en un color concreto de la coloración, el subdigrafo de G que contiene únicamente los arcos de dicho color es un subdigrafo 1-regular, es decir, un conjunto de ciclos disjuntos en vértices que cubren todos los vértices del digrafo. A dicho subdigrafo se denomina *1-factor*.

Considerando de nuevo todos los colores, tenemos un conjunto de d 1-factores (uno para cada color) disjuntos en arcos que cubren todo el digrafo G . Podemos escribir la descomposición anterior en 1-factores como

$$G = F_0 \oplus \dots \oplus F_{d-1}$$

donde F_i es el 1-factor asociado al color i y la operación \oplus aplicada a dos subdigrafos disjuntos en arcos define un subdigrafo que contiene los arcos de ambos. A toda descomposición de un digrafo en 1-factores disjuntos en arcos se denomina *1-factorización*.

Desde otro punto de vista, cada color i de la coloración del digrafo d -regular, G , define de manera natural una permutación σ_i de los vértices de G tal que si x es un vértice de G , $x \rightarrow \sigma_i(x)$ es un arco de G coloreado con el color i .

Podemos hablar indistintamente del color, del 1-factor asociado o de la permutación de vértices que define.

1.8. Digrafo línea

A partir de la definición de digrafo, se introduce de manera natural la relación de adyacencia entre los arcos del mismo. Esta relación de adyacencia es suficiente para definir un nuevo digrafo denominado digrafo línea.

El *digrafo línea* de un digrafo no trivial G , denotado por $\mathcal{L}G$, tiene por vértices los arcos de G y la relación de adyacencia entre sus vértices es la definida entre los correspondientes arcos de G .

Dada la definición natural del digrafo línea, es posible definir digrafos línea iterados un número arbitrario de veces. Como es habitual, denotamos por $\mathcal{L}^n G$ al digrafo línea del digrafo $\mathcal{L}^{n-1}G$.

Muchas de las propiedades de interés del digrafo original se conservan, o incluso mejoran, al pasar al digrafo línea. Es por ello, que la técnica del digrafo línea ha sido ampliamente estudiada por muchos autores (ver, por ejemplo, [1], [10], [12], [14] y [15]).

Citaremos aquí algunos resultados relevantes. Los grados mínimo y máximo de entrada y de salida de un digrafo línea son los mismos que los del digrafo original. De ello se deduce que si un digrafo es d -regular, también lo es su digrafo línea. No ocurre así si exigimos únicamente que el digrafo sea localmente regular.

Dado que los arcos de un digrafo G son vértices del digrafo línea, los recorridos de G inducen de la manera natural recorridos en $\mathcal{L}G$ pero con longitud una unidad menor. En el caso particular de los recorridos cerrados, el recorrido inducido es cerrado y tiene la misma longitud que el original.

Por otra parte, si un recorrido de G no repite arcos, el recorrido inducido en $\mathcal{L}G$ es un camino. Así, un circuito de G induce un ciclo en $\mathcal{L}G$.

Del mismo modo, si tenemos caminos disjuntos en arcos en G éstos inducen caminos disjuntos en vértices en su digrafo línea. En particular, una 1-factorización de G induce un 1-factor de $\mathcal{L}G$.

A partir de los caminos inducidos en el digrafo línea se puede ver que si un digrafo G es conexo, su digrafo línea también lo es. Efectivamente, para establecer un camino entre dos vértices e y f de $\mathcal{L}G$ basta considerar el camino inducido por el camino de G que conecta en G el vértice final del arco e con el vértice inicial del arco f . Más aún, la vértice conectividad del digrafo $\mathcal{L}G$ es igual a la rama-conectividad de G . De aquí se deducen las desigualdades

$$\kappa(G) \leq \lambda(G) = \kappa(\mathcal{L}G) \leq \lambda(\mathcal{L}G) \leq \delta_{\mathcal{L}G} = \delta_G$$

que muestran que la conectividad del digrafo línea es como mínimo la del digrafo

original. En este sentido se obtienen resultados importantes en [11].

Otro aspecto importante a destacar es que el grupo de automorfismos del digrafo $\mathcal{L}G$ es isomorfo al grupo de automorfismos del digrafo G , siendo G conexo (ver [1] y [15]). Esto permite conocer fácilmente el grupo de automorfismos de digrafos arbitrariamente grandes, ya que, cada vez que aplicamos el digrafo línea a un digrafo d -regular obtenemos un digrafo cuyo número de vértices es d veces superior al del primero.

Una condición necesaria y suficiente para que un digrafo G sea digrafo línea de algún digrafo es la *condición de Heuchenne* (ver [16]), que establece que dados los tres arcos del digrafo $x \rightarrow y$, $x \rightarrow z$ y $t \rightarrow y$ entonces también existe el arco $t \rightarrow z$. Gran parte de las características y propiedades de los digrafos línea se pueden justificar por razonamientos de carácter local a partir de la condición de Heuchenne.

Sin embargo, la condición de Heuchenne no impide que el digrafo en cuestión sea el digrafo línea de un digrafo con arcos paralelos, es decir, con arcos que tienen los dos extremos en común y que van en el mismo sentido.

Por otra parte, un digrafo línea G puede ser a la vez digrafo línea de varios digrafos distintos, pero solamente en el caso de que G presente fuentes y/o sumideros, es decir, que su grado mínimo sea nulo.

Para evitar estos problemas introducimos un concepto más restringido que el de digrafo línea pero que mantiene las buenas propiedades del mismo.

1.9. Digrafos línea restringidos

Diremos que un digrafo línea G es *restringido* si su grado mínimo es como mínimo 2 y dados dos vértices x e y cualesquiera existe a lo sumo un camino de longitud 2 desde x hacia y .

La primera condición asegura, entre otras cosas, que existe un único digrafo G' que tiene a G como digrafo línea. La segunda condición equivale a imponer que G' no tenga arcos paralelos.

Nótese que un digrafo línea por definición nunca presenta arcos paralelos. Así, el digrafo línea de un digrafo línea de grado mínimo superior o igual a 2 es siempre un digrafo línea restringido.

La restricción anterior sobre un digrafo línea equivale a prohibir los subdigrafos de la Figura 1.1. En particular, puede haber a lo sumo un autolazo o dígono en cada vértice del digrafo.

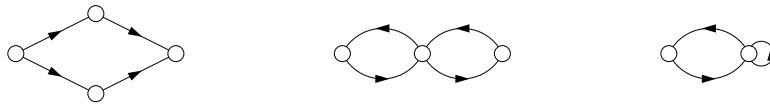


Figura 1.1: Subdigrafos prohibidos en un digrafo línea restringido.



Figura 1.2: Orientaciones posibles de un recorrido de longitud 4 en un digrafo línea restringido.

La condición de grado mínimo no inferior a 2 garantiza, por la condición de Heuchenne, que todo arco (y, por tanto, todo vértice) se halla en algún recorrido no dirigido de longitud 4. En efecto, dado un arco $x \rightarrow y$ existen dos vértices a y b tales que los arcos $a \rightarrow y$ y $x \rightarrow b$ están en el digrafo línea restringido. Por la condición de Heuchenne, también debe existir el arco $a \rightarrow b$, que cierra el recorrido no dirigido de longitud 4 citado.

Si además el digrafo no tiene autolazos, los cuatro vértices a , b , x e y son distintos y, entonces, el recorrido se convierte en un ciclo no dirigido, es decir, un ciclo del grafo subyacente. Esta propiedad será útil para evaluar la ramificabilidad de los grafos subyacentes a los digrafos línea restringidos.

Nótese que los recorridos cerrados no dirigidos de longitud 4 en un digrafo línea restringido sólo pueden aparecer con las orientaciones de la Figura 1.2, es decir, ramas no adyacentes del recorrido están orientadas en sentido inverso.

La restricción de los digrafos línea no supone una pérdida importante de generalidad, especialmente en el caso de modelos de redes de interconexión en las que raramente se utilizan nodos con grado de entrada o de salida menor que 2, ni se duplican caminos de longitud 2.

1.10. Digrafos de de Bruijn y de Kautz

Dentro de los digrafos línea destacan dos conocidas familias: los digrafos de de Bruijn y los digrafos de Kautz. Existen varias construcciones que dan lugar a dichos digrafos.

El digrafo de *de Bruijn*, $B(d, n)$, con $d \geq 2$ y $n \geq 1$, tiene como conjunto de vértices las secuencias de longitud n de símbolos de un alfabeto con d símbolos (ver, por ejemplo, [13]). Un vértice $x_1x_2 \dots x_n$ es adyacente hacia los vértices de la forma $x_2 \dots x_n\alpha$, donde α es un símbolo cualquiera del alfabeto. Es fácil demostrar que $B(d, n)$ es un digrafo d -regular y tiene d^n vértices.

Análogamente, el digrafo de *Kautz*, $K(d, n)$, con $d \geq 2$ y $n \geq 1$, tiene como conjunto de vértices las secuencias de longitud n de símbolos de un alfabeto con $d + 1$ símbolos, tales que dos símbolos consecutivos cualesquiera son distintos. Un vértice $x_1x_2 \dots x_n$ es adyacente hacia cualquier vértice de la forma $x_2 \dots x_n\alpha$, donde α es un símbolo cualquiera del alfabeto, distinto de x_n . Es fácil demostrar que $K(d, n)$ es un digrafo d -regular y tiene $d^n + d^{n-1}$ vértices.

Estas dos familias de digrafos han sido tratadas ampliamente en la bibliografía como buenos modelos de redes de interconexión (ver, por ejemplo, [3], [5], [12], [18], [20], [22], [27] y [31]).

En este trabajo, resulta útil una segunda caracterización de ambas familias de digrafos como digrafos línea iterados. Se puede demostrar que el digrafo $B(d, n)$ se obtiene tomando $n - 1$ iteraciones del digrafo completo con d vértices y autolazos, K_d° . Análogamente, el digrafo $K(d, n)$ se obtiene tomando $n - 1$ iteraciones del digrafo completo con $d + 1$ vértices y sin autolazos, K_{d+1}^* . De este modo, todos los digrafos de Kautz y de de Bruijn con $d \geq 2$ y $n \geq 2$ son digrafos línea restringidos.

En este trabajo se pretende aplicar la técnica del digrafo línea para establecer ciertas propiedades de los grafos subyacentes a los digrafos línea restringidos como modelos de redes de interconexión con enlaces bidireccionales.

Capítulo 2

Grafos subyacentes a digrafos línea restringidos

Como ya se ha comentado en el Capítulo 1, gran parte de las características y propiedades de los digrafos línea se pueden justificar mediante razonamientos de carácter local usando la condición de Heuchenne, que constituye la descripción local de tales digrafos.

En el caso de los digrafos línea restringidos, que constituyen el principal objeto de estudio de esta Tesis y cuya definición ya se ha dado en el Capítulo 1, se añaden condiciones adicionales a la estructura local de los digrafos. Las restricciones impuestas a esta familia de digrafos permiten establecer nuevos resultados interesantes que se presentan en los sucesivos capítulos de este trabajo.

En este capítulo se resuelve el problema de la reconstrucción de un digrafo línea restringido conocido únicamente su grafo subyacente. Como consecuencia del método de resolución, se da una caracterización única del grafo subyacente para la mayoría de los digrafos, para los que el problema de la reconstrucción presenta únicamente las dos soluciones triviales: el propio digrafo y su inverso.

Lo anterior, tiene consecuencias directas en la estructura del grupo de automorfismos del grafo subyacente, que también se estudian en este capítulo.

Conviene recordar aquí que la restricción impuesta a los digrafos línea consiste en excluir aquellos digrafos línea obtenidos a partir de multidigrafos o bien de digrafos cuyo grado mínimo es inferior a 2. Algunos resultados elementales que se derivan de esta restricción se utilizarán con frecuencia en las demostraciones de este capítulo. En particular, citaremos que puede haber a lo sumo un autolazo o un dígono en cada vértice del digrafo, que las ramas no adyacentes de un recorrido no dirigido de longitud 4 están orientadas en sentido inverso y

que la existencia de un dígono en una de las ramas de un recorrido no dirigido de longitud 3 requiere la existencia de un autolazo en alguno de los tres vértices.

Los resultados obtenidos en este capítulo se aplican finalmente al caso particular de los digrafos de Kautz y de de Bruijn definidos también en el Capítulo 1.

Gran parte de este capítulo se puede encontrar en la referencia del mismo autor [32].

2.1. Caracterización de los Grafos Subyacentes a digrafos línea restringidos

Dado un grafo se puede determinar si es el grafo subyacente de algún digrafo línea restringido, tal como se afirma en el siguiente teorema similar a la caracterización de los digrafos línea sin fuentes ni sumideros hecha por Harary y Norman en [14].

Teorema 1 *El grafo G_0 es el grafo subyacente de un digrafo línea restringido si y sólo si existe un par de particiones de su conjunto de vértices, $\{A_i\}_{i \in I}$ y $\{B_i\}_{i \in I}$, tales que:*

1. $|A_i|, |B_i| \geq 2, |A_i \cap B_j| \leq 1 \forall i, j.$

2. $E(G_0) = \bigcup_{i \in I} E(\mathcal{U}(A_i \times B_i)).$

Además, G_0 es isomorfo al grafo subyacente del digrafo $\mathcal{L}H$, donde H es el digrafo cuyo conjunto de vértices es I tal que $i \in I$ es adyacente hacia $j \in I$ si y sólo si $B_i \cap A_j \neq \emptyset$.

Demostración.-

(\Rightarrow) Sea G_0 el grafo subyacente al digrafo línea restringido $G = \mathcal{L}G'$. Sea $I = V(G')$ y sean A_i y B_i los conjuntos de arcos de G' incidentes hacia y desde

el vértice i , respectivamente. (Arcos de G' son vértices de G_0).

1. Es cierto ya que $\delta_G \geq 2$ y G' no tiene arcos paralelos.
2. Claramente, cada arco de A_i es adyacente a cada arco de B_i , y entonces $\bigcup_{i \in I} E(\mathcal{U}(A_i \times B_i)) \subset E(G_0)$. Inversamente, si $\{x, y\}$ es una rama de G_0 , los arcos correspondientes de G' tienen un vértice común j , es decir, x es adyacente hacia y o viceversa, y por tanto $x \in A_j$ e $y \in B_j$, o al revés.

(\Leftarrow) Ahora, supongamos que existen las dos particiones del Teorema $\{A_i\}_{i \in I}$ y $\{B_i\}_{i \in I}$. Podemos definir la siguiente aplicación natural, π , entre $V(G_0)$ y $A(H)$:

$$\begin{aligned} \pi : A(H) &\longrightarrow V(G_0) \\ (i, j) &\longmapsto B_i \cap A_j \end{aligned}$$

- π es biyectiva:

Para todo vértice $x \in V(G_0)$ existe únicos $i, j \in I$ tales que $x \in B_i \cap A_j$, es decir, $\pi(i, j) = x$.

- π es un isomorfismo de grafos entre $\mathcal{U}\mathcal{L}H$ y G_0 :

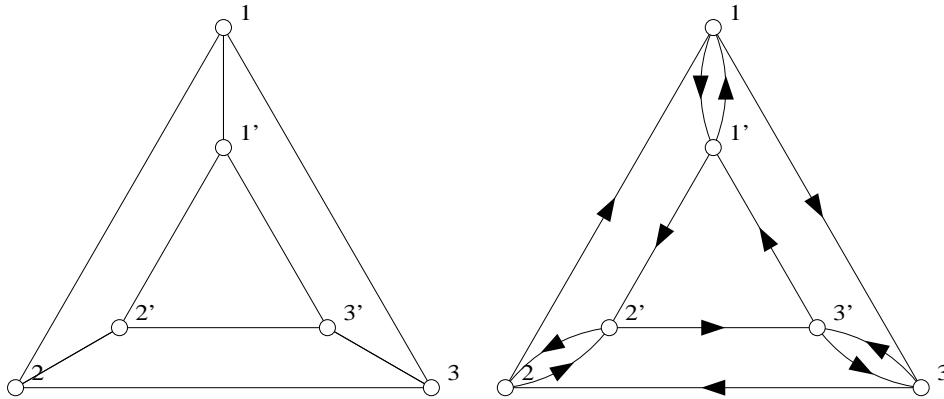
Dado un par de vértices cualesquiera, $x, y \in V(G_0)$, concretamente $x = \pi(i, j)$ e $y = \pi(k, l)$, si $\{x, y\} \in E(G_0)$ entonces $j = k$ o $i = l$. De lo que se deduce que $\{x, y\} \in E(\mathcal{U}(A_k \times B_k))$, o sea, que π mantiene las adyacencias de $\mathcal{U}\mathcal{L}H$.

Por otra parte, dada cualquier rama $\{x, y\} \in E(G_0)$, existe un $h \in I$ tal que $\{x, y\} \in E(\mathcal{U}(A_h \times B_h))$. Luego, $j = k = h$ o bien $l = i = h$, y $\pi^{-1}(x)$ es adyacente hacia $\pi^{-1}(y)$ en $\mathcal{L}H$ o viceversa. En ambos casos, $\{\pi^{-1}(x), \pi^{-1}(y)\}$ es una rama de $\mathcal{U}\mathcal{L}H$.

□

En la Figura 2.1 se puede observar un ejemplo de las particiones $\{A_i\}_{i \in I}$ y $\{B_i\}_{i \in I}$ del Teorema 1.

A los subgrafos $\mathcal{U}(A_i \times B_i)$ los denominamos *subgrafos fundamentales* del grafo G_0 . Cada orientación del grafo G_0 como digrafo línea restringido da lugar a un par de particiones que cumplen las condiciones del teorema anterior. Obsérvese que intercambiar ambas particiones equivale a tomar la orientación inversa de G_0 , operación que conserva los subgrafos fundamentales. En general, pueden existir varias orientaciones distintas y no mutuamente inversas, aunque de hecho sólo ocurre en casos particulares que se pueden clasificar.



$$\begin{aligned}
 A_1 &= \{2,3'\} & B_1 &= \{2',3\} \\
 A_2 &= \{3,1'\} & B_2 &= \{3',1\} \\
 A_3 &= \{1,2'\} & B_3 &= \{1',2\}
 \end{aligned}$$

Figura 2.1: Ejemplo de las particiones $\{A_i\}_{i \in I}$ y $\{B_i\}_{i \in I}$ del teorema de caracterización.

El estudio de la existencia de distintas orientaciones, salvo inversión, se realiza tomando primero el par de particiones inducido por una determinada orientación, y orientando de manera distinta (si es posible) los subgrafos fundamentales para obtener un nuevo digrafo línea restringido. Para ello se deben conocer de antemano las distintas orientaciones posibles de los subgrafos fundamentales dentro de un digrafo línea restringido.

2.2. Orientación de los Subgrafos Fundamentales

Lema 1 *Los subgrafos fundamentales del grafo subyacente a un digrafo línea restringido son subgrafos inducidos.*

Demostración.- Consideremos las particiones $\{A_i\}_{i \in I}$ y $\{B_i\}_{i \in I}$ del teorema de caracterización. Supongamos que el subgrafo fundamental $\mathcal{U}(A_i \times B_i)$ no es un subgrafo inducido. Entonces, debe existir alguna rama $\{x, y\}$ entre dos vértices de A_i o bien entre dos vértices de B_i . Por el citado Teorema, $\{x, y\}$ está en algún otro subgrafo fundamental $\mathcal{U}(A_j \times B_j)$, con lo que $A_j \cap A_i \neq \emptyset$ o bien $B_j \cap B_i \neq \emptyset$, que resulta incompatible con el concepto de partición. \square

Los subgrafos fundamentales se orientan entonces como digrafos línea de un digrafo simple, pero no necesariamente restringido ya que la condición del grado mínimo no es trasladable a subgrafos. Los subgrafos fundamentales $\mathcal{U}(A_i \times B_i)$ se pueden clasificar en dos tipos en función de si la intersección $A_i \cap B_i$ es vacía o no. Más adelante se verá que el segundo caso corresponde a los autolazos en la orientación que genera las particiones. Estudiemos ahora ambos casos por separado.

2.2.1. Caso de intersección vacía

Existen dos orientaciones naturales del subgrafo $\mathcal{U}(A_i \times B_i)$: los digrafos bipartitos completos $A_i \times B_i$ y $B_i \times A_i$. Ambas orientaciones son digrafos línea de digrafos simples, con lo que son válidas dentro de un digrafo línea restringido, pero no son las únicas posibles. De hecho, transformando en dígonos algunos de los arcos de las orientaciones naturales con la limitación de que haya como máximo uno por vértice se obtienen nuevas orientaciones con las mismas características denominadas *orientaciones normales*.

Lema 2 *Existe una única orientación no normal del subgrafo fundamental $\mathcal{U}(A_i \times B_i)$ con $|A_i|, |B_i| \geq 2$ y $A_i \cap B_i = \emptyset$ como digrafo línea de un digrafo simple que corresponde al caso $|A_i| = |B_i| = 2$.*

Demostración.- Tomemos un subgrafo bipartito completo de 4 vértices cualquiera del subgrafo fundamental $\mathcal{U}(A_i \times B_i)$, $\{a_1, a_2\} \times \{b_1, b_2\}$. Se puede ver fácilmente que las únicas orientaciones válidas de dicho subgrafo son las normales y la mostrada en la Figura 2.2. En el caso $|B_i| \geq 3$ podemos tomar otro subgrafo de 4 vértices $\{a_1, a_2\} \times \{b_1, b_3\}$ distinto. En este caso las orientaciones normales de ambos y en el mismo sentido (es decir, de A_i hacia B_i o al revés) son las únicas que no conducen a subdigrafos prohibidos en un digrafo línea restringido. Dado que lo mismo ocurre en el caso $|A_i| \geq 3$, la orientación de la figura sólo puede darse en el caso $|A_i| = |B_i| = 2$. \square

Nótese que en un digrafo línea restringido, los subgrafos fundamentales cumplen la condición impuesta en el lema anterior. La orientación excepcional se denomina *4-ciclo* y se muestra en la Figura 2.2. Esta orientación, como veremos, es responsable de la no unicidad de la descomposición en subgrafos fundamentales.

Las orientaciones normales tienen como subdigrafo una de las orientaciones naturales, cosa que no ocurre con la orientación 4-ciclo. De hecho, la existencia de dos arcos $x \rightarrow y$ y $x \rightarrow z$ con $x \in A_i$ basta para asegurar que $A_i \times B_i$ es

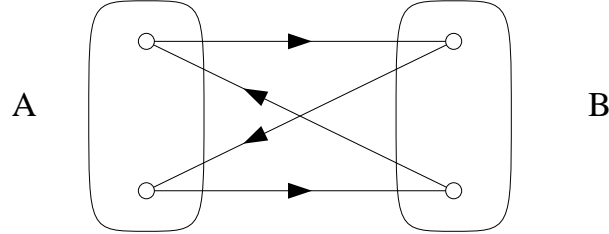


Figura 2.2: 4-ciclo.

subdigrafo de la orientación, y lo mismo ocurre con los arcos $y \rightarrow x$ y $z \rightarrow x$ con $x \in B_i$. Nótese finalmente que en el caso considerado, $|A_i|, |B_i| \geq 2$, ningún vértice puede tener autolazo.

2.2.2. Caso de intersección no vacía

Sea $x = A_i \cap B_i$ para un subgrafo fundamental $\mathcal{U}(A_i \times B_i)$. Podemos ver a dicho subgrafo como la unión de dos grafos bipartitos completos que también son subgrafos inducidos:

$$\mathcal{U}(A_i \times B_i) = \mathcal{U}(A'_i \times B'_i) \oplus \mathcal{U}(\{x\} \times A'_i \cup B'_i)$$

donde $A'_i = A_i \setminus x$ y $B'_i = B_i \setminus x$.

Como en el caso anterior, podemos definir dos orientaciones naturales del subgrafo fundamental que también resultan ser digrafos línea de un digrafo simple. Ambas orientaciones tienen un autolazo en el vértice x . Las orientaciones normales se definen por el mismo procedimiento salvo que x no puede poseer ningún dígono por tener todas ellas el autolazo en x .

Por la condición del grado mínimo de los digrafos línea restringidos y dado que el subgrafo fundamental es un subgrafo inducido, en las orientaciones válidas debemos tener como mínimo dos arcos incidentes hacia x y otros dos incidentes desde x .

Lema 3 *Existe una única orientación no normal del subgrafo fundamental $\mathcal{U}(A_i \times B_i)$ con $|A_i|, |B_i| \geq 2$ y $|A_i \cap B_i| = 1$ como digrafo línea de un digrafo simple, que se muestra en la Figura 2.3.*

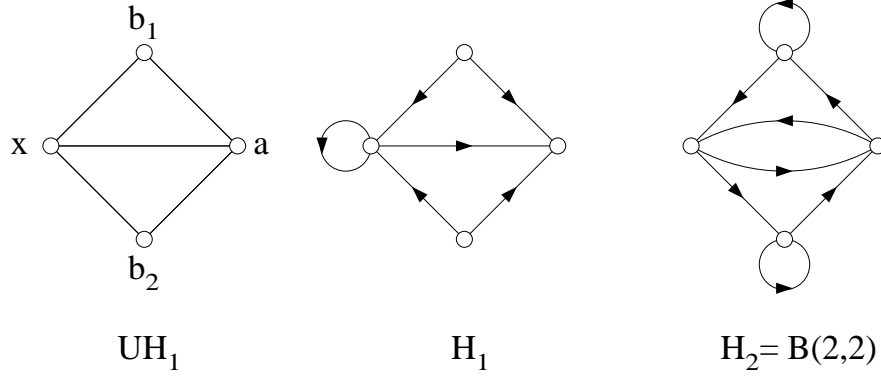


Figura 2.3: Orientaciones normal y no normal en el caso $|A'_i| = 1$ y $|B'_i| = 2$.

Demostración.- La presencia de un autolazo en el vértice x impide la existencia de las combinaciones de arcos $a \rightarrow x \leftarrow b$ y $b \leftarrow x \rightarrow a$ con $a \in A'_i$ y $b \in B'_i$ en la orientación del subgrafo fundamental, que darían lugar a subdigrafos prohibidos en un digrafo línea de un digrafo simple. De este modo, $A_i = |\Gamma^-(x)|$ y $B_i = |\Gamma^+(x)|$ o viceversa, lo que asegura una orientación normal de todo el subgrafo fundamental a través de la condición de Heuchenne.

Supongamos que H es una orientación no normal del subgrafo fundamental $\mathcal{U}(A_i \times B_i)$. Tenemos entonces que no hay autolazo en x . Dado que $\mathcal{U}(A'_i \times B'_i)$ es un subgrafo inducido, debe orientarse como digrafo línea de un digrafo simple. La condición de grado mínimo permite despreciar el caso $|A'_i| = |B'_i| = 1$. Para simplificar, consideremos $|B'_i| \geq 2$. Si $|A'_i| \geq 2$, ninguno de los vértices considerados, incluido x , puede tener autolazos, hecho que conduce a la existencia de subdigrafos prohibidos. Así, basta analizar el caso $|A'_i| = 1$.

Consideremos los vértices $a \in A'_i$ y $b_1, b_2 \in B'_i$. La no existencia de autolazos impide la existencia de las combinaciones $a \rightarrow x \rightarrow b_1$ y $a \rightarrow x \rightarrow b_2$ o sus inversas, y la combinación $b_1 \leftarrow x \rightarrow b_2$ o su inversa conducen a subdigrafos prohibidos. Este hecho nos restringe al caso $|B'_i| = 2$.

Para asegurar el grado mínimo de x debe haber un dígono que sólo puede estar en el vértice a , obteniéndose la única orientación no normal (salvo inversión) mostrada en la Figura 2.3. \square

En la siguiente proposición queda resuelto el problema de situar los vértices de un digrafo línea restringido que tienen un autolazo cuando conocemos únicamente el grafo subyacente.

Proposición 1 *Si G_0 es el grafo subyacente a un digrafo línea restringido, los vértices en los que hay autolazos están determinados.*

Demostración.- Para que un vértice x de G_0 pueda tener autolazo, necesariamente debe pertenecer a algún subgrafo fundamental con intersección no vacía entre sus partes, $x = A \cap B$. Sin embargo, aparentemente la ubicación exacta del autolazo en dicho subgrafo no está determinada en el caso mostrado en la Figura 2.3. Supongamos que existen dos orientaciones de G_0 , G_1 y G_2 , como digrafos línea restringidos con distintos autolazos. En particular, supongamos que G_1 tiene un autolazo en x y G_2 no lo tiene. En tal caso tendremos el subgrafo fundamental $\mathcal{U}(A_0 \times B_0)$ con $x = A \cap B$ inducido por la orientación G_1 debe ser excepcional. Para simplificar tomamos $A = \{a, x\}$ y $B = \{b_1, b_2, x\}$. Así, en G_2 aparecen autolazos en b_1 y en b_2 , que no pueden aparecer en G_1 . Continuando el razonamiento anterior, deben existir ahora dos subgrafos fundamentales inducidos por G_2 , $\mathcal{U}(A_1 \times B_1)$ y $\mathcal{U}(A_2 \times B_2)$, con $A_1 \cap B_1 = b_1$ y $A_2 \cap B_2 = b_2$, también excepcionales. Es fácil demostrar que lo anterior fuerza a que exista más de un dígono en el vértice a , lo que es imposible en un digrafo línea restringido. \square

Con ello, todas las posibles orientaciones de un grafo como digrafos línea restringidos tienen los mismos autolazos, que se distinguen por los subgrafos fundamentales con intersección no vacía.

2.3. Ubicación de los dígonos

Al igual que en el caso de los autolazos, dado el grafo subyacente de un digrafo inicialmente es imposible determinar qué ramas provienen de dígonos y cuales no. Este problema puede influir claramente en la unicidad de la descomposición en subgrafos fundamentales del teorema de caracterización.

Consideremos el grafo G_0 subyacente a un digrafo línea restringido G . Tenemos que G induce una descomposición de G_0 en subgrafos fundamentales. La existencia de un dígono de G entre los vértices x e y supone la existencia de dos subgrafos fundamentales, $\mathcal{U}(A_i \times B_i)$ y $\mathcal{U}(A_j \times B_j)$, tales que $x = B_i \cap A_j$ e $y = B_j \cap A_i$.

Lema 4 *Las únicas orientaciones posibles de los dos subgrafos fundamentales en las que no hay dígono entre x e y son las que tienen por subdigrafo el mostrado en la Figura 2.4. En dichos casos excepcionales existen dígonos en ambos vértices.*

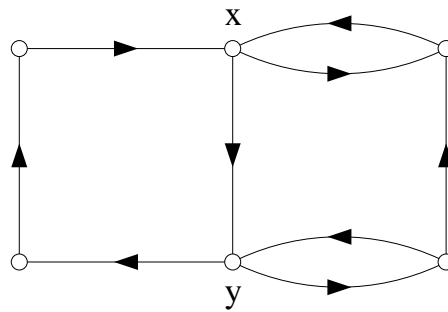


Figura 2.4: Orientación excepcional de un subgrafo fundamental con un dígono.

Demostración.- Veamos qué orientaciones posibles de los dos subgrafos fundamentales no presentan dígono entre los vértices x e y . Si consideramos exclusivamente orientaciones normales para que no haya dígono entre x e y debemos tener a $A_i \times B_i$ y a $B_j \times A_j$ como subdigrafos o bien sus inversos. En ambos casos no se puede satisfacer la condición del grado mínimo de x ni aún añadiendo un dígono en x . Lo mismo ocurre si sólo consideramos la orientación 4-ciclo en ambos subgrafos. Así, debemos dar orientación normal a un subgrafo y el otro orientarlo como 4-ciclo, cosa que sólo puede ocurrir si $|A_i| = |B_i| = 2$, o bien si $|A_j| = |B_j| = 2$. Consideraremos para simplificar el segundo caso.

Para conseguir que se cumpla la condición de grado mínimo en x e y deben existir dos dígonos, uno en cada vértice. Obviamente, éstos sólo pueden aparecer en el subgrafo fundamental orientado normalmente. \square

Del lema anterior se desprende directamente la siguiente proposición.

Proposición 2 *Si G_0 es el grafo subyacente a un digrafo línea restringido, los vértices que poseen un dígono están determinados.*

\square

Nótese que el resultado anterior determina únicamente los vértices que poseen un dígono pero no establece en general cuáles son las ramas que se orientan como dígonos. Así, pueden existir varias orientaciones del grafo con distintos dígonos. Obsérvese finalmente que esto no sucederá en el caso de que los vértices con dígono tengan grado mínimo ≥ 3 , o bien si la distancia entre dígonos distintos es al menos 2.

2.4. Subgrafos fundamentales adyacentes

Diremos que el subgrafo fundamental, $\mathcal{U}(A_i \times B_i)$ es adyacente hacia el subgrafo fundamental $\mathcal{U}(A_j \times B_j)$ si $B_i \cap A_j \neq \emptyset$. Los dos lemas siguientes muestran que, en general, la orientación de un determinado subgrafo fundamental determina la orientación de los subgrafos fundamentales adyacentes desde y hacia él mismo.

Lema 5 *Sea G_0 el grafo subyacente a un digrafo línea restringido G y sean $\mathcal{U}(A_i \times B_i)$ y $\mathcal{U}(A_j \times B_j)$ dos subgrafos fundamentales adyacentes del mismo. Si $A_i \times B_i$ es subdigrafo de G , entonces una de las siguientes afirmaciones es cierta:*

1. $A_j \times B_j$ también es subdigrafo de G .
2. $|A_j| = |B_j| = 2$, $\mathcal{U}(A_j \times B_j)$ se orienta como 4-ciclo, y ambos subgrafos fundamentales forman un caso excepcional del Lema 4.

Demostración.- Sea $x = B_i \cap A_j$ y consideremos los vértices $x' \in B_i \setminus A_j$ y $z \in B_j \setminus A_i$. De existir el arco $x \rightarrow z$ en G existiría también el arco $x' \rightarrow z$, lo que es imposible ya que $\{x', z\}$ no es una rama de G_0 . Así, $B_i \setminus A_j \subset \Gamma_G^+(x)$.

De este modo, la única forma de que $A_j \times B_j$ no sea subdigrafo de G es que $|B_i| = 2$, $B_i \cap A_j = y$ e $y \notin \Gamma_G^+(x)$, lo que supone que el subgrafo fundamental $\mathcal{U}(A_j \times B_j)$ se orienta como 4-ciclo y que ambos subgrafos fundamentales constituyen una de las excepciones al Lema 4. \square

Lema 6 *Sea G_0 el grafo subyacente a un digrafo línea restringido G y sean $\mathcal{U}(A_i \times B_i)$ y $\mathcal{U}(A_j \times B_j)$ dos subgrafos fundamentales adyacentes del mismo. Si $A_j \times B_j$ es subdigrafo de G , entonces se cumple una de las siguientes afirmaciones:*

1. $A_i \times B_i$ también es subdigrafo de G .
2. $|A_i| = |B_i| = 2$, $\mathcal{U}(A_i \times B_i)$ se orienta como 4-ciclo y ambos subgrafos fundamentales forman un caso excepcional del Lema 4.

\square

La demostración de este lema es análoga a la del lema anterior.

Si aseguramos que el segundo caso de los lemas anteriores no se da, y para ello basta considerar que la situación de los dígonos está determinada, la conectividad de G_0 permite reconstruir todo el digrafo línea restringido de manera única a partir de la orientación normal de un subgrafo fundamental.

Teorema 2 *Sea G_0 el grafo subyacente de un digrafo línea restringido G . Entonces, si G_0 es conexo y localmente finito, G es la única orientación del mismo como digrafo línea restringido fijada la ubicación de los dígonos y la orientación normal de un subgrafo fundamental cualquiera.*

Demostración.- Consideremos dada la orientación del subgrafo fundamental $\mathcal{U}(A_0 \times B_0)$ y que ésta es normal. Si conocemos exactamente la situación de los dígonos, los lemas anteriores permiten orientar de forma única y normal todos los subgrafos fundamentales adyacentes desde y hacia el subgrafo dado.

Consideremos el conjunto de vértices $V_0^* = \bigcup_{j \in J} (A_j \cup B_j)$, donde $\mathcal{U}(A_j \times B_j)$, $j \in J$, son los subgrafos fundamentales que se pueden orientar unívocamente a partir del subgrafo dado, $\mathcal{U}(A_0 \times B_0)$. Sea G'_0 el subgrafo de G_0 inducido por V_0^* . Entonces $E(G'_0) = \bigcup_{j \in J} E(\mathcal{U}(A_j \times B_j))$. Si existe una rama $\{x, y\} \in E(\mathcal{U}(A_k \times B_k))$, $k \notin J$ y $x, y \in V_0^*$, entonces existen $p, q \in J$ tales que $x \in A_p \cup B_p$, $y \in A_q \cup B_q$ y, por los lemas anteriores, el subgrafo $\mathcal{U}(A_k \times B_k)$ se puede orientar de forma única y normal a partir del subgrafo $\mathcal{U}(A_p \times B_p)$ o de $\mathcal{U}(A_q \times B_q)$. Luego $k \in J$.

Del mismo modo, no puede existir ninguna rama $\{x, y\}$ en G_0 con $x \in V_0^*$ e $y \notin V_0^*$. Entonces, dado que G_0 es conexo y localmente finito, $G'_0 = G_0$ y $J = I$. \square

Nótese que una vez determinada la ubicación de los dígonos cada subgrafo fundamental puede orientarse normalmente de 2 maneras, una inversa de la otra. Por el teorema anterior, ambas orientaciones determinan dos orientaciones de todo el grafo G_0 , también una inversa de la otra. Para que sea posible orientar un subgrafo fundamental como 4-ciclo, todos los demás subgrafos fundamentales deben orientarse también del mismo modo dando así nuevas orientaciones del grafo.

Corolario 1 *Sea G_0 el grafo subyacente de un digrafo línea restringido G . Entonces, si G_0 es conexo, localmente finito y existe un subgrafo fundamental orientado como 4-ciclo, una de las siguientes afirmaciones es cierta:*

1. G es un digrafo 2-regular con girth mayor o igual que 3 y todos los subgrafos fundamentales de G_0 están orientados como 4-ciclos.

2. *Existen orientaciones de G_0 como digrafos línea restringidos con distintos dígonos.*

Demostración.- Para que un determinado subgrafo fundamental se oriente como 4-ciclo, las condiciones del Teorema 2 no deben cumplirse. Entonces debemos tener distintas orientaciones con distintos dígonos o bien ningún subgrafo fundamental debe orientarse normalmente, lo que requiere que $|A_i| = |B_i| = 2$, $\forall i \in I$, y la ausencia de dígonos y autolazos. \square

Los resultados anteriores permiten afirmar que la descomposición en subgrafos fundamentales dada en el teorema de caracterización es única salvo en los dos casos siguientes:

1. Todos los subgrafos fundamentales se pueden orientar como 4-ciclos, lo que fuerza a que el digrafo de partida sea un digrafo 2-regular con girth mayor o igual que 3.
2. Existen orientaciones con distintos dígonos. El número de orientaciones distintas como digrafos línea restringidos es justamente el doble del número de posibles distribuciones de los dígonos, ya que fijada ésta se puede aplicar el Teorema 2.

Se puede observar un ejemplo del primer caso en la Figura 2.5.

2.5. Grupo de automorfismos del grafo subyacente

En este apartado se relacionan los grupos de automorfismos de un digrafo línea restringido G y de su grafo subyacente G_0 . En primer lugar, cabe destacar que todo automorfismo de G es trivialmente automorfismo de G_0 . De hecho, el grupo $\mathbf{Aut}G$ es un subgrupo del grupo $\mathbf{Aut}G_0$. Denominamos *índice* de G , $i(G)$, al índice de dicho subgrupo. Este índice es por tanto una medida de la “disminución de simetría” obtenida al orientar G_0 .

Consideremos ahora el conjunto de todas las orientaciones de un grafo G_0 , denotado por $\mathcal{O}G_0$, y en particular el conjunto de aquellas orientaciones que sean digrafos línea restringidos, $\mathcal{O}_{\mathcal{L}}G_0$. De manera natural, cada automorfismo $\phi \in \mathbf{Aut}G_0$ actúa como permutación en los conjuntos $\mathcal{O}G_0$ y $\mathcal{O}_{\mathcal{L}}G_0$ de modo que para cada orientación H , $\phi H \cong H$. En efecto, definimos la acción de ϕ sobre

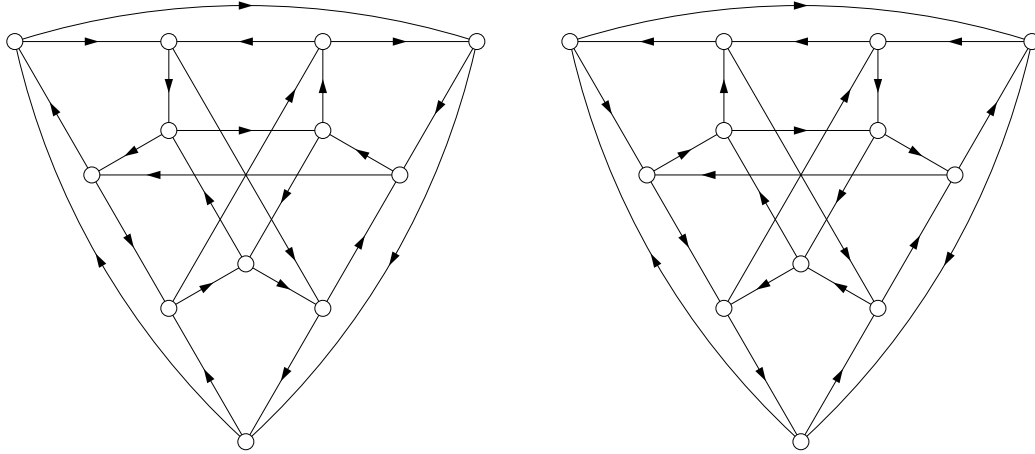


Figura 2.5: Ejemplo de dos orientaciones del mismo grafo como digrafo línea restringido que no son mutuamente inversas.

H de modo que $(x, y) \in A(\phi H) \Rightarrow (\phi^{-1}x, \phi^{-1}y) \in A(H)$. Nótese que si H es digrafo línea restringido, también lo es ϕH .

La órbita de la orientación H de G_0 respecto a la acción de $\mathbf{Aut}G_0$ descrita, $[H]$, es el conjunto de las orientaciones de G_0 isomorfas a H . Esto es así ya que todo isomorfismo entre distintas orientaciones de un mismo grafo G_0 es un automorfismo de dicho grafo. En particular, si H es un digrafo línea restringido, también lo son todas las orientaciones en $[H]$.

Dado que todo automorfismo $\phi \in \mathbf{Aut}G_0$ que deja invariante la orientación H es automorfismo de H , tenemos que el estabilizador de H es justamente $\mathbf{Aut}H$. Entonces, el número de orientaciones isomorfas a H se puede obtener de la siguiente relación:

$$|\mathbf{Aut}G_0| = |[H]| |\mathbf{Aut}H|$$

es decir, $i(H) = |[H]|$.

Si se cumplen las condiciones dadas en el Teorema 2 para el grafo G_0 subyacente a un digrafo línea restringido G , el valor $i(G)$ debe ser 1 o 2, ya que sólo existen dos orientaciones de G_0 que sean digrafos línea restringidos: G y $-G$. Podemos enunciar entonces el siguiente teorema:

Teorema 3 Sean G un digrafo línea restringido conexo y localmente finito y G_0 su grafo subyacente. Si ningún par de subgrafos fundamentales forman el caso excepcional del Lema 4 y existe algún subgrafo fundamental no orientable como 4-ciclo (lo que es seguro si existe algún dígono en G), entonces $|\mathbf{Aut}G_0| = 2|\mathbf{Aut}G|$ si $G \cong -G$ y $\mathbf{Aut}G_0 \equiv \mathbf{Aut}G$ en caso contrario.

Demostración. - Las condiciones impuestas a G_0 son justamente las que permiten asegurar que todas las orientaciones en $\mathcal{O}_{\mathcal{L}}G_0$ tienen los mismos dígonos y que existe un subgrafo fundamental que sólo puede orientarse normalmente. En éste caso, el Teorema 2 asegura que para cada una de las dos orientaciones normales posibles del subgrafo fundamental existe una única orientación de G_0 como digrafo línea restringido que la contiene. Estas orientaciones no pueden ser otras que G y $-G$, que necesariamente son distintas. Así, $\mathcal{O}_{\mathcal{L}}G_0 = \{G, -G\}$.

En caso de que $G \cong -G$, es decir, existe un automorfismo $\phi \in \mathbf{Aut}G_0$ tal que $\phi G = -G$, tenemos que $[G] = \{G, -G\}$ y por tanto $i(G) = 2$.

En caso contrario, $[G] = \{G\}$, $i(G) = 1$ y por tanto $\mathbf{Aut}G_0 \equiv \mathbf{Aut}G$. \square

Los valores 1 y 2 del índice del digrafo los denominamos *triviales*.

El problema de la unicidad de las particiones del teorema de caracterización está estrechamente relacionado con la existencia de digrafos línea restringidos con índice no trivial, analizados en el siguiente capítulo, si bien de entrada no son problemas equivalentes.

2.6. Caso particular: digrafos de Kautz y de Bruijn

Los digrafos de de Bruijn y de Kautz, definidos en el Capítulo 1, son digrafos línea restringidos, para grado y diámetro mayores o iguales que 2. En efecto, ambas familias de digrafos pueden definirse respectivamente como los digrafos línea iterados del digrafo completo de s vértices, K_s° , y del mismo suprimiendo sus autolazos, K_s^* . (Ver [12]). Esto es:

$$K(d, n) = \mathcal{L}^{n-1}K_{d+1}^* = \text{digrafo de Kautz de grado } d \text{ y diámetro } n.$$

$$B(d, n) = \mathcal{L}^{n-1}K_d^\circ = \text{digrafo de de Bruijn de grado } d \text{ y diámetro } n.$$

Todos los digrafos de Kautz y de de Bruijn tienen dígonos. Para que se cumplan las condiciones del Teorema 2 basta demostrar que en ninguno de ellos se da el caso excepcional del Lema 4.

- Si $n \geq 3$, la distancia mínima entre dígonos es mayor que 1. Para verlo, basta observar que la distancia entre dígonos de un digrafo línea es una unidad mayor que en el digrafo original.
- Si $d \geq 3$, no hay vértices con grado mínimo 2, condición que impide tener el caso excepcional citado.
- El digrafo $B(2, 2)$ sólo tiene un dígono, de modo que no existe ninguna orientación del su grafo subyacente que no tenga el dígono en la misma posición.
- Todas las orientaciones del grafo $\mathcal{UK}(2, 2)$ tienen los mismos dígonos. En efecto, como $K(2, 2)$ no tiene autolazos, ninguna de las orientaciones de su grafo subyacente puede tener autolazos. Suponiendo que existiera una orientación que tuviese un dígono en una ubicación distinta a los dígonos de $K(2, 2)$, dicho dígono se hallaría sobre una de las ramas de los dos triángulos de $\mathcal{UK}(2, 2)$. Esto es una contradicción, dado que en un digrafo línea restringido, un dígono en uno de los lados de un triángulo obliga a la existencia de un autolazo en uno de sus vértices.

Aplicando ahora el Teorema 2 para $n \geq 2$, existen sólo dos orientaciones como digrafos línea restringidos de cada uno de los grafos de de Bruijn y de Kautz, que son concretamente los digrafos de Kautz y de de Bruijn y sus inversos.

El isomorfismo entre cada digrafo y su inverso se puede obtener fácilmente si se considera la construcción de los digrafos como digrafos sobre alfabetos (Ver la definición dada en el Capítulo 1). En dicha construcción, los vértices son secuencias de longitud fija de símbolos de un alfabeto. Las adyacencias se forman de modo que a partir de la secuencia de un vértice dado, si añadimos un nuevo símbolo al final de la misma y eliminamos el primero obtenemos un vértice adyacente desde el anterior. Por ejemplo, el vértice $abcbbba$ es adyacente hacia $bcbbaa$. En el caso de los digrafos de Kautz, se añaden restricciones a las posibles secuencias de símbolos.

El isomorfismo citado anteriormente entre el digrafo y su inverso actúa sobre cada vértice invirtiendo el orden de los símbolos de la secuencia correspondiente. De este modo, las adyacencias funcionan en sentido inverso al del digrafo original. Así, podemos afirmar que las dos orientaciones de los grafos considerados son isomorfas. El Teorema 3 asegura, entonces, que el índice de los grafos de de Bruijn y de Kautz es 2. Por construcción, el isomorfismo entre las dos orientaciones inversas es una involución, lo que permite formar un subgrupo de automorfismos de G_0 isomorfo a \mathbf{Z}_2 .

Por otra parte, los automorfismos del digrafo transforman la secuencia asociada a cada vértice permutando los símbolos del alfabeto. Es fácil comprobar que el isomorfismo de inversión conmuta con los automorfismos del digrafo, hecho que permite enunciar el siguiente teorema.

Teorema 4

$$\mathbf{Aut}\mathcal{U}K(d-1, n) \cong \mathbf{Aut}\mathcal{U}B(d, n) \cong \mathbf{Z}_2 \times \mathcal{S}_d$$

Demostración.- A parte de los razonamientos anteriores, tanto el grupo de automorfismos de $B(d, n)$ como el de $K(d-1, n)$ son isomorfos al grupo de permutaciones de los símbolos del alfabeto a partir del que se construyen, $\{1, \dots, d\}$, es decir, \mathcal{S}_d . La justificación del teorema es inmediata considerando que $\mathbf{Aut}\mathcal{L}G \cong \mathbf{Aut}G$ para cualquier digrafo conexo G . (Ver [1] y [15]). \square

El resultado anterior demuestra una conjetura de J. Bond ([4]), que corresponde al caso particular del grupo de automorfismos de los grafos de de Bruijn.

Capítulo 3

Grafos subyacentes con índice no trivial

Continuando en la línea iniciada en el capítulo anterior, en este capítulo se estudia el problema de la existencia de digrafos línea restringidos con índice no trivial, es decir, mayor que 2.

Consideremos un digrafo línea restringido G_1 y su grafo subyacente G_0 . El Teorema 1 define las dos particiones del conjunto de vértices de G_0 , $\{A_i\}_{i \in I}$ y $\{B_i\}_{i \in I}$. Claramente, los subgrafos fundamentales $\mathcal{U}(A_i \times B_i)$, $i \in I$, se orientan de forma normal en los digrafos G_1 y $-G_1$.

Un valor no trivial del índice de G_1 (es decir, mayor que 2) requiere la existencia de al menos una orientación G_2 del grafo G_0 como digrafo línea restringido distinta de G_1 y $-G_1$. Para asegurar que el índice de G_1 es no trivial, deberíamos obtener como mínimo 2 orientaciones más isomorfas a G_1 . Sin embargo, la verdadera excepcionalidad está en la existencia de la tercera orientación G_2 .

Los dos únicos casos en los que esto es posible son:

1. Todos los subgrafos fundamentales se orientan como 4-ciclos en G_2 .
2. Los dígonos de G_2 no son los mismos que los de G_1 .

Según el Corolario 1, el primer caso requiere que el digrafo G_1 sea 2-regular sin dígonos ni autolazos, es decir, con girth mayor o igual que 3. Tales condiciones son suficientemente restrictivas como para poder efectuar una clasificación exhaustiva de tales digrafos.

El segundo caso requiere un estudio más profundo de la estructura local de digrafos que permiten la ambigüedad de dígonos citada en el capítulo anterior.

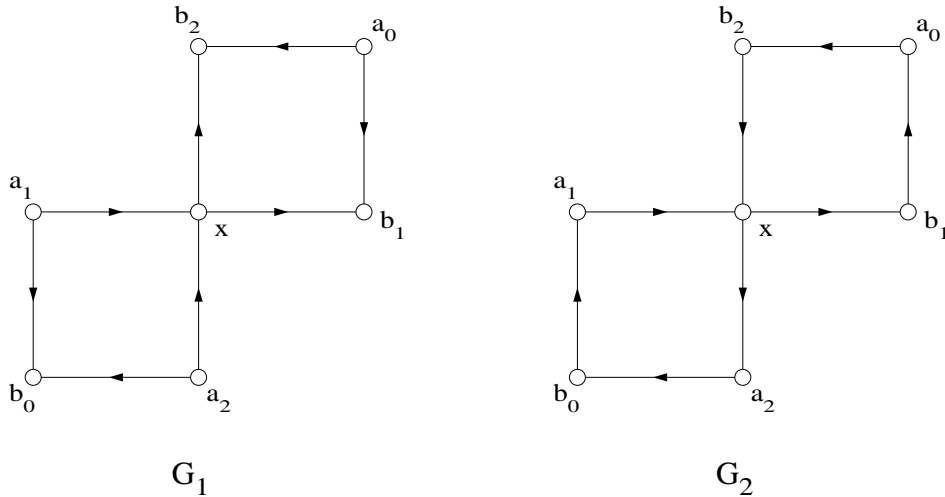


Figura 3.1: Comportamiento local de las dos orientaciones G_1 y G_2 alrededor del vértice x . Se puede observar que $G_1 = F_0 \oplus F_1$ y $G_2 = F_0 \oplus (-F_1)$.

El número de orientaciones de G_0 como digrafo línea restringido es el doble del número de diferentes formas de disponer los dígonos. A diferencia del primer caso, existe una gran variedad de digrafos de índice no trivial con dígonos y su clasificación no será abordada en este trabajo.

3.1. Digrafos sin dígonos

Según el capítulo anterior, todo vértice x de G_0 está exactamente en dos subgrafos fundamentales, $\mathcal{U}(A_i \times B_i)$ y $\mathcal{U}(A_j \times B_j)$, distintos. En la Figura 3.1 se puede observar el comportamiento local de las dos orientaciones G_1 y G_2 alrededor del vértice x . Tomando $A_i = \{a_1, a_2\}$, $B_i = \{x, b_0\}$, $A_j = \{x, a_0\}$ y $B_j = \{b_1, b_2\}$, dos de las ramas incidentes a x deben tener la misma orientación en G_1 y G_2 (por ejemplo $a_1 \rightarrow x$ y $x \rightarrow b_1$), mientras las otras dos tienen orientaciones opuestas. En efecto, si las dos ramas $a_1 \rightarrow x$ y $a_2 \rightarrow x$ se orientaran igual en G_1 y G_2 , $\mathcal{U}(A_i \times B_i)$ se orientaría normalmente en G_2 , de la misma manera que lo hace en G_1 . Entonces, por el Teorema 2, tendríamos que G_1 y G_2 son una misma orientación.

Dado que la misma situación se da en todos los vértices de G_0 , el par de orientaciones no mutuamente inversas, G_1 y G_2 , definen una 1-factorización de ambas tal que $G_1 = F_0 \oplus F_1$ y $G_2 = F_0 \oplus (-F_1)$. De modo equivalente, ambas orientaciones definen dos permutaciones de $V(G_0)$, α y β , asociadas a los dos 1-factores anteriores. Ambas permutaciones constituyen una arco-coloración de

G_1 y, por la condición de Heuchenne aplicada a G_1 y G_2 , satisfacen las siguientes relaciones de conmutación:

$$\begin{aligned}\alpha^{-1}\beta &= \beta^{-1}\alpha \\ \alpha^{-1}\beta^{-1} &= \beta\alpha\end{aligned}$$

que denominaremos *relaciones de conmutación de Heuchenne (HCR)*. En este caso, diremos que los digrafos G_1 y G_2 son *HCR-coloreables*. La siguiente proposición es consecuencia de los razonamientos anteriores.

Proposición 3 *Todo digrafo línea restringido de índice no trivial y con $\text{girth} \geq 3$ es HCR-coloreable.*

□

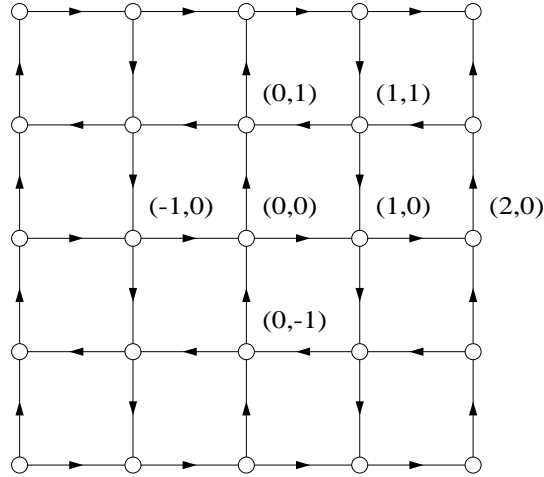
A la inversa, tenemos:

Proposición 4 *Todo digrafo HCR-coloreable es digrafo línea 2-regular y con $\text{girth} \leq 4$.*

Demostración.- Consideremos los tres arcos $x \rightarrow y$, $x \rightarrow z$ y $t \rightarrow z$ del digrafo HCR-coloreable G . Los dos primeros arcos deben tener distinto color. Por ejemplo, $\alpha(x) = y$ y $\beta(x) = z$. Entonces, necesariamente $\alpha(t) = z$ y, por las relaciones de conmutación (HCR), tenemos que $\beta(t) = y$. De este modo, la existencia del arco $t \rightarrow y$ asegura la condición de Heuchenne. Las condiciones de conmutación (HCR) conducen a su vez a que $(\alpha\beta)^2$ sea la identidad, lo que significa que todo vértice de G está en al menos un ciclo de longitud 4. Finalmente, la propia existencia de una 2-coloración implica que G es 2-regular. □

3.2. Digrafo \mathcal{T}

Busquemos ahora un modelo de digrafo HCR-coloreable. Las relaciones de conmutación de Heuchenne (HCR) dadas en la sección anterior tomadas como relaciones generadoras de un grupo, definen uno de los 17 grupos espaciales de cristalografía bidimensional, el grupo **pgg** según la notación de Hermann y Mauguin (Ver [7]). Tenemos entonces una manera natural de definir un digrafo (infinito) HCR-coloreable, el diagrama de Cayley \mathcal{T} del grupo citado, tomando como generadores aquellos que satisfagan las relaciones de conmutación HCR. Denotaremos también por α y β a ambos generadores.

Figura 3.2: Digrafo \mathcal{T} .

Se puede obtener una representación plana del diagrama de Cayley asociando a cada vértice o elemento de \mathbf{pgg} , $g = \alpha^{(-1)^j i} \beta^j$, el punto del plano (i, j) . De este modo, el vértice correspondiente a (i, j) adyacente hacia los vértices representados por $(i + (-1)^j, j)$ y $(i, j + (-1)^i)$. En efecto, el vértice $\alpha g = \alpha^{(-1)^j i+1} \beta^j$ corresponde al punto $(i + (-1)^j, j)$ y $\beta g = \beta \alpha^{(-1)^j i} \beta^j = \alpha^{(-1)^j i} \beta^{j+(-1)^i}$ corresponde a $(i, j + (-1)^i)$. La estructura local del digrafo \mathcal{T} se puede observar en la Figura 3.2.

Proposición 5 *El digrafo \mathcal{T} es un digrafo línea restringido de índice 2, bipartito, con girth 4 y HCR-coloreable.*

Demostración.- Dado que \mathcal{T} es un diagrama de Cayley, los automorfismos que conservan la HCR-coloración son las acciones por la derecha de los elementos de \mathbf{pgg} , es decir, $R_g(h) = hg$. Así, \mathcal{T} es HCR-coloreable y por la Proposición 4 tenemos que \mathcal{T} es un digrafo línea 2-regular y con $\text{girth} \leq 4$.

El carácter bipartito de \mathcal{T} se comprueba tomando como conjuntos independientes las clases laterales de \mathbf{pgg} respecto al subgrupo normal generado por $\{\alpha\beta, \alpha^2, \beta^2\}$. Claramente, los arcos de \mathcal{T} conectan vértices de distinto conjunto independiente, dado que ni α ni β pertenecen al subgrupo anterior.

El girth de \mathcal{T} es mayor que 2 por el hecho adicional de que los elementos α^2 , β^2 , $\alpha\beta$ y $\beta\alpha$ son distintos de la identidad. Además, las relaciones de conmutación

de Heuchenne permiten asegurar la existencia de ciclos de longitud 4 ($\alpha\beta\alpha\beta$ es la identidad), con lo que aseguramos que el girth es exactamente 4.

Para demostrar que el digrafo línea \mathcal{T} es digrafo línea restringido basta probar que entre dos vértices cualesquiera existe a lo sumo un camino de longitud 2. Esto queda asegurado teniendo en cuenta que en el grupo **pgg** los elementos α^2 , β^2 , $\alpha\beta$ y $\beta\alpha$ son distintos. \square

La simetría de las relaciones de conmutación (HCR) que definen a \mathcal{T} como diagrama de Cayley permite hacer 8 construcciones isomorfas a la considerada (inclusive) tomando los diagramas de Cayley del mismo grupo **pgg** con los siguientes generadores $\{\alpha, \beta\}$, $\{\alpha^{-1}, \beta\}$, $\{\alpha, \beta^{-1}\}$, $\{\alpha^{-1}, \beta^{-1}\}$, $\{\beta, \alpha\}$, $\{\beta^{-1}, \alpha\}$, $\{\beta, \alpha^{-1}\}$ y $\{\beta^{-1}, \alpha^{-1}\}$.

Las ocho orientaciones sólo difieren en la inversión del sentido de los arcos de uno o de los dos colores y/o en el intercambio de los dos colores. Por ello, podemos considerar los 8 digrafos como orientaciones HCR-coloreadas del grafo \mathcal{UT} . Estas 8 orientaciones isomorfas definen el subgrupo de automorfismos de \mathcal{UT} generado por \mathcal{I}_0 , \mathcal{I}_1 y \mathcal{R} tales que para cualquier elemento $g = \alpha^i\beta^j$ del grupo **pgg**

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_0(\alpha^i\beta^j) &= \alpha^{-i}\beta^j \\ \mathcal{I}_1(\alpha^i\beta^j) &= \alpha^i\beta^{-j} \\ \mathcal{R}(\alpha^i\beta^j) &= \beta^i\alpha^j\end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{array}{lll}\mathcal{I}_0(\alpha) = \alpha^{-1} & \mathcal{I}_1(\alpha) = \alpha & \mathcal{R}(\alpha) = \beta \\ \mathcal{I}_0(\beta) = \beta & \mathcal{I}_1(\beta) = \beta^{-1} & \mathcal{R}(\beta) = \alpha\end{array}$$

Nótese que $\mathcal{I}_0(\mathcal{T})$ y $\mathcal{I}_1(\mathcal{T})$ son orientaciones mutuamente inversas distintas de \mathcal{T} y de su inversa $-\mathcal{T} = \mathcal{I}_0\mathcal{I}_1(\mathcal{T})$. De este modo, el índice de \mathcal{T} es como mínimo 4. \mathcal{R} es un automorfismo de \mathcal{T} que intercambia los colores de la HCR-coloración.

El digrafo \mathcal{T} es digrafo línea de otro digrafo infinito que también es diagrama de Cayley pero en este caso del grupo **p4** (ver [7]). Sin embargo, la coloración inducida en \mathcal{T} al tomar el digrafo línea (ver [9]) no es la HCR-coloración considerada sino otra distinta que lo configura como diagrama de Cayley del mismo grupo **p4**.

3.3. Diagramas de Schreier

Consideremos de nuevo el digrafo línea restringido HCR-coloreado G_1 . A través de las permutaciones α y β que definen la HCR-coloración del digrafo,

los elementos del grupo \mathbf{pgg} actúan de manera natural sobre los vértices de G_1 , de forma que si g y h son dos elementos de \mathbf{pgg} y x es un vértice de G_1 , $gh(x) = g(h(x))$.

Tomemos un vértice x_0 de G_1 que servirá de referencia, y denotemos por Γ el estabilizador de x_0 dentro del grupo \mathbf{pgg} . Es bien sabido que podemos definir una aplicación biyectiva $\tilde{\pi}$ entre las clases laterales por la izquierda de Γ en \mathbf{pgg} y los vértices de G_1 tal que $g\Gamma \mapsto g(x_0)$ (ver, por ejemplo, [26]).

La biyección anterior define un isomorfismo de digrafos que conserva la HCR-coloración entre el diagrama de Schreier por la izquierda de \mathbf{pgg} con el generador $\{\alpha, \beta\}$ respecto del subgrupo Γ (ver [29]) y el digrafo G_1 . En efecto, dado un elemento g de \mathbf{pgg} tenemos que el isomorfismo anterior asigna a $\alpha g\Gamma$ el vértice $\tilde{\pi}(\alpha g\Gamma) = \alpha g(x_0) = \alpha \tilde{\pi}(g\Gamma)$ y análogamente con β .

Los razonamientos anteriores demuestran la siguiente

Proposición 6 *Todo digrafo línea restringido de índice no trivial y con girth ≥ 3 , G_1 , es isomorfo al diagrama de Schreier de \mathbf{pgg} con el conjunto generador $\{\alpha, \beta\}$ respecto del subgrupo Γ , siendo $\Gamma = \mathbf{St}_{\mathbf{pgg}}(x_0)$ y x_0 un vértice dado de G_1 .*

□

Para clasificar los digrafos línea restringidos de índice no trivial sin dígonos, basta obtener una clasificación de los posibles diagramas de Schreier, es decir, una clasificación de los subgrupos de \mathbf{pgg} .

Antes de proceder a dicha clasificación, es interesante mencionar que la aplicación $\tilde{\pi}$ definida anteriormente se puede obtener de manera natural a partir de la aplicación $\pi : \mathbf{pgg} \rightarrow V(G_1)$ tal que $\pi(g) = g(x_0)$. Se puede demostrar que la aplicación π es un recubrimiento del digrafo G_1 por el digrafo \mathcal{T} que conmuta con las HCR-coloraciones de ambos (ver [33]). En [33] se obtienen todos los resultados de las siguientes secciones utilizando el lenguaje de recubrimientos de digrafos.

Podemos denotar al digrafo G_1 por \mathcal{T}/Γ , que representa el cociente del digrafo \mathcal{T} por el subgrupo Γ , es decir, el diagrama de Schreier definido por el subgrupo Γ de \mathbf{pgg} .

3.4. Isomorfismos entre diagramas de Schreier

Dados dos digrafos HCR-coloreados G_1 y G_2 , denominamos *isomorfismo coloreado* o *isomorfismo HCR-coloreado* a todo isomorfismo entre ambos digrafos que transforma arcos de G_1 en arcos de G_2 del mismo color. Recíprocamente, denominamos *isomorfismo cromático* o *isomorfismo HCR-cromático* a todo isomorfismo entre ambos digrafos que transforma arcos de G_1 en arcos de G_2 del color opuesto.

Varios subgrupos de **pgg** pueden definir diagramas de Schreier HCR-isomorfos. El siguiente lema da una condición necesaria y suficiente para tener tal isomorfismo.

Lema 7 *Los digrafos HCR-coloreados \mathcal{T}/Γ_A y \mathcal{T}/Γ_B , con Γ_A y Γ_B subgrupos de **pgg**, son HCR-isomorfos si y sólo si Γ_A y Γ_B son de la misma clase de conjugación.*

Demostración.-

(\Leftarrow) Supongamos que Γ_A y Γ_B pertenecen a la misma clase de conjugación. Existe entonces un elemento h de **pgg** tal que $\Gamma_B = h^{-1}\Gamma_A h$.

Consideremos la aplicación $\phi : \mathcal{T}/\Gamma_A \rightarrow \mathcal{T}/\Gamma_B$ tal que $\phi(g\Gamma_A) = gh\Gamma_B = g\Gamma_A h$. Claramente, ϕ conserva las adyacencias y los colores, ya que $\alpha\phi(g\Gamma_A) = \alpha gh\Gamma_B = \phi(\alpha g\Gamma_A)$ y análogamente con β .

Finalmente, ϕ es una biyección, ya que la aplicación $\psi : \mathcal{T}/\Gamma_B \rightarrow \mathcal{T}/\Gamma_A$ tal que $\psi(g\Gamma_B) = gh^{-1}\Gamma_A = g\Gamma_B h^{-1}$ es su inversa.

(\Rightarrow) Sea $\phi : \mathcal{T}/\Gamma_A \rightarrow \mathcal{T}/\Gamma_B$ el isomorfismo HCR-coloreado entre los dos digrafos. Existe algún elemento h de **pgg** tal que $\phi(\Gamma_A) = h\Gamma_B$.

Dado que ϕ es un isomorfismo HCR-coloreado, tenemos que para cualquier g de **pgg**, $\phi(\alpha g\Gamma_A) = \alpha\phi(g\Gamma_A)$ y $\phi(\beta g\Gamma_A) = \beta\phi(g\Gamma_A)$. Como α y β generan **pgg**, se cumple que $\phi(g\Gamma_A) = g\phi(\Gamma_A) = gh\Gamma_B$.

En particular, si $g \in \Gamma_A$ entonces $g\Gamma_A = \Gamma_A$ y debe cumplirse que $h\Gamma_B = gh\Gamma_B$. Es decir, $h^{-1}gh \in \Gamma_B$, lo que demuestra que ambos subgrupos son conjugados. \square

La demostración anterior construye todos los isomorfismos HCR-coloreados posibles entre dos diagramas de Schreier y, en particular, nos da todos los automorfismos HCR-coloreados.

Lema 8 *Los automorfismos del digrafo HCR-coloreado \mathcal{T}/Γ son las acciones por la derecha de los elementos de $\text{Norm}_{\mathbf{pgg}}\Gamma$.*

Demostración.- Según la demostración del lema anterior, si ϕ es un automorfismo HCR-coloreado entonces existe un elemento h de \mathbf{pgg} tal que para todo elemento $g \in \mathbf{pgg}$, $\phi(g\Gamma) = gh\Gamma$, y además $\Gamma = h^{-1}\Gamma h$. De este modo, $h \in \mathbf{Normpgg}\Gamma$ y $\phi(g\Gamma) = g\Gamma h = R_h(g\Gamma)$. \square

Como consecuencia directa de lo anterior, el grupo de automorfismos HCR-coloreados es isomorfo al cociente $(\mathbf{Normpgg}\Gamma)/\Gamma$, aplicando el primer teorema de isomorfismo a la aplicación que a cada elemento h de \mathbf{pgg} le asigna el automorfismo HCR-coloreado de \mathcal{T}/Γ que define R_h .

Si Γ es un subgrupo normal de \mathbf{pgg} , los automorfismos coloreados de \mathcal{T}/Γ actúan transitivamente sobre sus vértices. Además, dichos automorfismos actúan semirregularmente, ya que si $\phi(g\Gamma) = gh\Gamma = g\Gamma$ entonces $h \in \Gamma$ y ϕ es la identidad. Así, $\mathbf{Aut}_{HCR}\mathcal{T}/\Gamma$ actúa regularmente sobre los vértices del digrafo, condición necesaria y suficiente para que \mathcal{T}/Γ sea el diagrama de Cayley de \mathbf{pgg}/Γ con generadores $\{\alpha\Gamma, \beta\Gamma\}$.

Se puede enunciar un resultado análogo al Lema 7 para isomorfismos cromáticos entre diagramas de Schreier.

Lema 9 *Los digrafos HCR-coloreados \mathcal{T}/Γ_A y \mathcal{T}/Γ_B , con Γ_A y Γ_B subgrupos de \mathbf{pgg} , son isomorfos por un isomorfismo que permuta los colores si y sólo si $\mathcal{R}(\Gamma_A)$ y Γ_B son de la misma clase de conjugación.*

Demostración.-

(\Leftarrow) Supongamos que $\mathcal{R}(\Gamma_A)$ y Γ_B pertenecen a la misma clase de conjugación. Existe entonces un elemento h de \mathbf{pgg} tal que $\Gamma_B = h^{-1}\mathcal{R}(\Gamma_A)h$.

Consideremos la aplicación $\phi : \mathcal{T}/\Gamma_A \rightarrow \mathcal{T}/\Gamma_B$ tal que $\phi(g\Gamma_A) = \mathcal{R}(g)h\Gamma_B = \mathcal{R}(g\Gamma_A)h$. Claramente, ϕ conserva las adyacencias y permuta los colores, ya que $\alpha\phi(g\Gamma_A) = \alpha\mathcal{R}(g)h\Gamma_B = \mathcal{R}(\beta g)h\Gamma_B = \phi(\beta g\Gamma_A)$ y análogamente con β .

Finalmente, ϕ es una biyección, ya que la aplicación $\psi : \mathcal{T}/\Gamma_B \rightarrow \mathcal{T}/\Gamma_A$ tal que $\psi(g\Gamma_B) = \mathcal{R}(g)h^{-1}\Gamma_A = \mathcal{R}(g\Gamma_B)h^{-1}$ es su inversa.

(\Rightarrow) Sea $\phi : \mathcal{T}/\Gamma_A \rightarrow \mathcal{T}/\Gamma_B$ el isomorfismo que permuta los colores. Existe algún elemento h de \mathbf{pgg} tal que $\phi(\Gamma_A) = h\Gamma_B$.

Tenemos que para cualquier g de \mathbf{pgg} , $\phi(\alpha g\Gamma_A) = \beta\phi(g\Gamma_A)$ y $\phi(\beta g\Gamma_A) = \alpha\phi(g\Gamma_A)$. Como α y β generan \mathbf{pgg} , se cumple que $\phi(g\Gamma_A) = \mathcal{R}(g)\phi(\Gamma_A) = \mathcal{R}(g)h\Gamma_B$.

En particular, si $g \in \mathcal{R}(\Gamma_A)$ entonces $\mathcal{R}(g)\Gamma_A = \Gamma_A$ y debe cumplirse que $h\Gamma_B = \mathcal{R}(g)h\Gamma_B$. Es decir, $h^{-1}\mathcal{R}(g)h \in \Gamma_B$, lo que demuestra que ambos subgrupos son conjugados. \square

Una consecuencia directa del lema anterior es que los digrafos \mathcal{T}/Γ y $\mathcal{T}/\mathcal{R}(\Gamma)$ son isomorfos y sus HCR-coloraciones difieren en una permutación de los colores.

Los resultados anteriores permiten asegurar la existencia de isomorfismos HCR-coloreados o que intercambian los colores entre los digrafos obtenidos a partir de dos subgrupos Γ_A y Γ_B . Sin embargo, podría existir algún isomorfismo distinto a los anteriores, es decir, que no respete los colores. Este último isomorfismo induce en \mathcal{T}/Γ_B una HCR-coloración esencialmente distinta de la natural. Así, para clasificar sin ambigüedad los digrafos línea restringidos con $\text{girth} \geq 3$ deberemos abordar la unicidad de la HCR-coloración.

Volviendo al planteamiento inicial del capítulo, las cuatro orientaciones G_1 , $-G_1$, G_2 y $-G_2$ las podemos describir ahora como diagramas de Schreier de los subgrupos Γ , $\mathcal{I}_0\mathcal{I}_1(\Gamma)$, $\mathcal{I}_1(\Gamma)$ y $\mathcal{I}_0(\Gamma)$, respectivamente. En efecto, basta ver que \mathcal{I}_0 invierte el sentido de los arcos de color α y \mathcal{I}_1 invierte los arcos de color β .

En los casos en los que los subgrupos Γ , $\mathcal{I}_0(\Gamma)$ y $\mathcal{I}_1(\Gamma)$ sean de la misma clase de conjugación podremos asegurar que las cuatro orientaciones son isomorfas y, por tanto, el índice de G_1 es como mínimo 4.

3.5. Subgrupos de pgg

En esta sección construimos los distintos subgrupos del grupo **pgg** que definen diagramas de Schreier que son digrafos línea restringidos con $\text{girth} \geq 3$, eligiendo un único representante de cada clase de conjugación y eliminando aquellas clases de conjugación que estén relacionadas por el automorfismo \mathcal{R} .

Un subgrupo importante de **pgg** es \mathbf{pgg}^2 , es decir, el subgrupo generado por los cuadrados de los elementos de **pgg**. Se puede comprobar fácilmente que \mathbf{pgg}^2 está generado por $\{\alpha^2, \beta^2\}$, que es abeliano y que es un subgrupo normal de índice 4. De hecho, \mathbf{pgg}^2 es isomorfo a \mathbf{Z}^2 .

El grupo cociente (isomorfo al grupo de Klein de 4 elementos) también es abeliano y tiene los elementos \mathbf{pgg}^2 , $\alpha\mathbf{pgg}^2$, $\beta\mathbf{pgg}^2$ y $\alpha\beta\mathbf{pgg}^2$.

Los elementos de la clase $\alpha\beta\mathbf{pgg}^2$ son involutivos. En efecto, si g es un elemento de \mathbf{pgg}^2 tenemos que $\alpha\beta g = g^{-1}\alpha\beta$ y entonces $(\alpha\beta g)^2 = \alpha\beta g g^{-1}\alpha\beta = \alpha\beta\beta^{-1}\alpha^{-1} = 1$.

Los demás elementos (salvo el neutro) tienen orden infinito. En efecto, el orden de los elementos de \mathbf{pgg}^2 (salvo el neutro) es infinito (por ser isomorfo a \mathbf{Z}^2). Desde el punto de vista del grupo cociente $\mathbf{pgg}/\mathbf{pgg}^2$, todo elemento g de

\mathbf{pgg} de orden finito tiene orden par $2n$. Entonces, $g^{2n} = (g^2)^n = 1$ pero como $g^2 \in \mathbf{pgg}^2$, n debe ser 1 y, por tanto, g es involutivo. Basta probar finalmente que $\alpha\mathbf{pgg}^2$ y $\beta\mathbf{pgg}^2$ no tienen elementos involutivos. Si $g = \alpha\alpha^{2i}\beta^{2j}$ entonces $g^2 = \alpha^{2i+1}\beta^{2j}\alpha^{2i+1}\beta^{2j} = \alpha^{4i+2} \neq 1$.

Aunque los digrafos que queremos clasificar son todos ellos diagramas de Schreier, el recíproco no es siempre cierto. Para garantizar que el digrafo \mathcal{T}/Γ es digrafo línea restringido con $\text{girth} \geq 3$ debemos imponer que no haya en él autolazos, ni dígonos, ni arcos paralelos ni varios caminos de longitud 2 entre los mismos vértices.

La no existencia de autolazos equivale a que para todo g de \mathbf{pgg} , $g\Gamma \neq \alpha g\Gamma$ y $g\Gamma \neq \beta g\Gamma$. De otro modo, $g^{-1}\alpha g, g^{-1}\alpha g \notin \Gamma$ o incluso $\alpha, \beta \notin g\Gamma g^{-1}$.

Procediendo de modo análogo con las otras tres restricciones llegamos a que para todo g de \mathbf{pgg} , $g\Gamma g^{-1}$ no debe contener ningún elemento del conjunto $\{\alpha, \beta, \alpha^2, \beta^2, \alpha\beta, \beta\alpha, \alpha^{-1}\beta, \beta\alpha^{-1}, \alpha^2\beta^{-2}, \beta\alpha^3, \alpha\beta^3, \alpha^3\beta, \beta^3\alpha\}$.

Nótese que todo elemento involutivo de \mathbf{pgg} es conjugado de alguno de los elementos $\{\alpha\beta, \beta\alpha, \alpha^{-1}\beta, \beta\alpha^{-1}\}$. En efecto, dado el elemento $\alpha\beta g$ con $g \in \mathbf{pgg}^2$, y tomando un $h \in \mathbf{pgg}^2$ cualquiera, $h\alpha\beta gh^{-1} = \alpha\beta h^{-1}gh^{-1} = \alpha\beta gh^{-2}$, que eligiendo el h adecuado se puede reducir siempre a uno de los cuatro casos citados.

De este modo, el subgrupo Γ no debe contener ningún elemento involutivo. Si eliminamos tales elementos, resulta que Γ debe ser subgrupo del subgrupo generado por $\{\alpha, \beta^2\}$ o del subgrupo generado por $\{\beta, \alpha^2\}$. Sin embargo, por el Lema 9, basta considerar el primer caso.

En conclusión, los subgrupos de \mathbf{pgg} que definen digrafos línea restringidos con $\text{girth} \geq 3$ son los subgrupos de $\langle \alpha, \beta^2 \rangle$ y que no contienen ninguno de los elementos conjugados de $\{\alpha, \beta, \alpha^2, \beta^2, \alpha^2\beta^{-2}\}$. Evidentemente, si Γ no contiene a α^2 tampoco puede contener a α y, análogamente con β . Por otra parte, conjugar por α o por β los demás elementos prohibidos sólo cambia de signo los exponentes, con lo que los elementos prohibidos se reducen a $\{\alpha^2, \beta^2, \alpha^2\beta^2, \alpha^2\beta^{-2}\}$ y sus inversos.

Podemos dividir a los subgrupos anteriores en dos familias diferenciadas: los que son subgrupos de \mathbf{pgg}^2 y los que no lo son.

3.6. Subgrupos de \mathbf{pgg}^2

Los subgrupos de \mathbf{pgg}^2 son isomorfos a los subgrupos de \mathbf{Z}^2 . Es bien sabido que todo subgrupo no trivial de \mathbf{Z}^2 se puede escribir de forma única como $\langle\langle l, n \rangle\rangle$ con $n > 0$ o $n = 0$ y $l > 0$, o bien $\langle\langle l, 0 \rangle, \langle t, n \rangle\rangle$ con $l, n > 0$ y $0 \leq t < l$. En el segundo caso podemos expresar el subgrupo de forma equivalente como $\langle\langle 0, l' \rangle, \langle n', t' \rangle\rangle$.

Si $t = 0$, obviamente $n' = l$, $l' = n$ y $t' = 0$. En caso contrario, se cumplen las relaciones $n' = \gcd(l, t)$, $l' = \frac{nl}{n'}$ y $t' = n \left[\left(\frac{t}{n'} \right)^{-1} \pmod{\frac{l}{n'}} \right]$.

Los subgrupos de \mathbf{pgg}^2 son de la forma $\langle\alpha^{2l}\beta^{2n}\rangle$, que tienen índice infinito, o $\langle\alpha^{2l}, \alpha^{2t}\beta^{2n}\rangle$, cuyo índice en \mathbf{pgg} es $4nl$.

Calculemos ahora $\mathbf{Norm}_{\mathbf{pgg}}\Gamma$. Es obvio que $\mathbf{pgg}^2 < \mathbf{Norm}_{\mathbf{pgg}}\Gamma$, ya que \mathbf{pgg}^2 es abeliano. Por otra parte, sabiendo que dado g de la clase $\alpha\beta\mathbf{pgg}^2$ y h de \mathbf{pgg} cualesquiera, $ghg^{-1} = h^{-1}$ tenemos que $g\Gamma g^{-1} = \Gamma^{-1} = \Gamma$. De este modo, $\langle\alpha\beta, \mathbf{pgg}^2\rangle < \mathbf{Norm}_{\mathbf{pgg}}\Gamma$, por lo que Γ es un subgrupo normal de \mathbf{pgg} o $\mathbf{Norm}_{\mathbf{pgg}}\Gamma = \langle\alpha\beta, \mathbf{pgg}^2\rangle$. El subgrupo Γ es normal si $\alpha\Gamma\alpha^{-1} = \Gamma$.

Nótese que todo subgrupo Γ de \mathbf{pgg}^2 cumple que $\mathcal{I}_0(\Gamma) = \beta\Gamma\beta^{-1} = \Gamma$ y $\mathcal{I}_1(\Gamma) = \alpha\Gamma\alpha^{-1} = \Gamma$. En efecto, $\mathcal{I}_0(\alpha^{2i}\beta^{2j}) = \alpha^{-2i}\beta^{2j} = \beta\alpha^{2i}\beta^{2j}\beta^{-1}$, y análogamente con \mathcal{I}_1 .

De lo anterior deducimos que el índice de \mathcal{T}/Γ es como mínimo 4.

3.6.1. Subgrupos de índice infinito

Tenemos que $\alpha\Gamma\alpha^{-1} = \langle\alpha\alpha^{2l}\beta^{2n}\alpha^{-1}\rangle = \langle\alpha^{2l}\beta^{-2n}\rangle$. El subgrupo Γ es normal si y sólo si $n = 0$ o si $l = 0$. Las demás clases de conjugación constan de 2 subgrupos.

Por tanto, todo subgrupo de \mathbf{pgg}^2 de índice infinito es (salvo conjugación) de la forma $\langle\alpha^{2l}\beta^{2n}\rangle$ con $n, l \geq 0$.

Sin embargo, a nivel de los digrafos definidos por los anteriores subgrupos, los digrafos definidos por Γ y $\mathcal{R}(\Gamma)$ son isomorfos según un isomorfismo que intercambia colores. Para evitar esta ambigüedad consideraremos sólo los subgrupos $\langle\alpha^{2l}\beta^{2n}\rangle$ con $l \geq n \geq 0$.

Finalmente, para garantizar que el diagrama de Schreier es un digrafo línea restringido con girth ≥ 3 hay que excluir los subgrupos que contienen α^2 , β^2 , $\alpha^2\beta^2$ o $\alpha^2\beta^{-2}$, es decir, $l \leq 1$.

Hemos generado la primera familia de digrafos línea restringidos con girth ≥ 3 y con índice no trivial. Denotaremos por $\text{CL}(\infty, 2l, 2n)$ al digrafo $\mathcal{T}/\langle \alpha^{2l}\beta^{2n} \rangle$ con $l \geq 2$ y $0 \leq n \leq l$.

3.6.2. Subgrupos de índice finito

Procediendo análogamente al caso de índice infinito,

$$\alpha\Gamma\alpha^{-1} = \langle \alpha\alpha^{2l}\alpha^{-1}, \alpha\alpha^{2t}\beta^{2n}\alpha^{-1} \rangle = \langle \alpha^{2l}, \alpha^{2t}\beta^{-2n} \rangle = \langle \alpha^{2l}, \alpha^{2(l-t)}\beta^{2n} \rangle.$$

El subgrupo Γ es normal si y sólo si $t = 0$ o si $l = 2t$. Las demás clases de conjugación constan de 2 subgrupos.

Por tanto, todo subgrupo de \mathbf{pgg}^2 de índice finito es (salvo conjugación) de la forma $\langle \alpha^{2l}, \beta^{2n} \rangle$ con $n, l \geq 1$ o $\langle \alpha^{2l}, \alpha^{2t}\beta^{2n} \rangle$ con $n, l \geq 1$ y $0 \leq t \leq \frac{l}{2}$.

El automorfismo \mathcal{R} transforma al subgrupo $\langle \alpha^{2l}, \beta^{2n} \rangle$ en $\langle \alpha^{2n}, \beta^{2l} \rangle$, con lo que ambos subgrupos definen digrafos isomorfos. La ambigüedad anterior la evitamos imponiendo que $l \geq n \geq 1$.

Análogamente, $\mathcal{R}(\langle \alpha^{2l}, \alpha^{2t}\beta^{2n} \rangle) = \langle \beta^{2l}, \beta^{2t}\alpha^{2n} \rangle = \langle \alpha^{2l'}, \alpha^{2t'}\beta^{2n'} \rangle$, según las transformaciones descritas al principio de esta sección. Tomaremos en este caso $l \geq l'$, es decir, $n' \geq n$ que equivale a $\gcd(l, t) \geq n$, y en caso de igualdad tomaremos $t \geq t'$, es decir, $\frac{t}{n} \geq \left(\frac{t}{n}\right)^{-1} \pmod{\frac{l}{n}}$.

Para garantizar que el diagrama de Schreier es un digrafo línea restringido con girth ≥ 3 hay que excluir los subgrupos que contienen $\alpha^2, \beta^2, \alpha^2\beta^2$ o $\alpha^2\beta^{-2}$. Basta excluir los subgrupos que tienen $l = 1$, y los que tienen $n = 1$ y $t \leq 1$.

Denotaremos por $\text{TR}(2l, 2n, 2t)$ al digrafo $\mathcal{T}/\langle \alpha^{2l}, \alpha^{2t}\beta^{2n} \rangle$ con $l \geq 2, n \geq 1$ y $t = 0$ o $n \leq t \leq l/2$, exceptuando $n = 1$ y $t \leq 1$ y con las condiciones adicionales $\gcd l, t \geq n$ y si $\gcd l, t = n$ además $\frac{t}{n} \leq \left(\frac{t}{n}\right)^{-1} \pmod{\frac{l}{n}}$.

3.7. Subgrupos restantes de $\langle \alpha, \mathbf{pgg}^2 \rangle$

Consideremos un subgrupo $\Gamma < \langle \alpha, \mathbf{pgg}^2 \rangle$ que no sea subgrupo de \mathbf{pgg}^2 . Dado que \mathbf{pgg}^2 es subgrupo normal de $\langle \alpha, \mathbf{pgg}^2 \rangle$ y $\Gamma\mathbf{pgg}^2 = \langle \alpha, \mathbf{pgg}^2 \rangle$ entonces $|\Gamma : \Gamma \cap \mathbf{pgg}^2| = |\langle \alpha, \mathbf{pgg}^2 \rangle : \mathbf{pgg}^2| = 2$. Así, $\Gamma = \langle g, \Gamma \cap \mathbf{pgg}^2 \rangle$, con $g \in \alpha\mathbf{pgg}^2$.

Tomemos g igual al representante de la clase $\Gamma - \Gamma'$, $g = \alpha^{2i+1}\beta^{2j}$ con $i \geq 0$ mínimo. Entonces $g^2 = \alpha^{4i+2} \in \Gamma'$.

El automorfismo \mathcal{R} no puede identificar los subgrupos aquí definidos dado que $\mathcal{R}(\Gamma)$ contiene una potencia impar de β .

3.7.1. Subgrupos de índice infinito

Si Γ' está generado por un único elemento, entonces $\Gamma' = \langle g^2 \rangle$. En efecto, consideremos $\Gamma' = \langle \alpha^{2l} \beta^{2n} \rangle$, con $l > 0$. Obviamente, l divide a $2i + 1$ y, por tanto, $l \leq 2i + 1$. Entonces, $g^2 \alpha^{-2l} \beta^{-2n} = \alpha^{4i+2-2l} \beta^{-2n} \in \Gamma'$, lo que lleva a una contradicción a menos que $l = 2i + 1$. De este modo, $\Gamma = \langle \alpha^l \beta^{2j} \rangle$, con j impar, que tiene índice infinito en \mathbf{pgg} .

Los subgrupos que sólo difieren en el valor de j son conjugados. Para verlo, basta considerar que $\beta^j \Gamma \beta^{-j} = \langle \alpha^l \rangle$.

El normalizador de estos subgrupos es $\langle \alpha \rangle$ ya que $\beta^{-p} \Gamma \beta^p = \beta^{-p} \langle \alpha^l \rangle \beta^p = \langle \alpha^{l(-1)^p} \beta^{2p} \rangle$.

Debemos excluir el subgrupo con $l = 1$ para garantizar la condición de digrafo línea restringido con $\text{girth} \geq 3$.

Denotaremos por $\text{MB}(\infty, l)$ al digrafo $\mathcal{T} / \langle \alpha^l \rangle$ con $l \geq 3$ impar.

3.7.2. Subgrupos de índice finito

Sólo queda considerar el caso $\Gamma' = \langle \alpha^{2l}, \alpha^{2t} \beta^{2n} \rangle$ con $l, n \geq 1$ y $0 \leq t < l$. De nuevo, como l divide a $2i + 1$ un razonamiento similar al de la subsección anterior conduce a que $l = 2i + 1$. Así, $\Gamma = \langle g, \alpha^{2t} \beta^{2n} \rangle$. Sin embargo, $g^{-1} \alpha^{2t} \beta^{2n} g \alpha^{-2t} \beta^{-2n} = \alpha^{4t} \in \Gamma'$, de lo que se deriva necesariamente que l divide a $2t$. Teniendo en cuenta que $t < l$ y que l es impar, la única solución es $t = 0$.

Los subgrupos $\Gamma = \langle \alpha^l \beta^{2j}, \beta^{2n} \rangle$ que sólo difieren en el valor de j son conjugados. Para verlo, basta considerar que $\beta^j \Gamma \beta^{-j} = \langle \alpha^{l(-1)^j}, \beta^{2n} \rangle = \langle \alpha^l, \beta^{2n} \rangle$.

El índice de estos subgrupos en \mathbf{pgg} es $2nl$ y, por tanto, definen digrafos finitos.

El normalizador de los subgrupos anteriores es $\langle \alpha, \beta^n \rangle$ ya que $\alpha^{-1} \Gamma \alpha = \alpha^{-1} \langle \alpha^l, \beta^{2n} \rangle \alpha = \langle \alpha^l, \beta^{-2n} \rangle = \Gamma$ mientras que $\beta^{-p} \Gamma \beta^p = \beta^{-p} \langle \alpha^l, \beta^{2n} \rangle \beta^p = \langle \alpha^{l(-1)^p} \beta^{2p}, \beta^{2n} \rangle$ que sólo coincide con Γ si p es múltiplo de n .

Debemos excluir los subgrupos que tienen $l = 1$, y los que tienen $n = 1$ para garantizar la condición de digrafo línea restringido con $\text{girth} \geq 3$.

Denotaremos por $\text{KL}(l, 2n)$ al digrafo $\mathcal{T} / \langle \alpha^l, \beta^{2n} \rangle$ con $l \geq 3$ impar y $n \geq 2$.

Tanto en el caso de subgrupos con índice finito como en el caso infinito, Γ está generado (salvo conjugación) por elementos de la forma α^i y/o β^i . Si aplicamos \mathcal{I}_0 o \mathcal{I}_1 a dichos elementos, obtenemos los mismos o sus inversos. De

este modo, $\Gamma = \mathcal{I}_0(\Gamma) = \mathcal{I}_1(\Gamma)$ y el índice del digrafo \mathcal{T}/Γ es como mínimo 4.

3.8. Clasificación de los digrafos de índice no trivial con $\text{girth} \geq 3$

Los resultados de las secciones anteriores demuestran el siguiente

Teorema 5 *Los únicos digrafos línea restringidos conexos de índice no trivial y sin dígonos ni autolazos son:*

- los digrafos $\text{CL}(\infty, 2l, 2n)$ con $l \geq 2$ y $0 \leq n \leq l$;
- los digrafos $\text{TR}(2l, 2n, 2t)$ con $l \geq 2$, $n \geq 1$ y $t = 0$ o $n \leq t \leq l/2$, exceptuando $n = 1$ y $t \leq 1$ y con las condiciones adicionales $\text{gcd}(l, t) \geq n$, y si $\text{gcd}(l, t) = n$ además $\frac{t}{n} \leq \left(\frac{t}{n}\right)^{-1} \pmod{\frac{l}{n}}$;
- los digrafos $\text{MB}(\infty, l)$ con $l \geq 3$ impar;
- los digrafos $\text{KL}(l, 2n)$ con $l \geq 3$ impar y $n \geq 2$;

y todos ellos tienen un índice ≥ 4 .

□

En la Figura 3.3 se pueden observar dos ejemplos de digrafos línea restringidos de índice no trivial, uno de cada una de las dos familias de digrafos finitos. Claramente, los digrafos de las cuatro familias son distintos, tanto por la finitud como por el carácter bipartito. Los automorfismos de \mathcal{T} asociados a elementos de pgg^2 identifican vértices en el mismo conjunto independiente de \mathcal{T} , con lo que todos los digrafos de las familias CL y TR son bipartitos. Por el contrario, en todos los subgrupos que definen los digrafos de las familias MB y KL existe alguna potencia impar de α , lo que provoca la existencia de algún ciclo de longitud impar.

Sin embargo, como ya se ha mencionado, dentro de cada familia podría haber digrafos isomorfos por un isomorfismo que no sea cromático, si bien, su existencia implica la no unicidad (salvo permutación de colores) de la HCR-coloración.

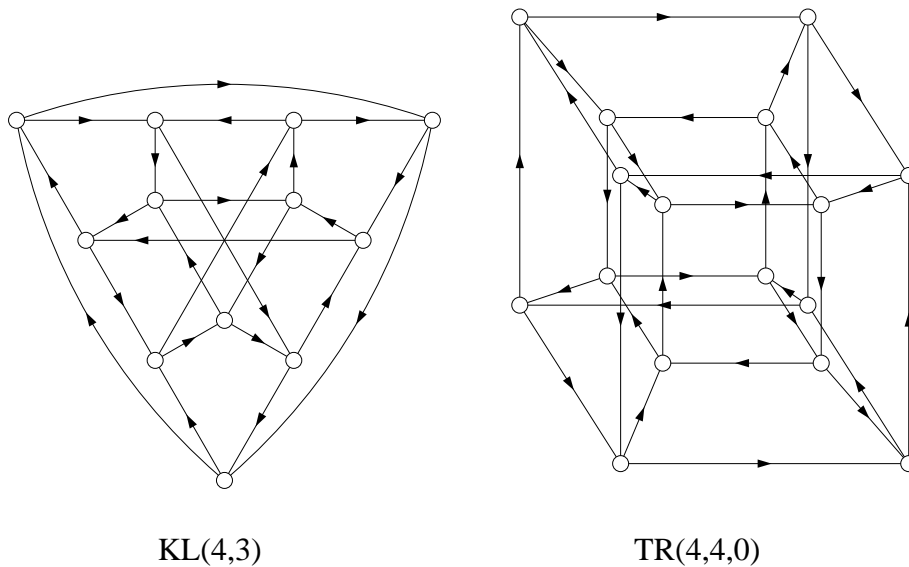


Figura 3.3: Digrafos TR(4, 4, 0) y KL(4, 3).

3.9. Unicidad de la HCR-coloración

Veamos la unicidad (salvo permutación de los colores) de la HCR-coloración de un digrafo línea restringido de índice no trivial sin dígonos ni autolazos. Ya que todo digrafo que cumple las condiciones citadas se obtiene como uno de los cocientes \mathcal{T}/Γ clasificados en la sección anterior, si existen varias orientaciones de un mismo grafo G_0 que cumplen dichas condiciones, debemos asociar un subgrupo Γ a cada una de ellas.

De entrada, siempre existen al menos 4 orientaciones isomorfas distintas, G_1 , $-G_1$, G_2 y $-G_2$, todas ellas digrafos línea restringidos. Sin embargo, puede existir una quinta orientación como digrafo línea restringido, G_3 .

Tal como se ha descrito al principio del capítulo, cada par de orientaciones no mutuamente inversas (por ejemplo G_1 y G_2) definen una HCR-coloración de las mismas de modo que $G_1 = F_0 \oplus F_1$ y $G_2 = F_0 \oplus (-F_1)$, donde F_0 y F_1 son los 1-factores asociados a las permutaciones α y β que, a su vez, definen la HCR-coloración de G_1 . Lo anterior equivale a afirmar que ninguna estrella de G_0 presenta la misma orientación ni orientaciones inversas en G_1 y en G_2 , es decir, que sólo dos de las ramas de dicha estrella mantienen su orientación

al pasar de G_1 a G_2 . De modo análogo, en caso de existir la orientación G_3 , podemos encontrar una segunda HCR–coloración esencialmente distinta de la anterior (es decir, no sólo difieren en una permutación de colores) dada por las permutaciones γ y δ de modo que $G_1 = F_2 \oplus F_3$ y $G_3 = F_2 \oplus (-F_3)$.

Considerando finalmente la HCR–coloración que definen las orientaciones G_2 y G_3 tenemos que no debe existir ninguna estrella de G_0 tal que tenga en G_2 y en G_3 la misma orientación u orientaciones inversas. Este hecho obliga a que haya exactamente una rama en cada estrella que presente la misma orientación en G_1 , G_2 y G_3 . Tenemos entonces una 4–rama–coloración de G_0 cuyos colores se obtienen como producto cartesiano de los colores de las dos HCR–coloraciones consideradas.

Una consecuencia de lo anterior es que si tomamos un ciclo de F_0 , dado que todos los arcos son de color 0, la rama–coloración de G_0 fuerza que dichos arcos se colorean alternativamente con los colores 2 y 3. De otro modo, si $\alpha(x) = \gamma(x)$ entonces

$$\begin{aligned}\alpha(x) &= \gamma(x) \\ \alpha^2(x) &= \delta\gamma(x) \\ \alpha^3(x) &= \gamma\delta\gamma(x) \\ \alpha^4(x) &= \delta\gamma\delta\gamma(x) = x,\end{aligned}$$

la última igualdad debida a las relaciones de conmutación HCR.

Repetiendo el razonamiento para las ramas coloreadas con los restantes 3 colores se llega a la misma conclusión, $\alpha^4(x) = \beta^4(x) = \gamma^4(x) = \delta^4(x) = x$ para todo vértice x . Para que esto sea posible, los subgrupos Γ_1 , Γ_2 y Γ_3 de \mathbf{pgg} que definen respectivamente los digrafos cociente G_1 , G_2 y G_3 deben contener los elementos α^4 y β^4 . El único caso en el que se cumple lo anterior es para el subgrupo $\langle \alpha^4, \beta^4 \rangle$. Así, $G_1 \cong G_2 \cong G_3 \cong \text{TR}(4, 4, 0)$. Como consecuencia de lo anterior, el número de orientaciones posibles como digrafos línea restringidos es exactamente 4 para las cuatro familias de digrafos excepto para $\mathcal{UTR}(4, 4, 0)$ en el que pueden existir más de 4. Además, de existir más de 4 orientaciones, todas son isomorfas a $\mathcal{T} / \langle \alpha^4, \beta^4 \rangle$.

Si existiese una orientación adicional, G_4 , distinta de G_1 , G_2 , G_3 y de sus inversas, cada estrella de G_1 debería orientarse de manera distinta en cada uno de los 8 digrafos (incluyendo $-G_4$, que también es una orientación como digrafo línea restringido). Sin embargo, cualquiera de las orientaciones de la estrella debe consistir en dos arcos incidentes hacia el vértice y los otros dos incidentes desde el mismo, lo que sólo es posible realizar de $\binom{4}{2} = 6$ maneras distintas.

Los resultados anteriores permiten enunciar el siguiente

Teorema 6 *Todo digrafo línea restringido conexo de índice no trivial sin dígonos ni autolazos tiene índice 4 salvo $\text{TR}(4, 4, 0)$ que tiene índice 6. Además todas las posibles orientaciones de sus grafos subyacentes como digrafos línea restringidos son isomorfas.*

Demostración.- Los razonamientos anteriores demuestran el caso general.

En el caso del digrafo $\text{TR}(4, 4, 0)$, tenemos 4 orientaciones isomorfas, pero pueden existir hasta 6, debido a la no unicidad de la HCR-coloración.

El grafo $\mathcal{UTR}(4, 4, 0)$, o su digrafo correspondiente $\mathcal{UTR}^*(4, 4, 0)$, corresponde a un cubo 4-dimensional y se puede construir como el diagrama de Cayley del grupo \mathbf{Z}_2^4 con los generadores $\{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$. El grupo de automorfismos del digrafo anterior, que coincide con el del grafo, es $\mathbf{Z}_2 \wr S_4$, que tiene 384 elementos.

Por otra parte, el digrafo $\text{TR}(4, 4, 0)$ es isomorfo a la conjunción $B(2, 2) \otimes C_4$, que, a su vez, es el digrafo línea de $K_2^\circ \otimes C_4$. El grupo de automorfismos de este último digrafo, que es isomorfo al de $\text{TR}(4, 4, 0)$, es $\mathbf{Z}_2 \wr \mathbf{Z}_4$, que tiene sólo 64 elementos.

El isomorfismo entre $\text{TR}(4, 4, 0)$ y $B(2, 2) \otimes C_4$ se puede obtener con la siguiente construcción. Construimos el digrafo $B(2, 2)$ tomando como conjunto de vértices los polinomios $\mathbf{Z}_2[X]/(X^2 + 1)$ de modo que el vértice p es adyacente hacia los vértices Xp y $Xp + 1$. Análogamente, C_4 puede construirse tomando el mismo conjunto de vértices y el vértice p es adyacente hacia $Xp + 1$.

Así, la conjunción $B(2, 2) \otimes C_4$ puede construirse tomando como conjunto de vértices los polinomios de dos variables $\mathbf{Z}_2[X, Y]/(X^2 + 1, Y^2 + 1)$ de modo que el vértice p es adyacente hacia los vértices $Xp + 1$ y $Xp + Y + 1$.

Finalmente, el grafo $\mathcal{UTR}(4, 4, 0)$ se construye tomando como conjunto de vértices $\mathbf{Z}_2[X, Y]/(X^2 + 1, Y^2 + 1)$ de modo que el vértice p es adyacente a $p + 1$, $p + X$, $p + Y$ y $p + XY$.

La aplicación Φ que asigna a cada polinomio de 2 variables, p , el polinomio $q(X, Y) = p(X, Y + 1)X^{p(1,0)}$ es un isomorfismo de grafos que transforma $\mathcal{U}(B(2, 2) \otimes C_4)$ en $\mathcal{UTR}(4, 4, 0)$, utilizando las construcciones dadas.

Como $B(2, 2) \otimes C_4$ es un digrafo línea restringido, su imagen por Φ también es una orientación de $\mathcal{UTR}(4, 4, 0)$ como digrafo línea restringido. Según los resultados de los párrafos anteriores dicha orientación debe ser isomorfa a $\text{TR}(4, 4, 0)$. \square

Contrariamente a lo que podría parecer a simple vista, además de los 32 automorfismos cromáticos de $\text{TR}(4, 4, 0)$ (16 automorfismos HCR-coloreados, y

otros 16 que intercambian los colores de la HCR–coloración) existen automorfismos que dejan fijo un arco, elevando a 64 el número total de automorfismos de $\text{TR}(4, 4, 0)$.

La existencia de tales automorfismos queda clara si en la representación tri-dimensional del digrafo $\text{TR}(4, 4, 0)$, mostrada en la Figura 3.3, consideramos la simetría respecto a alguno de los planos bisectores del cubo exterior que contiene 8 vértices del digrafo. El automorfismo que define la simetría anterior deja invariantes 8 arcos del digrafo, que corresponden exactamente a dos subdigrafos fundamentales no adyacentes.

3.10. ‘Embeddings’ naturales

Las cuatro familias de digrafos obtenidas en las secciones anteriores, $\text{CL}(\infty, 2l, 2n)$, $\text{TR}(2l, 2n, 2t)$, $\text{MB}(\infty, l)$ y $\text{KL}(l, 2n)$, pueden ‘dibujarse’ de manera natural en un cilindro, un toro, una banda de Möbius y a una botella de Klein, respectivamente. De un modo más preciso, los grafos subyacentes a los digrafos anteriores son isomorfos a los 1–esqueletos de CW–complejos bidimensionales homeomorfos a las superficies anteriores (ver [23]).

Lo anterior es fácilmente verificable construyendo manualmente los dibujos de dichos digrafos.

Para obtener una demostración formal de este hecho, se debería considerar lo siguiente.

En primer lugar, considerando la acción natural del grupo \mathbf{pgg} en el plano \mathbf{R}^2 , puede verse que dicho plano es un \mathbf{pgg} –complejo bidimensional (ver [8]) cuyo 1–esqueleto es isomorfo al grafo \mathcal{UT} .

Tomemos ahora un digrafo determinado, \mathcal{T}/Γ . Los elementos del subgrupo Γ de \mathbf{pgg} no dejan invariante ninguna célula del complejo, excepto la identidad. Así, \mathbf{R}^2/Γ es un CW–complejo bidimensional con 1–esqueleto \mathcal{UT}/Γ .

Para distinguir el tipo de superficie a que corresponde el complejo \mathbf{R}^2/Γ , debemos considerar que su grupo fundamental es isomorfo a Γ .

Para los digrafos $\text{TR}(2l, 2n, 2t)$, el subgrupo Γ es isomorfo a \mathbf{Z}^2 , es decir, el grupo fundamental de un toro. En el caso de los digrafos $\text{KL}(l, 2n)$, el subgrupo Γ es isomorfo al subgrupo $\langle \alpha, \beta^2 \rangle$, es decir, el grupo fundamental de una botella de Klein. Finalmente, para diferenciar los casos $\text{CL}(\infty, 2l, 2n)$ y $\text{MB}(\infty, l)$, en los que Γ es isomorfo a \mathbf{Z} , debemos observar la orientabilidad de la superficie.

Capítulo 4

Rama–conectividad de los grafos subyacentes a los digrafos línea

La estructura local de los digrafos línea restringidos nos ha permitido obtener en los capítulos anteriores algunas propiedades importantes de los mismos y de sus grafos subyacentes.

Este capítulo está dedicado al estudio de la conectividad de los grafos subyacentes a digrafos línea restringidos. En particular, se obtienen resultados sobre la rama–conectividad de tales grafos cuando el digrafo línea es conexo, regular y no tiene dígonos ni autolazos.

La condición de Heuchenne de los digrafos línea aplicada a los digrafos línea restringidos tiene como consecuencia la existencia de recorridos no dirigidos de longitud 4 que contienen un arco dado cualquiera. Dichos recorridos sólo pueden ser ciclos (es decir, recorridos que no repiten vértices) si consideramos digrafos sin dígonos ni autolazos.

Desde el punto de vista de la rama–conectividad del grafo subyacente, dada la rama $x - y$ los ciclos de longitud 4 citados aseguran caminos alternativos entre los vértices x e y si la rama anterior es eliminada.

Las restricciones impuestas al digrafo línea son razonables si se tiene en cuenta que tanto la presencia de dígonos y autolazos como la no regularidad del digrafo disminuyen generalmente el grado mínimo del grafo subyacente, reduciendo su rama–conectividad.

Si G es un digrafo línea restringido, conexo y sin dígonos ni autolazos y G_0 es su grafo subyacente, es fácil verificar que $\lambda_{G_0} \geq 2\lambda_G$. Para verlo, consideremos que $F \subset E(G_0)$ es un conjunto de corte mínimo de ramas de G_0 no trivial, es

decir, que divide a G_0 en dos componentes conexas conteniendo cada una de ellas como mínimo 2 vértices. Sean x e y respectivamente vértices de cada una de las dos componentes conexas. Dado que la rama-conectividad de G es λ_G , existen como mínimo λ_G caminos disjuntos desde x hacia y y otros tantos desde y hacia x . Para desconectar ambos vértices en el grafo G_0 hace falta cortar los $2\lambda_G$ caminos que los conectan. Esto supone que F tiene al menos una rama de cada uno de los caminos citados y ninguna de ellas coincide. En efecto, no puede haber coincidencias ya que, por una parte, caminos en el mismo sentido son disjuntos y, por otra, una misma rama no puede corresponder a dos arcos en sentidos opuestos, ya que supondría la existencia de dígonos en G .

Utilizando la vértice-conectividad de G y dado que $\kappa_G \geq \lambda_G$ podemos afirmar que $\lambda_{G_0} \geq 2\kappa_G$. En este capítulo, veremos que utilizando la estructura local de los digrafos línea restringidos basta exigir $\kappa_G \geq 2$ para que G_0 tenga rama-conectividad máxima y, en algunos casos, que G_0 sea super-rama-conexo.

En la bibliografía se pueden encontrar diversos resultados que acotan inferiormente la rama-conectividad de los grafos (ver [2], [24], [28] y [30]). Sin embargo, las técnicas empleadas en este capítulo conducen a buenos resultados sin exigir prácticamente ninguna condición salvo la de que el grafo en cuestión sea el grafo subyacente a un digrafo línea restringido conexo.

4.1. Conjuntos de corte mínimos y subgrafos fundamentales

Para evaluar la rama-conectividad de un grafo basta considerar el tamaño de los conjuntos de corte de ramas mínimos, es decir, tales que ninguno de sus subconjuntos sea a su vez conjunto de corte del grafo.

Un conjunto de corte (de ramas) mínimo F de un grafo G_0 divide a éste en exactamente dos componentes conexas que denotamos P y Q . En efecto, de existir una tercera componente conexa R , y dado que G es conexo, existiría una rama $e \in F$ con un extremo en R y el otro en una de las componentes P o Q . Obviamente, de ser así, llegaríamos a la conclusión de que el conjunto $F \setminus \{e\}$ es también conjunto de corte de G_0 . Por otra parte, cada rama de F tiene un extremo en P y el otro en Q . De lo contrario, $F \setminus \{e\}$ sería de nuevo conjunto de corte de G_0 .

En cada camino de G_0 con extremos en distinta componente conexa de $G_0 \setminus F$ debe existir al menos una rama de F . En particular, esto es aplicable a los caminos de G_0 entre los vértices x e y , tales que la rama $x - y$ esté en F ,

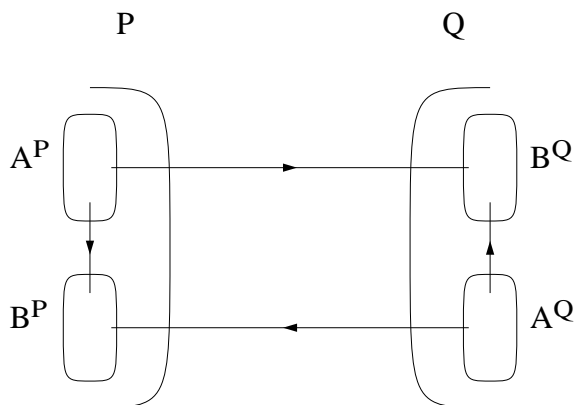


Figura 4.1: Fallos necesarios para cortar todos los caminos alternativos dados por la condición de Heuchenne, en función de los parámetros α y β .

caminos que denominamos *alternativos*.

Una técnica para construir conjuntos de corte de ramas es considerar inicialmente $F = \{x - y\}$ e ir añadiendo a F las ramas necesarias para cortar todos los caminos alternativos a $x - y$.

Consideremos de ahora en adelante que G es un digrafo línea restringido d -regular sin dígonos ni autolazos. Dada una rama $x - y$ del grafo G_0 sea $\mathcal{U}(A_0 \times B_0)$ el subgrafo fundamental al que pertenece. Tenemos entonces los siguientes caminos alternativos a la rama considerada $x - y$:

$$x - b_j - a_i - y, \quad i, j = 1, \dots, d - 1$$

donde $a_i \in A \setminus \{x\}$ y $b_j \in B \setminus \{y\}$.

En general, cada conjunto de corte mínimo F es la unión (disjunta cuando no hay dígonos) de conjuntos de corte mínimos de algunos subgrafos fundamentales que componen a G_0 . En efecto, cada rama $x - y$ de F pertenece a un subgrafo fundamental de G_0 , $\mathcal{U}(A_0 \times B_0)$ con $x \in A$ e $y \in B$. Dado que x e y están en distinta componente conexa de $G_0 \setminus F$, por ejemplo $x \in P$ e $y \in Q$, en el caso más general tanto A como B tienen una parte en P y otra en Q , como se observa en la Figura 4.1. Tomemos concretamente $A^P = A \cap P$, $A^Q = A \cap Q$ y del mismo modo $B^P = B \cap P$, $B^Q = B \cap Q$. Obviamente, F debe contener todas las ramas que conectan A^P con B^Q y B^P con A^Q . Siendo $\alpha = |A^P|$ y $\beta = |B^P|$ y dado que G es un digrafo d -regular, tenemos también $|A^Q| = d - \alpha$ y $|B^Q| = d - \beta$. Así, F contiene exactamente $f(\alpha, \beta) = \alpha(d - \beta) + \beta(d - \alpha)$ ramas del subgrafo fundamental considerado (incluida la rama $x - y$). Todo

ello con $1 \leq \alpha \leq d$ y $0 \leq \beta \leq d - 1$, ya que sabemos a priori que $x \in A^P$ e $y \in B^Q$.

Para los valores permitidos de α y β , podemos afirmar que $f(\alpha, \beta) \geq d$ y que el valor mínimo se alcanza con $\alpha = 1$ y $\beta = 0$, o bien con $\alpha = d$ y $\beta = d - 1$. Para verlo anterior, basta observar que la función f es armónica y entonces tiene los extremos en el contorno. En este caso, sólo hay que calcular el valor de f en las cuatro esquinas del rectángulo en que está definida.

Nótese que en la solución considerada, las ramas de F en el subgrafo fundamental $\mathcal{U}(A_0 \times B_0)$ tienen todas el mismo vértice extremo en la componente P o el mismo extremo en la componente Q . En ambos casos, dichas ramas corresponden a un conjunto de corte trivial del digrafo G .

Volviendo a la estructura del conjunto de corte F tenemos que, en general, dicho conjunto es la unión de conjuntos de corte mínimos de $n \geq 1$ subgrafos fundamentales. Así:

$$|F| = \sum_{i=1}^n f(\alpha_i, \beta_i) \geq nd,$$

donde $f(\alpha_i, \beta_i)$ es el número de ramas de F que se hallan en el subgrafo fundamental $\mathcal{U}(A_i \times B_i)$. Dado que el valor máximo que puede alcanzar la rama-conectividad de G_0 es su grado mínimo, $2d$, los conjuntos de corte con ramas en más de un subgrafo fundamental ya no determinan la conectividad.

Consideremos la existencia de conjuntos de corte con $n = 1$ y con menos de $2d$ ramas. Como ya se ha comentado anteriormente, el valor mínimo de $f(\alpha, \beta)$ es d y se obtiene cuando $\alpha = 1$ y $\beta = 0$ o cuando $\alpha = d$ y $\beta = d - 1$. Teniendo en cuenta que el digrafo G es conexo, todo conjunto de corte de arcos del mismo debe tener como mínimo un arco que entre y otro que salga de cada componente conexa en que se divide G . De aquí podemos deducir que ninguno de los dos conjuntos de ramas que minimizan $f(\alpha, \beta)$ constituyen un conjunto de corte del grafo G_0 .

Despreciando ambas soluciones, el mínimo de $f(\alpha, \beta)$ es $2d - 2$ y se alcanza cuando $\alpha = 1$ y $\beta = 1$ o cuando $\alpha = d - 1$ y $\beta = d - 1$.

Los razonamientos anteriores demuestran el siguiente resultado:

Teorema 7 *La rama-conectividad del grafo G subyacente a un digrafo línea restringido d -regular sin dígonos ni autolazos conexo es como mínimo $2d - 2$.*

□

En la siguiente sección se construyen ejemplos de grafos con rama-conectividad exactamente $2d - 2$, lo que demuestra que el teorema anterior recoge el mejor resultado posible.

4.2. Construcción de grafos con $\lambda = 2d - 2$

Construyamos digrafos G' conexos, d -regulares con $d \geq 2$ y sin dígonos ni autolazos tales que los grafos subyacentes a sus digrafos línea $G_0 = \mathcal{ULG}'$ tengan rama-conectividad exactamente $\lambda = 2d - 2$. Para ello, tomemos dos digrafos cualesquiera, G'_1 y G'_2 , d -regulares conexos, sin dígonos ni autolazos y con $d \geq 2$. Consideremos un arco de G'_1 , (y_0, z_0) , y $d - 1$ arcos de G'_2 no incidentes desde ni hacia un mismo vértice, (y_i, z_i) con $i = 1, \dots, d - 1$. Substituyamos ahora los d arcos citados por los arcos (y_i, x) y (x, z_i) con $i = 0, \dots, d - 1$, donde x es un nuevo vértice del digrafo en construcción G' . La transformación anterior se muestra en la Figura 4.2. El digrafo G' , cumple las condiciones exigidas al principio por las razones siguientes:

- G' es también d -regular ya que $d^+(x) = d^-(x) = d$ y los grados de los vértices de G'_1 y G'_2 no han sido modificados.
- G' es conexo ya que cada arco suprimido en G'_1 y en G'_2 se transforma en un camino de longitud 2 que conecta sus extremos y, por tanto, mantiene los caminos existentes en G'_1 y G'_2 . Además, aparecen caminos entre los vértices de G'_1 y G'_2 y viceversa, a través del nuevo vértice x .
- La transformación de arcos en caminos de longitud 2 descrita no genera ni dígonos ni ramas paralelas dado que los extremos de los arcos seleccionados son todos distintos.
- Las ramas correspondientes a los $d - 1$ arcos $(y_0, x) \rightarrow (x, z_i)$ e $(y_i, x) \rightarrow (x, z_0)$ de \mathcal{LG}' constituyen un conjunto de corte del grafo $G_0 = \mathcal{ULG}'$.

□

Se puede demostrar también el proceso de construcción descrito genera todos los grafos posibles que cumplen las condiciones dadas al principio de esta sección. En efecto, según los resultados obtenidos en la sección anterior, para conseguir que la rama-conectividad del grafo \mathcal{ULG}' sea exactamente $\lambda = 2d - 2$ debe existir un conjunto de corte de ramas F correspondiente a los arcos $e_0 \rightarrow f_i$ y $f_0 \rightarrow e_i$ con $i = 1, \dots, d - 1$ y siendo $e_0 \rightarrow f_0$ también un arco de \mathcal{LG}' . Nótese

que ésta es justamente la forma del conjunto de corte obtenido para $\alpha = \beta = 1$ tomando $A^P = \{e_0\}$, $A^Q = \{e_1, \dots, e_{d-1}\}$, $B^P = \{f_0\}$, $B^Q = \{f_1, \dots, f_{d-1}\}$.

Las ramas correspondientes en G_0 a los arcos considerados forman un subgrafo fundamental que, como se describió en el Capítulo 2, le corresponde un vértice x de G' . Basta considerar ahora $e_i = (y_i, x)$ y $f_i = (x, z_i)$ con $i = 0, \dots, d-1$ para tener la construcción propuesta al principio de la sección. Nótese finalmente que los vértices $y_0, \dots, y_{d-1}, z_0, \dots, z_{d-1}$ y x son distintos ya que de lo contrario G' presentaría dígonos, autolazos o arcos paralelos.

Sólo falta probar que la transformación inversa que consiste en eliminar el vértice x de G' y añadir los arcos (y_i, z_i) con $0 \leq i \leq d-1$ conduce necesariamente a la partición de $G' \setminus \{x\}$ en dos componentes G'_1 y G'_2 entre las que no existe arco ninguno. Consideremos ahora los conjuntos de vértices $P' = P \setminus \{e_0, f_0\}$ y $Q' = Q \setminus \{e_i, f_i\}_{i=1, \dots, d-1}$ de $\mathcal{L}G'$. La supresión de los vértices permite afirmar que no existe ningún arco que conecta vértices de P' con vértices de Q' ya que, en caso contrario, F no sería un conjunto de corte. De este modo, ambos conjuntos definen conjuntos de arcos de G' que a su vez inducen subdigrafos disjuntos en vértices, G'_1 y G'_2 , que contienen todos los vértices de G' salvo x .

Nótese que tanto G' como su digrafo línea tienen vértice conectividad 1 ya que $y_0 \rightarrow x$ y también $x \rightarrow z_0$ rompen la conectividad fuerte de $\mathcal{L}G'$ y x rompe incluso la conectividad débil de G' . En la Figura 4.3 se muestra un ejemplo de grafo construido por el método anterior para $d = 3$ y un conjunto de corte de $2d - 2$ ramas.

4.3. Digrafos κ -conexos

En la Sección 4.1 obtuvimos una cota inferior de la rama-conectividad del grafo $G_0 = \mathcal{U}LG'$ considerando entre otras restricciones que G' fuese conexo. En esta sección se obtienen mejores resultados partiendo de una vértice-conectividad de $G = \mathcal{L}G'$ dada.

Sea κ la vértice-conectividad del digrafo G y sea F un conjunto de corte de ramas mínimo de su grafo subyacente G_0 . Denotando por P y Q las dos componentes conexas de $G_0 \setminus F$, podemos dividir F en dos subconjuntos F^+ y F^- que contienen las ramas correspondientes a arcos que van desde P hacia Q y al revés, respectivamente. Claramente, los arcos correspondientes a F^+ constituyen un conjunto de corte del digrafo G , al igual que los arcos correspondientes a F^- .

Por otra parte, todo conjunto de vértices V^+ tal que cada rama de F^+ sea incidente a exactamente uno de dichos vértices es un conjunto de corte del

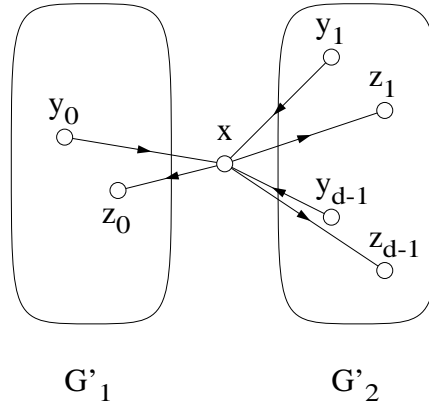


Figura 4.2: Construcción del digrafo G' que da lugar a los grafos con conectividad $2d - 2$.

digrafo G o bien contiene todos los vértices de P o de Q . En efecto, al suprimir de G los vértices de V^+ se suprimen todos los arcos incidentes desde y hacia dichos vértices y, en particular, se suprimen todos los arcos correspondientes a F^+ . Así, o bien el digrafo queda desconectado, con lo que V^+ tiene como mínimo κ vértices, o bien al suprimir los vértices se ha suprimido toda la componente P o Q .

En este último caso, todo vértice de la componente suprimida (P o Q) debe ser incidente a alguna rama de F , con lo que F tiene como mínimo tantas ramas como vértices tiene la componente suprimida. Más aún, F debe contener todas las ramas que salen de dicha componente. Si la componente conexa suprimida tiene n vértices, F tendrá como mínimo $n(2d - n + 1)$ ramas.

Nótese que con $n < k$ el único modo en el que F no supera las $2d$ ramas es con $n = 1$, caso en el que F consta de todas las ramas incidentes a un vértice dado, esto es, F es un conjunto de corte trivial de G . Por tanto, o bien F contiene un conjunto de corte trivial o bien V^+ y V^- tienen como mínimo κ vértices.

Así, para evaluar la rama-conectividad del grafo G_0 , debemos imponer al conjunto F la condición de que no exista ningún conjunto de menos de κ vértices que sea incidente a todas las ramas en F^+ o que sea incidente a las ramas de F^- .

Como ya se ha explicado en la Sección 4.1, F está formado por ramas en n

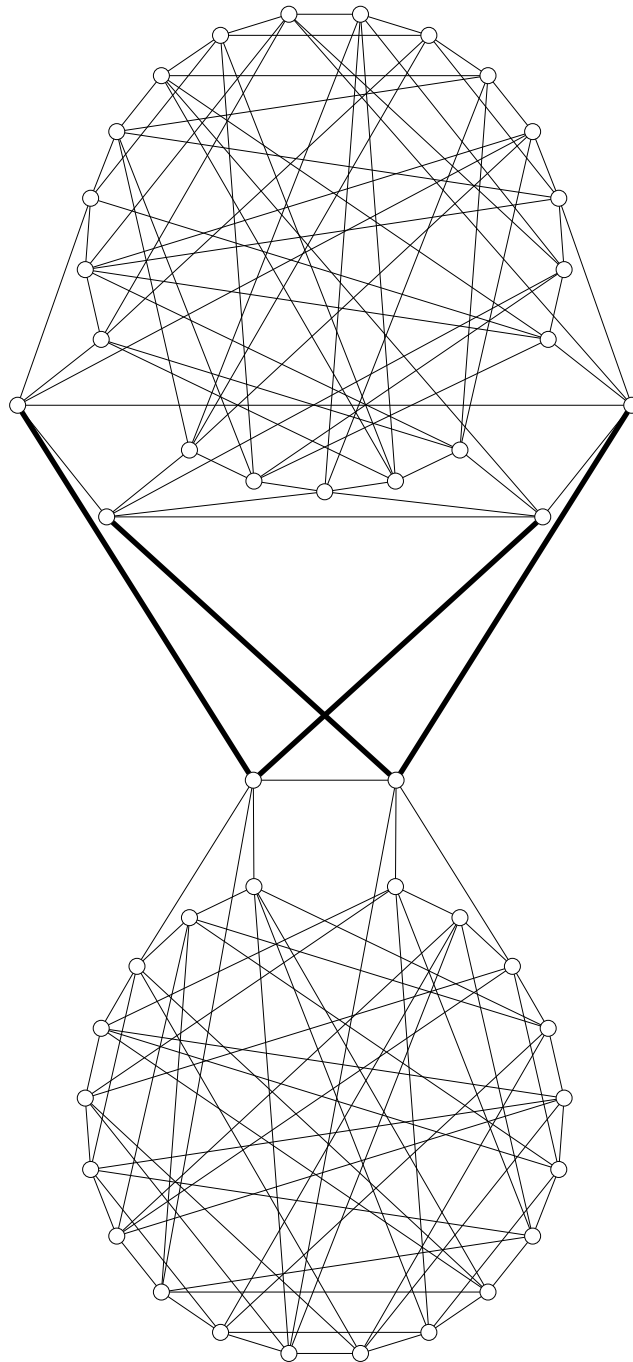


Figura 4.3: Ejemplo de grafo construido a partir de un digrafo 3-regular y un conjunto de corte de 4 ramas del mismo.

subgrafos fundamentales de G_0 distintos, y para que F contenga menos de $2d$ ramas es preciso que $n = 1$.

Si Añadimos ahora la restricción de que la conectividad del digrafo G es $\kappa \geq 2$, tenemos que V^+ y V^- deben tener como mínimo κ vértices. Concretamente, esto supone que $\alpha, d - \beta \geq \kappa$ y $\beta, d - \alpha \geq \kappa$, respectivamente.

El nuevo valor mínimo de $f(\alpha, \beta)$ es $2\kappa(d - \kappa)$ y se alcanza cuando $\alpha = \beta = \kappa$ o cuando $\alpha = \beta = d - \kappa$. Estas soluciones sólo son posibles si $d \geq 2\kappa$, en cuyo caso $2\kappa(d - \kappa) \geq 2d$ (la igualdad ocurre únicamente para $\kappa = 2$ y $d = 4$).

De este modo, los resultados anteriores permiten enunciar el siguiente

Teorema 8 *El grafo G_0 subyacente a un digrafo línea restringido d -regular, κ -conexo con $\kappa \geq 2$, sin dígonos ni autolazos tiene rama-conectividad máxima, $\lambda = 2d$.*

□

4.4. Super-rama-conectividad

Utilizando las técnicas anteriores podemos encontrar condiciones para que el grafo G_0 subyacente a un digrafo línea restringido d -regular, κ -conexo sin dígonos ni autolazos sea super-rama-conexo. Para obtener este resultado basta asegurar, por una parte, que la rama-conectividad de G_0 sea máxima ($2d$) y, por otra, que los únicos conjuntos de corte con $2d$ ramas son los triviales. Para asegurar la primera condición, según los resultados obtenidos en la sección anterior, basta tomar $\kappa \geq 2$.

Analicemos ahora la segunda condición. Un conjunto de corte trivial está formado por todas las ramas incidentes a un determinado vértice x . Dado que x está exactamente en dos subgrafos fundamentales, $\mathcal{U}(A_1 \times B_1)$ y $\mathcal{U}(A_2 \times B_2)$, el conjunto de corte trivial tiene ramas en ambos subgrafos. De este modo, siguiendo la notación de los apartados anteriores, para que F sea un conjunto de corte trivial, necesariamente $n = 2$.

Según lo anterior, si encontramos conjuntos de corte con $2d$ ramas para el caso $n = 1$, el grafo G_0 no es super-rama-conexo. El número de ramas de F en el caso $n = 1$ sabemos que es como mínimo $2\kappa(d - \kappa)$, y un conjunto de corte tal sólo puede existir si $d \geq 2\kappa$. Para que F sea un conjunto de corte no trivial que rompa la super-rama-conectividad de G_0 debemos tener $2\kappa(d - \kappa) = 2d$,

es decir, $d = \frac{k^2}{k-1}$. El valor de d sólo es un número entero para $k = 2$ obteniendo $d = 4$.

Dado que el número mínimo de ramas de F es nd , sólo podemos encontrar conjuntos de corte no triviales para $n = 1, 2$. Únicamente falta estudiar la existencia de conjuntos de corte no triviales con $2d$ ramas en el caso $n = 2$.

Si $n = 2$, el número de ramas de F es

$$f(\alpha_1, \beta_1) + f(\alpha_2, \beta_2),$$

donde α_1, α_2 , toman valores entre 1 y d , β_1 y β_2 toman valores entre 0 y $d-1$ y todo conjunto de vértices V^+ o V^- (ver sección anterior) tienen como mínimo κ vértices.

La última condición puede expresarse como

$$\begin{aligned} \min(\alpha_1, d - \beta_1) + \min(\alpha_2, d - \beta_2) &\geq \kappa \\ \min(d - \alpha_1, \beta_1) + \min(d - \alpha_2, \beta_2) &\geq \kappa \end{aligned}$$

Dado que $f(\alpha, \beta) \geq d$, las únicas soluciones de $|F| = 2d$ cumplen

$$f(\alpha_1, \beta_1) = f(\alpha_2, \beta_2) = d$$

Usando los cálculos efectuados en la Sección 4.1 tenemos que $f(\alpha, \beta) = d$ cuando $\alpha = 1$ y $\beta = 0$ o cuando $\alpha = d$ y $\beta = d-1$. Los valores citados de α y β no satisfacen las condiciones del número de vértices de V^+ y V^- , con lo que no obtenemos ningún conjunto de corte con $2d$ ramas.

En el caso $d = 2$ existe una solución adicional de $f(\alpha, \beta) = 2$, que es $\alpha = \beta = 1$. Tomando $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = 1$ en el caso $\kappa = d = 2$ se satisfacen todas las condiciones anteriores.

En conclusión, sólo es posible obtener conjuntos de corte no triviales con $2d$ ramas en los casos $\kappa = 2$ y $d = 2, 4$, lo que demuestra el siguiente

Teorema 9 *El grafo G_0 subyacente a un digrafo línea restringido d -regular, κ -conexo sin dígonos ni autolazos es super-rama-conexo para $\kappa \geq 2$ salvo en los casos $\kappa = 2, d = 2, 4$ en el que sólo se puede asegurar rama-conectividad máxima ($\lambda = 2d$).*

□

De nuevo, el resultado anterior es el mejor posible ya que en la siguiente sección se construyen grafos no super-rama-conexos en los casos $\kappa = 2$ y $d = 2, 4$.

4.5. Construcción de los grafos no super-rama-conexos

La construcción de digrafos G' 2-conexos, 2 y 4-regulares y sin dígonos ni autolazos tales que los grafos subyacentes a sus digrafos línea no sean super-rama-conexos, es similar a la construcción de los ejemplos de la Sección 4.2. Consideremos dos digrafos con arco-conectividad 2, sin dígonos ni autolazos y d -regulares, G'_1 y G'_2 , con $d = 2$ o $d = 4$ según sea el caso. Consideremos a su vez dos arcos con extremos distintos en cada uno de los digrafos, (x_1, y_1) y (z_1, t_1) en G'_1 y (x_2, y_2) y (z_2, t_2) en G'_2 .

En el caso $d = 2$ basta substituir los arcos anteriores por los nuevos arcos (x_1, a) , (a, y_1) , (z_1, b) , (b, t_1) y (x_2, a) , (a, y_2) , (z_2, b) , (b, t_2) , donde a y b son nuevos vértices del digrafo en construcción. El digrafo G' obtenido cumple los mismos requisitos exigidos a G'_1 y a G'_2 por las siguientes razones:

- G' es 2-regular ya que los vértices añadidos, a y b , tienen grados de entrada y de salida 2 y los grados de los vértices de G'_1 y G'_2 no han sido modificados.
- G' tiene arco-conectividad 2. Para ello, observemos primero que los arcos añadidos definen caminos alternativos de longitud 2 a los arcos suprimidos. La supresión de un arco de G'_1 no desconecta al digrafo G' ya que aquel tiene arco-conectividad 2, y lo mismo ocurre con los arcos de G'_2 . Finalmente, la supresión de uno de los nuevos arcos de G' tampoco desconecta a los digrafos G'_1 y G'_2 porque supone como mucho destruir uno de sus arcos originales, ni desconecta uno de otro por existir al menos dos caminos arco-disjuntos entre ambos digrafos.
- El proceso de construcción descrito no produce dígonos ni autolazos ni tampoco arcos paralelos ya que los arcos de G' substituidos no tienen vértices extremos comunes.

Véase que en el grafo $G_0 = \mathcal{UL}G'$ las ramas

$$\begin{array}{cc} (x_1, a) - (a, y_2) & (z_1, b) - (b, t_2) \\ (x_2, a) - (a, y_1) & (z_2, b) - (b, t_1) \end{array}$$

forman un conjunto de corte no trivial de $2d$ ramas, que demuestra que el grafo construido no es super-rama-conexo.

Finalmente, para el caso $d = 4$ los nuevos arcos a añadir para construir el digrafo G' son (x_1, a) , (a, y_1) , (z_1, a) , (a, t_1) y (x_2, a) , (a, y_2) , (z_2, a) , (a, t_2) .

Razonamientos análogos a los realizados en el caso $d = 2$ nos llevan de nuevo a demostrar que G' cumple las condiciones impuestas a G'_1 y a G'_2 . Ahora, el conjunto de corte de $2d$ ramas no trivial que rompe la super-rama-conectividad del grafo $G_0 = \mathcal{ULG}'$ está definido por las ramas

$$\begin{array}{ll} (x_1, a) - (a, y_2) & (x_1, a) - (a, t_2) \\ (z_1, a) - (a, y_2) & (z_1, a) - (a, t_2) \\ (x_2, a) - (a, y_1) & (x_2, a) - (a, t_1) \\ (z_2, a) - (a, y_1) & (z_2, a) - (a, t_1) \end{array}$$

Las dos construcciones anteriores se basan en mantener siempre dos caminos disjuntos en arcos en ambos sentidos conectando los dos digrafos de partida, G'_1 y G'_2 , de modo que los arcos substituidos se reemplacen también por caminos disjuntos en arcos. En la Figura 4.4 se muestra un ejemplo de la construcción para $d = 2$.

4.6. Digrafos con dígonos

La rama-conectividad del grafo G_0 subyacente a un digrafo línea restringido G d -regular que presente algún dígono pero que no tenga autolazos se puede estudiar con las mismas herramientas utilizadas en las secciones anteriores. La primera implicación de la presencia de dígonos es que en el grafo G_0 existen vértices con grado $2d - 1$, lo que limita el valor de la rama-conectividad máxima a $\lambda = 2d - 1$. Efectivamente, dado que un digrafo línea restringido puede tener a lo sumo un dígono en cada vértice, los vértices incidentes a un dígono tienen $2d - 1$ ramas incidentes en el grafo subyacente G_0 . Esto indica la existencia de conjuntos de corte triviales con $2d - 1$ ramas.

La caracterización de grafos subyacentes a digrafos línea restringidos dada en el Capítulo 2 sigue siendo aplicable en el caso de digrafos con dígonos. Así, todo conjunto de corte de ramas mínimo F contiene ramas de un cierto número n de subgrafos fundamentales. Ahora, es posible que una misma rama del grafo G_0 esté a la vez en dos subgrafos fundamentales, lo que puede ocurrir únicamente cuando dicha rama corresponde a un dígono en el digrafo G . Más aún, dados dos subgrafos fundamentales, éstos poseen como máximo una rama en común. En efecto, si $\mathcal{U}(A_1 \times B_1)$ y $\mathcal{U}(A_2 \times B_2)$ tienen dos ramas en común, $A_1 \cap B_2$ o bien $A_2 \cap B_1$ deben tener más de un vértice, lo que es absurdo. Por otra parte, dado que los conjuntos A y B del subgrafo fundamental $\mathcal{U}(A_0 \times B_0)$ tienen exactamente d vértices, en un subgrafo fundamental hay a lo sumo d dígonos.

En las secciones anteriores se han construido los conjuntos de corte de ramas

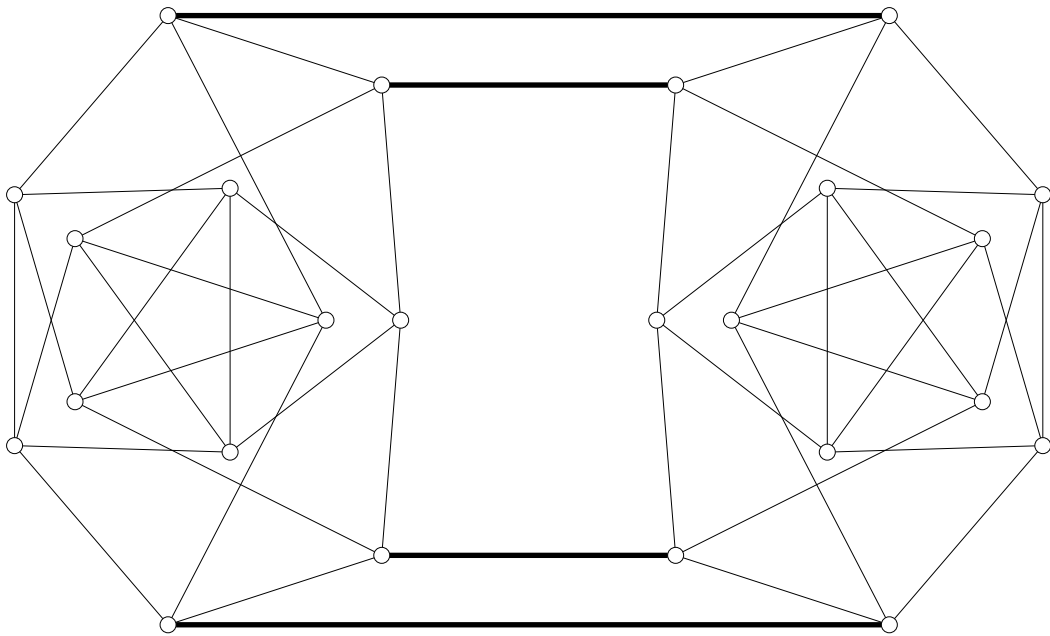


Figura 4.4: Ejemplo de grafo no super-rama-conexo construido a partir de un digrafo 2-conexo y 2-regular.

de G_0 a partir de conjuntos de arcos del digrafo G , teniendo en cuenta que subgrafos fundamentales distintos no comparten rama alguna. En el caso que nos ocupa, el número de ramas del conjunto de corte puede ser inferior al número de arcos de G considerados.

Sea κ la vértice-conectividad del digrafo G . Si $n = 1$, dado que consideramos un único subgrafo fundamental, el número mínimo de ramas del conjunto de corte F es el calculado en la Sección 4.3, que vale $2\kappa(d - \kappa)$. Este caso sólo es posible si $d \geq 2\kappa$. Exigiendo que $\kappa \geq 2$ tenemos que con $n = 1$ los conjuntos de corte (que sólo existen si $d \geq 4$) tienen como mínimo $4d - 8$ ramas, valor que supera la rama-conectividad máxima de G_0 .

Cuando $n \geq 2$ el número de ramas de F que corresponden a dígonos de G no puede superar $\frac{n(n-1)}{2}$, ya que hay como mucho una por cada par de subgrafos fundamentales, ni puede superar $\frac{nd}{2}$, ya que hay como mucho d dígonos en un mismo subgrafo fundamental. Así, el número mínimo de ramas en F (sin considerar el valor concreto de κ) es

$$nd - \min\left(\frac{n(n-1)}{2}, \frac{nd}{2}\right),$$

ya que $f(\alpha, \beta)$ nunca será inferior a d . Es rutinario demostrar que la cota dada es superior a $2d - 1$ salvo cuando $n = 2$ o $n = 3$ y $d = 2$, casos en los que se cumple la igualdad.

Entonces, se deduce el siguiente

Teorema 10 *El grafo G_0 subyacente a un digrafo línea restringido d -regular, con vértice-conectividad $\kappa \geq 2$ con dígonos y sin autolazos tiene rama-conectividad máxima $\lambda = 2d - 1$.*

□

Aplicando este teorema a los grafos de Kautz se demuestra que alcanzan la rama-conectividad máxima, resultado ya obtenido por otros autores (ver, por ejemplo, [2]).

Capítulo 5

Ciclos en digrafos línea iterados: digrafos de Kautz

Tal como se ha descrito en el Capítulo 1, los digrafos de Kautz se pueden construir como digrafos sobre alfabetos de modo que cada vértice de $K(d, n)$ corresponde a una secuencia de n símbolos seleccionados de un alfabeto de $d+1$ símbolos, tal que dos dígitos consecutivos en la secuencia sean distintos. Del mismo modo, un ciclo de longitud l sobre $K(d, n)$ equivale a una secuencia de longitud l de símbolos del mismo alfabeto tal que dos dígitos consecutivos cualesquiera son distintos, y también son distintas todas las posibles subsecuencias de longitud n de la secuencia anterior (tomada cíclicamente). En este capítulo se demuestra la existencia de ciclos en $K(d, n)$ de cualquier longitud excepto 1 y $d^n + d^{n-1} - 1$. Se puede encontrar estudios de longitudes de ciclos en digrafos línea en [19], [21] y [31].

A lo largo de este capítulo utilizaremos la siguiente notación: si G es un digrafo y H es un subdigrafo de G denotamos por $G \setminus H$ al subdigrafo resultante de suprimir en G los arcos de H . Por otra parte, si H_1 y H_2 son subdigrafos de G disjuntos en arcos, denotamos por $H_1 \oplus H_2$ al subdigrafo tal que $V(H_1 \oplus H_2) = V(H_1) \cup V(H_2)$ y $A(H_1 \oplus H_2) = A(H_1) \cup A(H_2)$.

Tal como se ha comentado en el Capítulo 1, todo ciclo de $\mathcal{L}G$ induce un circuito (o recorrido cerrado que no repite arcos) de la misma longitud en G y viceversa. Por otra parte, todo subdigrafo de G conexo y localmente regular (es decir, que todo vértice del subdigrafo tiene grado de salida y grado de entrada iguales) se puede recorrer completamente con un circuito.

Así, para construir un ciclo de longitud dada l en el digrafo línea $\mathcal{L}G$ debemos encontrar en G un subdigrafo localmente regular conexo con exactamente l

arcos.

Para construir subdigrafos localmente regulares de G debemos considerar el siguiente resultado

Lema 10 *Un digrafo G sin vértices aislados es localmente regular si y sólo si se puede descomponer como unión disjunta en arcos de ciclos.*

Demostración.- En efecto, si G es un digrafo localmente regular y C es un ciclo del mismo, $G \setminus C$ es también localmente regular. Así, por inducción sobre el número de arcos del digrafo, G es acíclico o bien se puede descomponer en ciclos. Sin embargo, un digrafo con grado mínimo $\delta \geq 1$ no puede ser acíclico.

Recíprocamente, la unión de ciclos disjuntos en arcos da siempre un subdigrafo localmente regular, dado que el grado de entrada y el de salida de un vértice cualquiera x es el número de ciclos utilizados en la unión que lo contienen. \square

Si el número de arcos del subdigrafo está fijado debemos tener una manera sencilla de controlar la longitud de los distintos ciclos utilizados en la construcción. Para ello, es cómodo considerar los ciclos de un 1-factor de G , o conjunto de ciclos disjuntos en vértices que contienen todos los vértices de G . La suma de las longitudes de los ciclos del 1-factor coincide obviamente con el número de vértices del digrafo G .

Otra propiedad importante de los digrafos localmente regulares es:

Lema 11 *Un digrafo localmente regular no conexo G es la unión disjunta (en vértices) de digrafos conexos localmente regulares.*

Demostración.- La afirmación que se pretende demostrar es equivalente a decir que dados dos vértices x e y de un digrafo localmente regular, si existe un camino desde x hacia y también existe un camino de y hacia x . De modo equivalente, dado un arco $x \rightarrow y$ de un digrafo localmente regular existe algún ciclo que lo contiene. Por el lema anterior, dado que el digrafo se puede descomponer en ciclos disjuntos en arcos, cada arco del digrafo está como mínimo en un ciclo. \square

Vamos a dar ahora algunos resultados que facilitan la construcción de subdigrafos localmente regulares con un número de arcos dado en el caso particular de un digrafo G que es digrafo línea iterado, conexo y d -regular.

Lema 12 *Sea G un digrafo línea d -regular. Si C es un ciclo de G entonces existe un 1-factor en G que lo contiene.*

Demostración.- Consideremos $G = \mathcal{L}G'$. Sea C' el subdigrafo conexo localmente regular definido por el circuito inducido en G' por el ciclo C . Sea T' el complemento de C' en G' , es decir, $T' = G' \setminus C'$. En general, T' será un subdigrafo localmente regular con p componentes conexas. En dichas componentes conexas, que también son localmente regulares, se pueden encontrar circuitos que los recorren completamente. Dichos circuitos, que son disjuntos en arcos entre sí y con C' , inducen en G ciclos disjuntos en vértices, siendo C uno de ellos.

Los $p + 1$ ciclos de G construidos contienen todos los vértices de G , ya que todos los arcos de G' están en C' o en T' y, por tanto, está en alguno de los $p + 1$ subdigrafos. De este modo, los $p + 1$ ciclos forman un 1-factor de G . \square

El Lema anterior permite construir 1-factores que contengan un ciclo dado. El paso siguiente a realizar es incluir un 1-factor cualquiera en una 1-factorización, es decir, en una descomposición de G en d 1-factores disjuntos (en arcos).

Lema 13 *Sea G un digrafo d -regular. Si F es un 1-factor de G entonces existe alguna 1-factorización de G que contiene a F , es decir, $G = F \oplus F_1 \oplus \dots \oplus F_{d-1}$.*

Demostración.- El complemento del 1-factor F en G , $G \setminus F$, es un digrafo $(d - 1)$ -regular. Dado que todo grafo $(d - 1)$ -regular se puede descomponer en $(d - 1)$ 1-factores disjuntos, tenemos que $G \setminus F = F_1 \oplus \dots \oplus F_{d-1}$. Así, $G = F \oplus F_1 \oplus \dots \oplus F_{d-1}$. \square

Para construir ciclos de longitud dada en el digrafo $\mathcal{L}G$ no basta construir subdigrafos localmente regulares sino que debemos asegurar que éstos sean conexos. El siguiente Lema permite obtener subdigrafos conexos localmente regulares siguiendo un proceso iterativo que disminuye el número de componentes conexas.

Lema 14 *Sea G un digrafo línea conexo localmente regular con m arcos y sea H un subdigrafo de G localmente regular con k arcos. Sea H_M el conjunto de los vértices aislados del subdigrafo complementario de H , $G \setminus H$. Si H_M no es un conjunto de corte de G entonces existe un subdigrafo de G conexo y localmente regular con $m - k$ arcos.*

Demostración.- Sea T el digrafo resultante al suprimir los vértices de H_s en $G \setminus H$. Dado que G y H son localmente regulares, T también lo es.

Si T es conexo, entonces ya es el subdigrafo de G buscado. Si no, consideremos las p componentes conexas T_i , $i = 1, \dots, p \geq 2$, en que se descompone T , que también son digrafos localmente regulares y sin vértices aislados.

Dado que H_M no es conjunto de corte del digrafo G , existe un arco $x \rightarrow y$ en H entre dos de las componentes conexas, pongamos $x \in T_1$ e $y \in T_2$. En efecto, si no existiese ningún arco como el anterior, todos los arcos salientes de T_i deben ser adyacentes hacia un vértice de H_M , con lo que H_M sería un conjunto de corte.

Como ningún vértice de T_i está aislado, deben existir los arcos $x \rightarrow z$ en T_1 y $t \rightarrow y$ en T_2 . Por la condición de Heuchenne, debe existir además el arco $t \rightarrow z$ en H .

Intercambiando los arcos $x \rightarrow z$ y $t \rightarrow y$ en T por los arcos $x \rightarrow y$ y $t \rightarrow z$ en H construimos nuevos subdigrafos \hat{H} y \hat{T} . Nótese que \hat{H} es también un subdigrafo localmente regular y $\hat{H}_M = H_M$, dado que los intercambios efectuados no afectan al grado de los vértices en H .

El nuevo digrafo \hat{T} tiene únicamente $p - 1$ componentes conexas. En efecto, las componentes T_i con $i = 3, \dots, p$ (si existen) permanecen intactas en \hat{T} . Sin embargo, las antiguas componentes T_1 y T_2 han quedado conectadas por los arcos $x \rightarrow y$ y $t \rightarrow z$. Nótese que la desaparición de los arcos $x \rightarrow z$ y $t \rightarrow y$ no rompe la conectividad ya que existen caminos que van desde y hasta x en T_1 y desde z hasta t en T_2 .

Repetiendo el proceso anterior, por inducción llegamos a obtener un subdigrafo conexo localmente regular con $m - k$ arcos. \square

Haciendo una pequeña modificación en el enunciado del lema anterior obtenemos un nuevo lema un poco menos general pero de uso más claro.

Lema 15 *Sea G un digrafo línea conexo localmente regular con m arcos y sea H un subdigrafo de G localmente regular con k arcos. Si el conjunto de los vértices aislados de H (es decir, los vértices de G que no son incidentes ni desde ni hacia arcos de H) no es un conjunto de corte de G , entonces existe un subdigrafo de G conexo y localmente regular con k arcos.*

Demostración.- Si H es un subdigrafo localmente regular también lo es su complementario $\tilde{H} = G \setminus H$. Aplicando el lema anterior a \tilde{H} y, teniendo en cuenta que \tilde{H}_M no es conjunto de corte de G , obtenemos un subdigrafo conexo localmente regular con k arcos. \square

5.1. Digrafos línea pancíclicos

Un digrafo G con N vértices es *pancíclico* si existen en él ciclos de cualquiera de las longitudes posibles, es decir, $l = 1, \dots, N$. Notemos que un digrafo

pancíclico, en particular, es Hamiltoniano. Del mismo modo, decimos que un digrafo G con M arcos es *pancircuito* cuando existen en él circuitos con cualquier número posible de arcos, es decir, con $1, \dots, M$ arcos. Es obvio que un digrafo pancircuito es en particular un digrafo conexo localmente regular (basta considerar el caso de longitud igual a M).

Aplicando los resultados de la sección anterior al caso de digrafos línea d -regulares podemos enunciar la siguiente

Proposición 7 *Sea G un digrafo conexo d -regular con M arcos. Si existe un circuito T de G de longitud k entonces $\mathcal{L}G$ tiene circuitos de longitudes $rM + k$ y $(d - r)M - k$ con $r = 0, \dots, d - 2$.*

Demostración.- El circuito T induce un ciclo C en $\mathcal{L}G$, que a su vez es un circuito de $\mathcal{L}G$ de longitud k . Por los Lemas 12 y 13, existe una 1-factorización de $\mathcal{L}G$, $\mathcal{L}G = F_0 \oplus F_1 \oplus \dots \oplus F_{d-1}$, tal que C está contenido en F_0 .

Consideremos los subdigrafos $H_0 = C_k$ y $H_r = H_{r-1} \oplus F_r$ con $r = 1, \dots, d - 2$. Todos ellos son localmente regulares, dado que son unión de subdigrafos 1-regulares y disjuntos en arcos. Nótese que el grado de un vértice cualquiera en el digrafo H_i oscila entre i e $i + 1$, por lo que el complementario no tiene vértices aislados. Dado que el número de arcos de H_r es $Mr + k$, el Lema 14 asegura la existencia de un subdigrafo conexo localmente regular en $\mathcal{L}G$ con $dM - (rM + k) = (d - r)M - k$ arcos, con $r = 0, \dots, d - 2$.

Considerando que H_i con $i \neq 0$ no tiene vértices aislados, si aplicamos el Lema 15 obtenemos subdigrafos conexos localmente regulares con $rM + k$ arcos, con $r = 1, \dots, d - 2$. \square

Tomando una iteración más del digrafo línea podemos enunciar el siguiente

Corolario 2 *Sea G un digrafo línea conexo d -regular con N vértices. Si existe un ciclo C de G de longitud k entonces $\mathcal{L}G$ tiene ciclos de longitudes $rN + k$ y $(d - r)N - k$ con $r = 0, \dots, d - 2$.*

Demostración.- Supongamos que $G = \mathcal{L}G'$, donde G' debe ser conexo y d -regular con N arcos. El ciclo C induce un circuito T en G' de longitud k . Entonces, los circuitos de G cuya existencia asegura la proposición anterior inducen ciclos en G de longitudes $rN + k$ y $(d - r)N - k$ con $r = 0, \dots, d - 2$. \square

Obsérvese que en la proposición anterior si existen circuitos de longitudes k y $M - k$ en G se asegura la existencia de circuitos en $\mathcal{L}G$ de todas las longitudes cuyo resto al dividir por M es k o $M - k$ (y, análogamente para su corolario).

En el caso particular de digrafos pancircuitos tenemos

Teorema 11 *Sea G un digrafo conexo d -regular con M arcos. Si G es pancircuito entonces los digrafos línea iterados, $\mathcal{L}^n G$, también son pancircuitos.*

Demostración.- Dado que el digrafo línea de un digrafo conexo d -regular también es conexo y d -regular, el teorema se demuestra por inducción sobre n . Consideremos entonces el caso $n = 1$.

Si G es pancircuito entonces existen circuitos en G con $1, \dots, M$ arcos. Aplicando la Proposición 7 obtenemos circuitos en $\mathcal{L}G$ de longitudes k y $sM - k$ con $k = 1, \dots, M$ y $s = 2, \dots, d$.

De este modo aseguramos la existencia en $\mathcal{L}G$ de subdigrafos conexos localmente regulares con un número de arcos cualquiera entre 1 y $dM - 1$. El valor restante, dM , se consigue teniendo en cuenta que el propio digrafo $\mathcal{L}G$ es un subdigrafo conexo localmente regular.

Para hacer los demás pasos de inducción basta tomar $\mathcal{L}^{n-1}G$ en lugar del propio digrafo G . \square

Corolario 3 *Si G es un digrafo línea conexo d -regular y pancíclico entonces $\mathcal{L}^n G$ también es pancíclico.*

Demostración.- Es inmediato ver que si $G = \mathcal{L}G'$ es pancíclico entonces G' es pancircuito. Así, por el teorema anterior, $\mathcal{L}^n G'$ es también pancircuito, de lo que se deduce que $\mathcal{L}^n G = \mathcal{L}\mathcal{L}^n G'$ es pancíclico. \square

Corolario 4 *Los digrafos de de Bruijn son pancíclicos.*

Demostración.- Como se puede ver en el Capítulo 1, el digrafo de de Bruijn $B(d, n)$ se puede obtener como la $(n - 1)$ -ésima iteración del digrafo línea del digrafo completo de d vértices con autolazos, que es claramente pancíclico. Obsérvese que dicho digrafo completo es, a su vez, el digrafo línea de un multidigrafo con un único vértice que tiene d autolazos en él. \square

A.Lempel ya obtuvo este último resultado para digrafos de de Bruijn en [21].

5.2. Digrafos de Kautz

Los digrafos de Kautz no pueden ser pancíclicos dado que no poseen autolazos. Sin embargo, en esta sección se demuestra que los digrafos de Kautz

presentan ciclos de todas las longitudes posibles excepto 1 y $N - 1$. Ambas longitudes son imposibles de obtener ya que requieren la existencia de autolazos. En efecto, si existiese un ciclo de longitud $N - 1$ existiría también un 1-factor que lo contiene y que a su vez contendría un autolazo.

Los resultados dados en las secciones anteriores aseguran la existencia de ciclos de muchas de las longitudes posibles. Particularmente, si un digrafo de Kautz de grado d tiene ciclos de todas las longitudes excepto 1 y $N - 1$ razonando como en la demostración del Teorema 11 podemos asegurar que su digrafo línea debe tener ciclos de todas las longitudes exceptuando $rN + 1$ y $rN + (N - 1)$, con $r = 0, \dots, d - 1$.

Para construir ciclos de las longitudes que faltan (excepto 1 y $dN - 1$, que son imposibles) tenemos que introducir una nueva definición. Un circuito en el digrafo de Kautz, $K(d, n)$, es un *circuito clave*, si existen dos dígonos cuyos arcos respectivos, e, f y g, h , están contenidos en dicho circuito y al recorrerlo aparecen en el siguiente orden

$$\dots e \dots g \dots f \dots h \dots$$

y que contenga todos los arcos del digrafo excepto los de un ciclo de longitud 3. Nótese que si un subdigrafo localmente regular de un digrafo de Kautz contiene todos sus arcos menos 3, al no haber autolazos estos 3 arcos deben formar un ciclo.

El siguiente resultado muestra la existencia de circuitos clave en casi todos los digrafos de Kautz.

Proposición 8 *En todo digrafo de Kautz $K(d, n)$ con $d \geq 3$ y $n \geq 1$ o bien $d = 2$ y $n \geq 3$ existe algún circuito clave.*

Demostración.- La demostración es por inducción sobre el diámetro n . En primer lugar, en $K(2, 3)$ y $K(3, 1)$ se puede encontrar directamente un circuito clave, tal y como se muestra en la Figura 5.1. Además, es posible demostrar mecánicamente que no existe ningún circuito clave en $K(2, 1)$ ni en $K(2, 2)$.

Para completar el primer paso de la inducción, tenemos que construir circuitos clave en $K(d, 1)$ con $d \geq 4$. Teniendo en cuenta que $K(d, 1)$ es el digrafo completo con $d + 1$ vértices y sin autolazos, $K(3, 1)$ se puede considerar como subdigrafo localmente regular de $K(d, 1)$ con $d \geq 4$. Insertando en cualquier lugar del circuito clave de $K(3, 1)$ un circuito que recorra el subdigrafo $K(d, 1) \setminus K(3, 1)$, que es localmente regular y conexo, obtenemos un circuito clave de $K(d, 1)$. En efecto, el circuito obtenido contiene todos los arcos de $K(d, 1)$

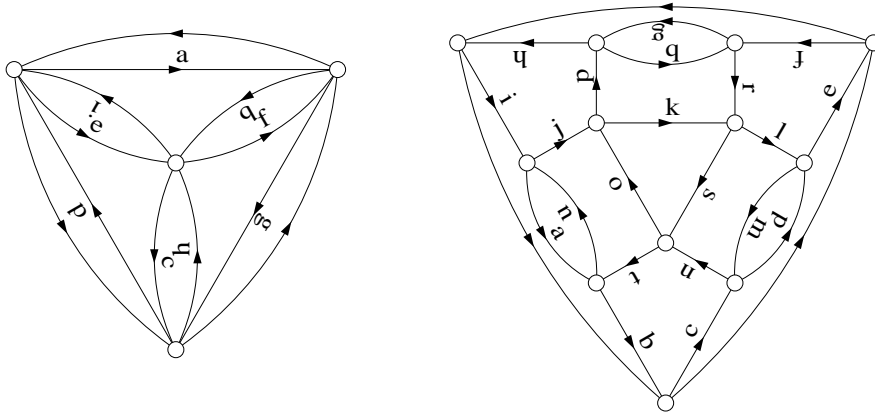


Figura 5.1: Circuitos clave en los digrafos $K(3, 1)$ y $K(2, 3)$.

menos los tres arcos de $K(3, 1)$ evitados por el circuito clave original. Además, la inserción de un nuevo circuito en cualquier lugar del circuito clave original no afecta al orden con el que se recorren los arcos de los dos dígonos de $K(3, 1)$.

Supongamos ahora que conocemos un circuito clave de $K(d, n)$. Sean D'_A y D'_B los dígonos de arcos e', f' y g', h' , respectivamente, correspondientes al circuito clave anterior. Sea C'_3 el ciclo de longitud 3 complementario al dicho circuito clave.

Dado que $K(d, n + 1)$ es el digrafo línea de $K(d, n)$, los dígonos anteriores inducen en $K(d, n + 1)$ dos dígonos D_A y D_B disjuntos en vértices. Denotaremos sus arcos $e' \rightarrow f'$, $f' \rightarrow e'$, $g' \rightarrow h'$ y $h' \rightarrow g'$ por e , f , h y g , respectivamente. Por otra parte, C'_3 induce un ciclo de longitud 3, que denotaremos por C_3 , en $K(d, n + 1)$ y el circuito clave induce un ciclo C_{-3} de longitud $N - 3$, siendo N el número de vértices de $K(d, n + 1)$.

Por construcción del circuito clave de $K(d, n)$ tenemos que C_{-3} y C_3 forman un 1-factor de $K(d, n + 1)$ y que los dígonos D_A y D_B son disjuntos en arcos con dicho 1-factor. Finalmente, los vértices de ambos dígonos son vértices de C_{-3} . Lo anterior se puede observar en la Figura 5.2.

Los vértices e' , f' , g' y h' de los dígonos D_A y D_B dividen a C_{-3} en cuatro caminos U , V , X e Y , de modo que U va desde h' hacia e' , V va desde e' hacia g' , X va desde g' hacia f' e Y va desde f' hacia h' .

Consideremos ahora el circuito auxiliar $UeYgXfVh$, que recorre los arcos de los dígonos D_A y D_B en el orden requerido por la definición de circuito clave. Para formar el circuito clave de $K(d, n + 1)$ debemos insertar al circuito auxiliar

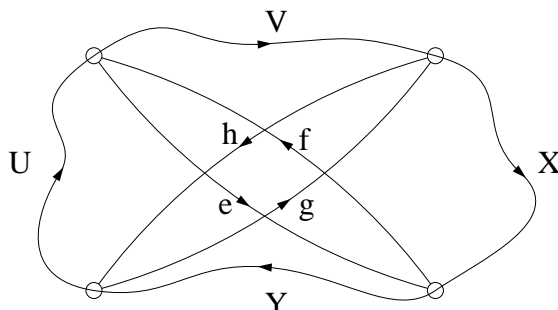


Figura 5.2: Ciclo inducido por un circuito clave en el digrafo línea.

anterior los circuitos que recorren las componentes conexas del subdigrafo $T = K(d, n + 1) \setminus (UeYgXfVh \oplus C_3)$. Esta construcción es posible dado que, en primer lugar, T es localmente regular y, por tanto, sus componentes conexas, T_1, \dots, T_p , también lo son. En segundo lugar, para poder insertar el recorrido de T_i es necesario que haya como mínimo un vértice común entre T_i y el circuito auxiliar. Si tal vértice no existiese, entonces T_i sería una componente conexa de $K(d, n + 1) \setminus C_3$, ya que los arcos del circuito auxiliar no serían incidentes a ningún vértice de T_i . Esto significa que los tres arcos de C_3 son un conjunto de corte de $K(d, n + 1)$. Por otra parte, C_3 no puede ser un conjunto de corte mínimo. En efecto, como máximo 2 y como mínimo uno de los tres vértices de C_3 pueden estar en T_i , por lo que para desconectar T_i del resto del digrafo basta suprimir exactamente uno de los tres arcos de C_3 . Esto es absurdo ya que la arco-conectividad de los digrafos de Kautz es máxima, como se comprueba en [25], es decir, hace falta suprimir como mínimo 2 arcos para desconectar el digrafo. \square

Corolario 5 *Existe una 1-factorización $K(d, n) = F_0 \oplus F_1 \oplus \dots \oplus F_{d-1}$ con $d \geq 3$ y $n \geq 2$ o bien con $d = 2$ y $n \geq 4$ tal que $C_{-3} \subset F_0$ y $D_A, D_B \subset F_1$.*

Demostración.- Siguiendo con la notación introducida en la demostración del teorema, tenemos el 1-factor $F_0 = C_{-3} \oplus C_3$ de $K(d, n)$ inducido por el circuito clave de $K(d, n - 1)$. Para construir el 1-factor F_1 disjunto en arcos a F_0 y que contenga los dígonos D_A y D_B consideremos los subdigrafos fundamentales en que se descompone todo digrafo línea restringido (ver Capítulo 2). Esta construcción es trivial en el caso $d = 2$, ya que $F_1 = K(2, n) \setminus F_0$.

Para construir un 1-factor de un digrafo línea restringido d -regular basta seleccionar en cada subdigrafo fundamental $A \times B$ un conjunto de d arcos que no tengan vértices extremos en común. Recíprocamente, el 1-factor F_0 contiene

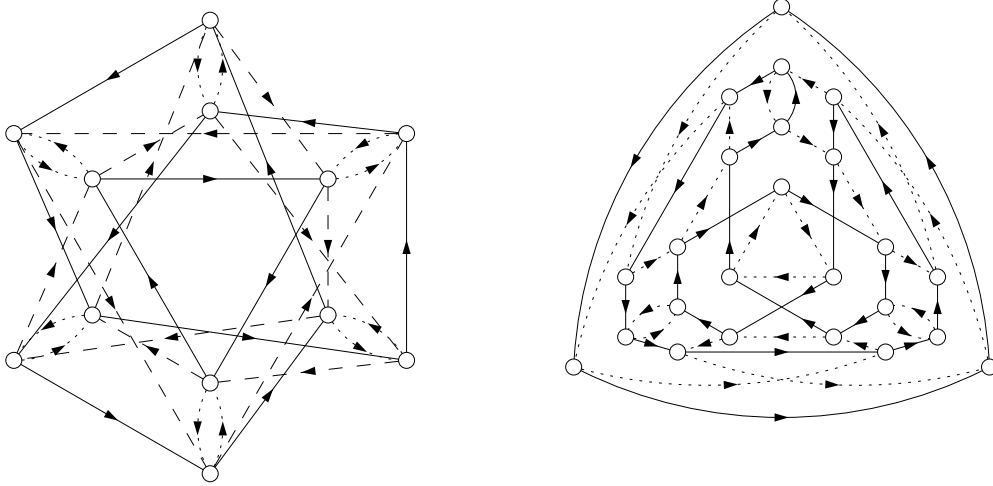


Figura 5.3: 1-factorizaciones de los digrafos $K(3,2)$ y $K(2,4)$ construidas a partir de los circuitos clave de $K(3,1)$ y $K(2,3)$.

exactamente d arcos de cada subdigrafo fundamental. Para simplificar los razonamientos, denotemos a_i los vértices de A y por b_i los de B , de modo que los arcos de F_0 son justamente $a_i \rightarrow b_i$.

La construcción de F_1 consiste en elegir en cada subdigrafo fundamental $A \times B$ un conjunto de d arcos con extremos distintos que no sean los arcos $a_i \rightarrow b_i$. Además, F_1 debe contener los arcos e, f, g y h . En el subdigrafo fundamental $A \times B$ hay como máximo 2 de los 4 arcos de los dígonos.

Supongamos que $A \times B$ contiene sólo 1 arco de los dígonos. Podemos reordenar los vértices de modo que dicho arco sea $a_1 \rightarrow b_2$. Entonces, podemos tomar los arcos $a_i \rightarrow b_{i+1 \pmod{d}}$ en F_1 . En el caso de que $A \times B$ contenga 2 arcos de los dígonos, reordenando los vértices podemos conseguir que uno de los arcos sea $a_1 \rightarrow b_2$ y el otro sea uno de los arcos $a_2 \rightarrow b_3, a_d \rightarrow b_1, a_3 \rightarrow b_4$ (sólo si $d \geq 4$) y $a_2 \rightarrow b_1$. Los tres primeros casos se resuelven del mismo modo que el anterior, es decir, tomando los arcos $a_i \rightarrow b_{i+1 \pmod{d}}$. El último caso tiene solución únicamente si $d \geq 4$, tomando los arcos $a_1 \rightarrow b_2, a_2 \rightarrow b_1, a_i \rightarrow b_{i+1}$ con $i = 3, \dots, d-1$ y $a_d \rightarrow b_3$.

Para que se dé el caso de tener dos arcos de dígonos en el mismo subdigrafo fundamental es necesario que existan dígonos a distancia 1 en el digrafo de Kautz. Se puede comprobar que esto sólo ocurre en los digrafos $K(d,2)$, por lo que hemos podido construir el 1-factor F_1 para todos los digrafos de Kautz

excepto para $K(3, 2)$. Sin embargo, el circuito clave de $K(3, 1)$ mostrado en la Figura 5.1 induce en el digrafo línea $K(3, 2)$ un 1-factor F_0 que permite la existencia de otro 1-factor F_1 que contenga los 2 dígonos D_A y D_B , tal como se puede observar en la Figura 5.3.

Una vez construidos los 1-factores F_0 y F_1 el subdigrafo complementario es $(d-2)$ -regular, y por tanto existe una 1-factorización del mismo $F_2 \oplus \dots \oplus F_{d-1}$, que completa la 1-factorización de $K(d, n)$. \square

A partir de los circuitos clave podremos construir circuitos de las longitudes que faltan. Diremos que un digrafo G con N vértices es $(-1, 1)$ -*pancíclico* si contiene ciclos de cualquier longitud entre 2 y N excepto $N - 1$. De modo análogo, diremos que el digrafo G' con M arcos es $(-1, 1)$ -*pancircuito* si existen en él circuitos de cualquier número de arcos entre 2 y M excepto $M - 1$.

Lema 16 *Los digrafos $K(d, 1)$ con $d \geq 2$ son $(-1, 1)$ -pancircuito.*

Demostración.- La demostración es por inducción sobre el grado del digrafo. El caso $d = 2$ se puede demostrar directamente construyendo circuitos de longitud 2 (un dígono), 3 (un triángulo), 4 (dos dígonos) y 6 (los tres dígonos).

Para completar la inducción, consideremos ahora que el digrafo $K(d, 1)$ satisface el lema. Dado que el digrafo $K(d, 1)$ se puede considerar como un subdigrafo de $K(d+1, 1)$, todo circuito de $K(d, 1)$ también lo es de $K(d+1, 1)$.

Por otra parte, el subdigrafo $K(d+1, 1) \setminus K(d, 1)$ consiste en $d+1$ dígonos que conectan cada vértice de $K(d, 1)$ al vértice de $K(d+1, 1)$ que no está en $K(d, 1)$. Si añadimos k de dichos dígonos a $K(d, 1)$ obtenemos circuitos cuyo número de arcos es $d(d+1) + 2k$, donde $k = 1, \dots, d+1$. Si añadimos dichos dígonos al complemento de un ciclo de longitud 3 en $K(d, 1)$ obtenemos circuitos cuyo número de arcos es $d(d+1) + 2k - 3$, con $k = 1, \dots, d+1$. Tenemos así circuitos de todas las longitudes posibles excepto 1 y $d(d+1) - 1$. \square

Finalmente, podemos enunciar el siguiente

Teorema 12 *Los digrafos de Kautz $K(d, n)$ con $d \geq 2$ y $n \geq 1$ son $(-1, 1)$ -pancircuitos.*

Demostración.- El teorema se demuestra por inducción sobre el diámetro del digrafo. El Lema 16 demuestra el teorema para $K(d, 1)$ con $d \geq 2$. Dado que no existen circuitos clave en $K(2, 1)$ ni en $K(2, 2)$ no podemos el procedimiento que se describirá más adelante en esta demostración para $K(2, 2)$ y $K(2, 3)$. Tal como se ha comentado al principio de esta sección, para demostrar que el

digrafo $K(d, n)$ es $(-1, 1)$ -pancívulo basta partir de que $K(d, n - 1)$ lo es y construir circuitos de longitudes $rN + 1$ y $rN - 1$, con $r = 1, \dots, d - 1$ (donde N es el número de vértices de $K(d, n)$).

Los circuitos de longitud $N + 1$ y $N - 1$ en $K(2, 2)$ y $K(2, 3)$ se pueden construir directamente. En particular, para $K(2, 2)$ el circuito de longitud 5 consiste en recorrer un triángulo y uno de sus dígonos adyacentes y el de longitud 7 se construye añadiendo al anterior otro dígono adyacente.

En el caso del digrafo $K(2, 3)$, el circuito de longitud 11 se construye recorriendo un triángulo y dos de los ciclos de longitud 4 adyacentes (y disjuntos en arcos) y el de longitud 13 se construye añadiendo al anterior un dígono.

Tomamos como primer paso de inducción los digrafos $K(2, 3)$ y $K(d, 1)$ con $d \geq 3$, digrafos en los que existen circuitos clave.

Para completar la inducción, supongamos ahora que $K(d, n)$ satisface el teorema. El número de vértices de $K(d, n + 1)$ es $N = (d + 1)d^n$, que coincide con el número de arcos de $K(d, n)$. Constuyamos ahora los circuitos de longitudes $rN + 1$ y $rN - 1$, con $r = 1, \dots, d - 1$. Usando la 1-factorización dada por el Corolario 5 podemos definir los subdigrafos localmente regulares siguientes:

$$\begin{aligned} T_{1,1} &= C_{-3} \oplus D_A & T_{2,1} &= T_{1,1} \oplus D_B \\ T_{1,s} &= T_{1,s-1} \oplus F_s & T_{2,s} &= T_{1,s} \oplus D_B \quad \text{con } s = 2, \dots, d - 1. \end{aligned}$$

Es inmediato ver que todos estos subdigrafos son conexos, por lo que definen circuitos de longitud igual al número de arcos que contienen, es decir, $Ns - 1$ y $Ns + 1$ arcos para $s = 1, \dots, d - 1$. \square

Corolario 6 *Los digrafos de Kautz $K(d, n)$ con $d \geq 2$ y $n \geq 1$ son $(-1, 1)$ -pancívulos.*

Demostración.- Inmediata si consideramos que cada circuito de $K(d, n - 1)$ induce un ciclo de la misma longitud en $K(d, n)$. \square

Capítulo 6

Conclusiones

En este trabajo se ha realizado un estudio de las propiedades del grafo subyacente a cierto tipo de digrafo línea, denominado *digrafo línea restringido*. Como se indica en el Capítulo 1, denominamos digrafo línea restringido al digrafo línea de cualquier digrafo de grado mínimo no inferior a 2 y sin arcos paralelos.

En primer lugar, en el Teorema 1 del Capítulo 2 se da una caracterización de los grafos subyacentes a digrafos línea restringidos en términos similares a la caracterización de los digrafos línea dada por Harary y Norman en [14]. En el caso que nos ocupa, el grafo subyacente a un digrafo línea se descompone en los denominados *subgrafos fundamentales*, que esencialmente son grafos bipartitos completos disjuntos en ramas.

A partir de la caracterización anterior se obtienen en el mismo capítulo resultados sobre el problema de reconstruir el digrafo línea restringido a partir de su grafo subyacente. Concretamente, se demuestra que todas las posibles orientaciones como digrafo línea restringido de un mismo grafo tienen los autolazos (si existen) y los dígonos (si existen) en los mismos vértices.

Sin embargo, se demuestra también que dos orientaciones de un mismo grafo como digrafos línea restringidos podrían presentar sus dígonos en distintas ramas, sin perjuicio de la condición anterior. Para que puedan coexistir varias distribuciones de los dígonos, éstos deben estar dispuestos de cierto modo, cosa que sólo ocurrirá en casos muy particulares.

Como resultado más importante del Capítulo 2, se obtiene el Teorema 2 cuyo enunciado asegura la unicidad de la descomposición en subgrafos fundamentales a partir de unas condiciones poco restrictivas. Concretamente, basta asegurar en primer lugar que alguno de los subgrafos fundamentales sólo puede orientarse normalmente para obtener un digrafo línea restringido, es decir, no

puede orientarse como 4-ciclo. Si el digrafo línea restringido que define al grafo tiene algún vértice con grado de entrada o de salida mayor que 2 o alguno de sus vértices tiene un autolazo, se asegura que uno de los subgrafos fundamentales sólo puede orientarse normalmente, es decir, con la misma orientación que en el digrafo original o con la orientación inversa. La segunda condición es que todas las orientaciones del grafo como digrafo línea restringido tengan los mismos dígonos.

La unicidad de la descomposición en subgrafos fundamentales conlleva la existencia de dos únicas orientaciones como digrafo línea restringido de un grafo dado, siendo ambas orientaciones mutuamente inversas.

Como corolario se plantea el contrarrecíproco del teorema anterior, que clasifica los grafos subyacentes a digrafos línea restringidos en los que existen varias descomposiciones en subgrafos fundamentales en dos grandes familias: los derivados de digrafos con dígonos y los derivados de digrafos sin dígonos, siendo estos últimos digrafos 2-regulares sin dígonos ni autolazos.

Antes de proceder al estudio de tales digrafos línea restringidos se aplica el teorema de unicidad de la caracterización al cálculo del grupo de automorfismos del grafo subyacente. Se llega a la conclusión, reflejada en el Teorema 3, que bajo ciertas condiciones (las del Teorema 2) el índice del grupo de automorfismos del digrafo línea restringido como subgrupo del grupo de automorfismos de su grafo subyacente es 1 o 2.

Para finalizar el Capítulo 2 se aplica todo lo anterior a los digrafos de de Bruijn y de Kautz, que son digrafos línea restringidos. En el Teorema 4 se da el grupo de automorfismos de los grafos subyacentes a los digrafos de ambas familias.

En el Teorema 5 del Capítulo 3 se obtiene una clasificación de todos los digrafos línea restringidos sin dígonos tales que existen varias descomposiciones distintas de sus grafos subyacentes en subgrafos fundamentales. Concretamente, se demuestra que tales digrafos son isomorfos a los diagramas de Schreier del grupo **pgg** respecto a ciertos subgrupos del mismo. Dependiendo de cual sea el subgrupo utilizado, se obtienen cuatro familias de digrafos: $CL(\infty, 2l, 2n)$, $TR(2l, 2n, 2t)$, $MB(\infty, l)$ y $KL(l, 2n)$. Los digrafos de cada una de estas cuatro familias pueden verse como 1-esqueletos de CW-complejos bidimensionales homeomorfos a un cilindro, un toro, una banda de Möbius y a una botella de Klein, respectivamente.

El Teorema 6 del mismo capítulo establece que el índice del grupo de automorfismos de todos los digrafos anteriores excepto $TR(4, 4, 0)$ es 4. El índice de $TR(4, 4, 0)$, cuyo grafo subyacente es justamente un cubo 4-dimensional, toma

el valor 6.

En el resto del trabajo (capítulos 4 y 5) se estudian propiedades concretas de los digrafos línea y de sus grafos subyacentes, siempre utilizando razonamientos de carácter local a partir de la condición de Heuchenne.

El Teorema 7 del Capítulo 4 enuncia que la rama-conectividad del grafo subyacente a un digrafo línea restringido conexo, d -regular, sin dígonos ni autolazos es como mínimo $2d - 2$, es decir, asegura una rama-conectividad 2 unidades por debajo de la rama-conectividad máxima. Este resultado es óptimo en el sentido de que con las condiciones especificadas, existen digrafos cuya rama-conectividad es exactamente $2d - 2$.

Si añadimos la condición de que el digrafo tenga una vértice-conectividad como mínimo 2 se asegura la rama-conectividad máxima, como queda reflejado en el Teorema 8.

El Teorema 9 asegura en el caso anterior la super-rama-conectividad de todos los grafos excepto en los casos en que el digrafo tenga vértice-conectividad 2 y grados 2 y 4. De nuevo, el resultado es óptimo en sentido análogo al citado antes.

Analizando el caso de digrafos con dígonos y sin autolazos, se obtiene un resultado similar al del Teorema 8, que asegura la rama-conectividad máxima, que en este caso es $2d - 1$, cuando se exige que el digrafo tenga vértice-conectividad como mínimo 2.

En el Capítulo 5 se estudian las posibles longitudes de los ciclos en digrafos línea iterados, también utilizando la condición de Heuchenne. En el caso particular de los digrafos de Kautz, el Teorema 12 y su corolario aseguran la existencia de ciclos de todas las longitudes posibles excepto 1 y $N - 1$, siendo N el número de vértices del digrafo.

Bibliografía

- [1] M. AIGNER, *On the line dgraph of a directed graph*, Math. Z. **102** (1967) 56–61.
- [2] J.C. BERMOND, N. HOMOBONO AND C. PEYRAT, *Large fault-tolerant interconnection networks*, Graph Combin. **5** (1989) 107–123.
- [3] J. BOND AND C. PEYRAT, *Diameter and vulnerability in networks*, Graph Theory and its Applications to Algorithms and Computer Science. John Wiley & Sons, New York (1985) 123–149.
- [4] J. BOND, *A conjecture about the automorphism group of the undirected de Bruijn graphs*, Personal communication (1989).
- [5] N.G. DE BRUIJN, *A combinatorial problem*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser., **A 49** 758–764 (1946).
- [6] G. CHARTRAND AND L. LESNIAK, *Graphs and digraphs*, Wadsworth, Belmont, CA (1986).
- [7] H.S.M. COXETER AND W.O.J. MOSER, *Generators and relations for discrete groups*, Springer, New York–Heidelberg (1984).
- [8] T. DIECK, *Transformation groups*, de Gruyter Stud. Math. **8**, de Gruyter, Berlin–New York (1987).
- [9] J. FÀBREGA, *Grafos y redes de interconexión: diseño, fiabilidad y enca-minamiento*, Doctoral Thesis, Univ. Politècnica de Catalunya, Barcelona (1984).
- [10] J. FÀBREGA, M.A. FÍOL AND J.L.A. YEBRA, *Connectivity and reliable routing algorithms line digraphs*, Proc.III IAESTED International Symp. Applied Informatics, Grindelwald, Switzerland, 45–50 (1985).

- [11] J. FÀBREGA AND M.A. FIOL, *Maximally connected digraphs*, J. of Graph Theory, **13** 657–668 (1989).
- [12] M.A. FIOL, J.L.A. YEBRA AND I. ALEGRE, *Line digraph iterations and the (d, k) digraph problem*, IEEE Trans. Comp. **C33** 400–403 (1984).
- [13] J. GÓMEZ, M.A. FIOL AND J.L.A. YEBRA, *Graphs on alphabets as models for large interconnection networks*, Discrete Appl. Math. **37/38** 227–243 (1992).
- [14] F. HARARY AND R.Z. NORMAN, *Some properties of line digraphs*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) **9** (1960) 161–168.
- [15] R.L. HEMMINGER AND L.W. BEINEKE, *Line Graphs and Line Digraphs*, Selected Topics in Graph Theory, **1** 271–305 Academic Press (1983).
- [16] C. HEUCHENNE, *Sur une certain correspondance entre graphes*, Bull. Sc. Liège **33** 743–753 (1964).
- [17] M. IMASE, T. SONEOKA AND K. OKADA, *Connectivity of regular directed graphs with small diameters*, IEEE Trans. Comp. **C34** 267–273 (1985).
- [18] M. IMASE, T. SONEOKA AND K. OKADA, *A fault tolerant processor interconnection network*, Denshi Tsushin Gakkai Ronbunshi, **J68–D 8** 1449–1456 (1986) (Japanese). Translated to English in Systems and Computers in Japan, **17(8)** 21–30.
- [19] M. IMORI, M. MATSUMOTO AND H. YAMADA, *The line digraph of a regular and pancircular digraph is also regular and pancircular*, Graphs and Combinatorics, **4** 235–239 (1988).
- [20] W.H. KAUTZ, *Design of optimal interconnection networks for multiprocessors*, Architecture and Design of Digital Computers, NATO Advanced Summer Institute, 249–272 (1969).
- [21] A. LEMPEL, *m-ary closed sequences*, J. Comb. Theory **10** 253–258 (1971).
- [22] A.S. LLADÓ, J.L. VILLAR AND M.A. FIOL, *A new family of digraphs on alphabets*, Combinatorics'88, Research and Lecture Notes in Mathematics, **2** 143–155, Mediterranean Press (1991).
- [23] W.S. MASSEY, *Introducción a la Topología Algebraica*, Reverté, Barcelona (1972).

- [24] J. PLESNIK, *Critical graphs of given diameter*, Acta. Fac. Rerum. Natur., Univ. Com. Mat. **30** 71–93 (1975).
- [25] S.M. REDDY, J.G. KUHL, S.H. HOSSEINI AND H. LEE, *On digraphs with minimum diameter and maximum connectivity*, Proc. 20th Annual Allerton Conference, 1018–1026 (1982).
- [26] D.J.S. ROBINSON, *A Course in the Theory of Groups*, Springer-Verlag, New York (1982).
- [27] M.R. SAMATHAM AND D.K. PRADHAN, *The de Bruijn multiprocessor network: a versatile parallel processing and sorting network for VLSI*, IEEE Trans. on Comp. C38 567–581 (1989).
- [28] A. SENGUPTA, A. SEN AND S. BANDYOPADHYAY, *On an optimally fault-tolerant multiprocessor network architecture*, IEEE Trans. Comp. **C36** 619–623 (1987).
- [29] O. SCHREIER, *Die Untergruppen der freier Gruppen*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **5**, 161–183 (1927).
- [30] T. SONEOKA, H. NAKADA AND M. IMASE, *Sufficient conditions for dense graphs to be maximally connected*, Proc. of ISCAS **85** 811–814 (1985).
- [31] J.L. VILLAR, *Kautz s -ary closed sequences*, Combinatorics'88, Research and Lecture Notes in Mathematics, **2** 459–469, Mediterranean Press (1991).
- [32] J.L. VILLAR, *On the underlying graph of a line digraph*, Discrete Appl. Math. **37/38** 525–538 (1992).
- [33] J.L. VILLAR, *Clasificación de los digrafos línea restringidos de índice no trivial mediante recubrimientos coloreados*, Publicación interna. DMAT. UPC. 1994.

Índice alfabético

- 1-factor, 13
- 1-factorización, 13
- 4-ciclo, 23

- adyacente desde, 8
- adyacente hacia, 8
- adyacentes, 7
- arco-coloración, 13
- arcos, 8
- autolazos, 7, 8
- automorfismo de grafos, 12

- camino, 10
- caminos alternativos, 55
- ciclo, 10
- ciclo hamiltoniano, 10
- circuito, 10
- circuito clave, 73
- circuito euleriano, 10
- componente conexa, 11
- condición de Heuchenne, 15
- conectividad, 11
- conectividad máxima, 11
- conjunción de digrafos, 9
- conjunto de corte de ramas (arcos), 11
- conjunto de corte de vértices, 11
- conjunto de corte minimal, 11
- conjunto de corte trivial, 11

- dígono, 8
- diámetro, 10
- diagrama de Cayley, 12
- digrafo, 8

- digrafo $(-1, 1)$ -pancíclico, 77
- digrafo $(-1, 1)$ -pancircuito, 77
- digrafo bipartito completo, 9
- digrafo completo con autolazos, 9
- digrafo completo sin autolazos, 9
- digrafo conexo, 10
- digrafo débilmente conexo, 10
- digrafo inverso, 9
- digrafo línea, 14
- digrafo línea restringido, 15
- digrafo pancíclico, 70
- digrafo pancircuito, 71
- digrafos de de Bruijn, 17
- digrafos de Kautz, 17
- digrafos HCR-coloreables, 37
- distancia, 10

- extremos, 7, 8

- fuente, 11

- girth, 10
- grado, 7
- grado de entrada máximo, 8
- grado de entrada mínimo, 8
- grado máximo, 7, 8
- grado máximo de salida, 8
- grado mínimo, 7, 8
- grado mínimo de salida, 8
- grafo, 7
- grafo (digrafo) localmente finito, 10
- grafo bipartito completo, 9
- grafo completo, 9

- grafo conexo, 10
- grafo dirigido, 8
- grafo subyacente, 9
- grupo de automorfismos, 12

- incidente desde, 8
- incidente hacia, 8
- índice (de una orientación), 30
- inducido, 8
- isomorfismo coloreado, 41
- isomorfismo cromático, 41
- isomorfismo de grafos, 12
- isomorfismo HCR-coloreado, 41
- isomorfismo HCR-cromático, 41

- localmente regular, 8

- morfismo de grafos, 12

- orientación, 9
- orientaciones normales, 23

- rama-conectividad, 11
- ramas, 7
- recorrido, 10
- recorrido no dirigido, 10
- regular, 7, 8
- relaciones de conmutación de Heuchenne (HCR), 37

- simples, 7
- subdigrafo, 8
- subdigrafo inducido, 8
- subgrafo, 7
- subgrafos fundamentales, 21
- sumidero, 11
- super-arco-conexos, 11
- super-conexo, 11
- super-rama-conexos, 11

- vértice aislado, 11
- vértice-conectividad, 11
- vértices, 7, 8