

La Función Zeta de Riemann; Conjeturas

Director: Javier Cilleruelo Mateo

Autor: Jorge Jiménez Urroz

Hace mucho tiempo, Javier Cilleruelo tuvo la idea de que elaborase esta memoria, con el único propósito de establecer lo que ahora ha quedado en ser la última línea. En ella se recogen los aspectos fundamentales de la teoría de la función zeta de Riemann, $\zeta(s)$, y además observamos que esta teoría está rodeada por la aritmética. La memoria intenta seguir esa línea.

El capítulo 1 recoge algunos teoremas relacionados con la distribución de los números primos, siguiendo en lo posible el curso de la historia y terminando con uno de los teoremas más importantes relacionados con el problema; el teorema de los números primos. El segundo capítulo está dedicado por entero a la teoría de la función zeta, y aun dada su extensión, no se puede decir que sea un tratado completo sobre $\zeta(s)$, para lo que habría hecho falta mucho más que un capítulo. Sin embargo, sí que recoge en general todos los aspectos de esta teoría en tres grandes bloques, la distribución y estimación de densidad de ceros, orden de magnitud y regiones libres de ceros. Además este capítulo nos proporcionará las herramientas necesarias para el desarrollo del tercer capítulo. Este se dedica al estudio de algunas hipótesis que han ido apareciendo a raíz de la que ya formuló Riemann en 1859, la famosa hipótesis de Riemann, **HR**, de la que también hacemos un pequeño estudio. Cada una de las hipótesis, en general más débiles que **HR**, engloba una parte de la teoría de $\zeta(s)$, así la hipótesis de Lindelöf, **HL**, se interesa en el orden de magnitud, y la hipótesis de densidad, **HD**, en estimaciones de densidad de ceros, dejando la parte de la localización de los ceros para la hipótesis de Riemann. Además hay dos hipótesis más relacionadas con la aritmética, la hipótesis de Mertens, **HM**, y la hipótesis de los primos consecutivos **HPC** a la que se dedica la última parte del capítulo.

Tengo que dar las gracias a Javier Cilleruelo por muchas cosas. En primer lugar por tener fe en mí, si no la hubiera tenido no podría estar dándole aquí las gracias, en segundo lugar por sus interminables correcciones, él ha sido, entre otras cosas, el que ha acentuado el sentido de esta memoria, y en tercer lugar por su apoyo prestándome, casi constantemente tanto su despacho como su *idea*.

He de agradecer a Fernando Chamizo la lectura que hizo de ciertas partes de la memoria, y sus posteriores consejos y correcciones, así como los numerosos debates, que han sido verdaderas partidas de ingenio. Agradezco también a mi padre el hacer, y ser la figura más firme de una familia que empezando por mi madre, hasta el último de mis hermanos y amigos son siempre un gran apoyo. A Juan José Abad su agotadora labor bibliográfica y a tantos otros que me ofrecieron su ayuda "...en lo que sea".

INDICE

Introducción	 4
La Distribución de los números primos	 15
La función zeta	 47
Conjeturas	 135
Apéndice	 177
Bibliografía	 200

Introducción

Alrededor del año 300 a.de c., aparecieron trece libros que revolucionarían las matemáticas de la época: los "Elementos" de Euclides. En estos trece volúmenes el autor dota a las matemáticas del rigor necesario del que hasta ese momento carecían.

En estos "Elementos" siempre está presente un carácter geométrico. Sin embargo, dentro de esa línea, los libros VII, VIII y IX se dedican a la aritmética. De esta forma, en el libro VII, los números se representan mediante segmentos, y se explica el concepto de divisibilidad mediante el hecho de que un segmento sea o no medible por otro dado.

Además de éstas, aparecen otras nociones aritméticas, máximo común divisor, (m.c.d.), mínimo común múltiplo, (m.c.m), así como un procedimiento para calcularlos, (el famoso "Algoritmo de Euclides"), etc. Éstas no son sino algunas propiedades de los números. En la proposición 20 del libro IX se encuentra la primera demostración de la existencia de infinitos números primos. Concretamente la mencionada proposición dice así:

"Los números primos son más que cualquier multitud dada de números primos".

Un enunciado extraordinario de la infinitud de los números primos al que le sigue una demostración que, aún siendo verbal, nos presenta un puro razonamiento deductivo.

La idea de la demostración se puede resumir en tres líneas de la siguiente forma: Sea una cantidad finita de números primos, si a su producto le sumamos la unidad, el resultado o es primo o tiene un divisor primo distinto de los que partimos. Esta demostración, que todavía es la que se conserva en la actualidad, es interesante verla tal y como nos aparece en el texto griego, por lo que damos una transcripción en el capítulo 1.

Habría que esperar hasta el siglo XVIII para saber algo más acerca de la distribución de los números primos, y es en 1737 cuando Euler (1707-1783), vuelve a establecer la existencia de infinitos números primos, aunque esta vez

prueba algo más demostrando que la serie $\sum \frac{1}{p}$ diverge, donde la suma se extiende a todos los números primos. Para ello utiliza una identidad en la que los primos aparecen a un lado de la igualdad, y todos los números naturales al otro. Formalmente tendríamos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1}$$

y el producto es, como hemos señalado, sobre la totalidad de los números primos.

Esta igualdad, que es consecuencia directa del teorema fundamental de la aritmética, será extremadamente importante en cualquier trabajo posterior acerca de la distribución de los números primos, siendo el punto de partida, de la teoría de la función zeta.

La función zeta de Riemann, cuya notación $\zeta(s)$ es en la actualidad la misma que introdujo el autor del que hereda su nombre, se define a partir de la igualdad

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (1)$$

siempre que la suma converja. Esta función, que en la actualidad ocupa uno de los lugares principales dentro de la teoría de números, ya era motivo de preocupación en los círculos matemáticos muchos años antes del nacimiento de

➤ B. Riemann. Así, en el texto "Novae Quadrature Arithmeticae" de Pietro Mengoli (1625-1686), aparece propuesto el cálculo de $\zeta(2)$, siendo Euler el primero que da el resultado correcto,

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

en una época en que ya el cálculo de $\zeta(n)$ para $n \geq 2$ entero, era un problema clásico estudiado por matemáticos como Leibniz, o como su propio maestro Johann Bernoulli. La aportación de Euler a este problema en concreto no se limitó al cálculo de $\zeta(2)$, sino que también obtuvo el valor de $\zeta(n)$ para todo n entero positivo par, el cual viene dado por una expresión en la que están involucrados los números de Bernoulli.

En 1737, en su trabajo "Variae observationes circa series infinitas" Euler, además de establecer la ya mencionada identidad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1},$$

llamada "Fórmula del producto de Euler", consigue las siguientes fórmulas asintóticas

$$\sum_{p < n} \frac{1}{p} \sim \log \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad \text{y} \quad \sum_{p < n} \frac{1}{p} \sim \log \log n \quad \text{para } n > n_0$$

e incluso llega a conjeturar la fórmula

$$\zeta(1-s) = \pi^{-s} 2^{1-s} \Gamma(s) \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \zeta(s)$$

que es la famosa ecuación funcional establecida por Riemann en 1859.

Esta fórmula fue un gran paso a la hora de llegar a resultados concretos acerca de la distribución de los números primos. Sin embargo no sería Euler, sino Legendre (1752-1833) el primero en dar una conjetura significativa sobre este problema. Después de que en 1798 publicara otra menos definida, esta conjetura aparece en un trabajo suyo de 1808 y con ella el problema de la distribución de los números primos adquiere una forma mucho más precisa. Es por lo tanto interesante ver que nos dice la conjetura en sí:

Sea $\pi(x)$ la función que asocia a cada x real el número de primos que no excedan x ; entonces

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x - 1.08 \dots}$$

En la misma dirección, e independientemente, Gauss (1777-1855) establece una fórmula similar a la anterior para aproximar la función $\pi(x)$. Para ello utiliza el siguiente método experimental; divide la serie natural, hasta 3 millones, en bloques de 1000 y mediante una tabla que el mismo construyó cuenta los primos que hay en cada bloque. De los resultados obtenidos deduce que la función

$\frac{1}{\log x}$ es una buena aproximación de la densidad de los números primos para x grandes, o dicho de otra forma, se cumple asintóticamente

$$\pi(x) \sim \int_2^x \frac{1}{\log t} dt$$

que por conveniencia de notación, se suele reemplazar por la siguiente:

$$li(x) = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_0^{1-\eta} + \int_{1+\eta}^x \frac{du}{\log u}$$

que se diferencia de la anterior en una constante.

Las observaciones de Gauss aparecieron publicadas por primera vez en 1863 en una carta que ya había enviado a Encke en 1849; pero todo parece indicar que Gauss había comenzado a investigar sobre ello en el año 1791 cuando solo tenía catorce años de edad.

Después de estas conjeturas, tanto la de Gauss como la de Legendre, aún quedaba una cosa por aclarar, y era la aproximación de estas funciones a la función $\pi(x)$. Este punto, aún siendo de gran importancia, no quedaba claro en ninguna de sus construcciones. Actualmente se entiende que si $f(x)$ es la función de aproximación entonces $\frac{\pi(x)}{f(x)} \rightarrow 1$ para $x \rightarrow \infty$.

De esta forma enunciadas, las conjeturas de Gauss y Legendre son equivalentes entre sí y a una tercera fórmula más simple $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x} = 1$ (2). Sin embargo, la diferencia entre las funciones que aparecen en cada una de ellas se hará más clara cuando calculemos el orden de magnitud de $\pi(x) - f(x)$.

Dado que se cumple esta equivalencia, podemos referirnos desde ahora a la conjetura Gauss-Legendre, entendiendo por ello la relación (2), que en la actualidad se conoce como teorema del número primo, cuya certeza o falsedad ha preocupado a los matemáticos cerca de 100 años.

El primer matemático que consiguió demostrar algún resultado referente al comportamiento de $\pi(x)$ en el infinito fue Chebychev (1821-1894), que alrededor de 1850 publicó dos artículos acercándose a la demostración de la conjetura de

→ Gauss-Legendre, pero sin llegar a dar una prueba completa. Más concretamente; en el primer artículo demuestra que

$$\liminf \frac{\pi(x)}{li(x)} \leq 1 \leq \limsup \frac{\pi(x)}{li(x)};$$

es decir, que si existiera límite ese tendría que ser 1, mientras que en el segundo muestra dos constantes a y A tal que

$$a \frac{x}{\log x} < \pi(x) < A \frac{x}{\log x}.$$

→ Todavía quedaba por demostrar el punto crucial, la existencia del límite, pero como él mismo reconocía no se podría seguir en la línea de sus trabajos para dar la solución final al problema.

→ Otro progreso en este sentido, del que debemos hacer mención, se debe a Mertens que, en 1874 calculó una fórmula asintótica para $\sum_{p \leq x} \frac{1}{p}$, así como otras fórmulas relacionadas con los números primos. A estas expresiones luego se les denominaría "Formulas de Mertens", cuyo enunciado y demostración veremos con más detalle en el capítulo primero.

Sin embargo, las ideas que fueron clave para la demostración del teorema del número primo no las aportó otro sino Bernhard Riemann. En las páginas 671-680 del tomo del año 1859 de la revista de la academia de Berlín se encuentra su celebre memoria titulada "Sobre el número de primos menores que una magnitud dada".

→ En esta memoria, Riemann trata a la función $\zeta(s)$, (la cual fue estudiada por Euler, y luego por Tchebichev con s como variable real), como una función de variable compleja, llamémosla $s = \sigma + it$, y estudia la serie a la derecha de (1) mediante la teoría de las funciones analíticas. Aunque esta serie solo converge para $\sigma > 1$, Riemann la extiende a una función analítica en todo el plano complejo excepto en $s = 1$ en donde tiene un polo simple, consiguiendo definir, de esa forma, la que sería la actual función zeta de Riemann y que constituyó el paso necesario que había que dar para la total resolución de nuestro problema.

Como ya hemos mencionado anteriormente Riemann, en su memoria establece la ecuación funcional, mediante la cual, entre otras cosas, reconocemos a $0 \leq \sigma \leq 1$, como la banda en donde se concentra toda la información necesaria, tanto para el estudio de la función zeta, como para sus posteriores aplicaciones.

↪ Por este motivo, en la actualidad se le denomina banda crítica. Dicha memoria, de ocho páginas de extensión, es su única aportación a la Teoría de números

↪ y, a pesar de dar unas demostraciones que no convencían a nadie, y que grandes matemáticos calificaron de meras conjeturas, es uno de los trabajos más importantes en esta rama de las matemáticas.

Además de las anteriores pruebas, Riemann enuncia los siguientes teoremas, de gran importancia en la futura teoría de la función zeta, sin que por ello haya alguna razón para creer que tuviese sus pruebas, pues solo nos muestra ciertas indicaciones de como sería su demostración:

a) La función $\zeta(s)$ tiene infinitos ceros en la banda crítica, y están dispuestos simétricamente respecto de la recta $\sigma = 1/2$ y también respecto del eje real.

b) Sea $N(T)$ el número de ceros de $\zeta(s)$ en la banda crítica que cumplen $0 < t \leq T$ entonces se satisface la siguiente relación asintótica¹

$$N(T) = \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\log T)$$

c) La función entera

$$\xi(s) = \frac{1}{2} s(s-1) \pi^{-\frac{1}{2}s} \Gamma\left(\frac{1}{2}s\right) \zeta(s)$$

tiene la representación

$$\xi(s) = e^{A+Bs} \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) e^{s/\rho}$$

donde A y B son constantes y ρ recorre los ceros de $\zeta(s)$ en la banda crítica.

¹En realidad Riemann lo que afirma es que la función $N(T)$ se puede aproximar por $\frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi}$ cometiendo en la aproximación un error relativo de $O\left(\frac{1}{T}\right)$

d) Existe una fórmula explícita para $\pi(x) - li(x)$. (en la práctica no se utiliza esa fórmula sino una análoga para $\psi(x) - x$ con $\psi(x) = \sum_{p^m \leq x} \log p$ que está estrechamente relacionada con la primera.)

e) La Hipótesis de Riemann: Todos los ceros de $\zeta(s)$ en la banda crítica, están en la línea $\sigma = \frac{1}{2}$.

Sin duda esta memoria inspira a Hadamard (1865-1962) a desarrollar la teoría de funciones enteras con la que se han podido salvar algunos de los obstáculos que aparecían al intentar dar pruebas rigurosas de las afirmaciones de Riemann. Estas pruebas fueron construidas en parte por el mismo Hadamard y en parte por Von Mangoldt. Este último consigue la demostración de b) en 1905, aunque ya había dado otra con un término de error peor en 1895, año en que también consigue probar el punto d).

En 1893 Hadamard demuestra a) y c). Estos dos últimos puntos ocuparán un papel muy importante en la demostración definitiva del teorema del número primo que por fin se consigue en el año 1896, por el mismo Hadamard y por de la Valle Poussin (1866-1962), de forma independiente y casi simultáneamente.

Mientras que la prueba de Hadamard es más simple, de la Valle Poussin consigue demostrar que la función $\pi(x)$ está mejor aproximada por $li(x)$ que por $\frac{x}{\log x - B}$ cualquiera que sea B , y que $B = 1$ es la constante más favorable en contraposición con la conjetura de Legendre 1'08... En cualquier caso las dos demostraciones están relacionadas con la situación de los ceros de la función zeta dentro de la banda crítica y ambas necesitan la existencia de regiones, interiores a la banda, que sean libres de ceros, (es decir, donde la función zeta no se anule). En este sentido a Hadamard le es suficiente con la línea $\sigma = 1$, y de la Valle Poussin encuentra una región en las condiciones anteriores, que se aproxima asintóticamente a esta línea.

Actualmente la teoría se presenta de una forma más simple, y los teoremas debidos a de la Valle Poussin pueden ser probados sin necesidad de utilizar la teoría de funciones enteras. Estas simplificaciones se deben casi por completo al

trabajo de Landau.

En 1949 la comunidad matemática se vio sorprendida cuando Selberg, uno de los mejores matemáticos del siglo XX, dio una prueba elemental del teorema del número primo, (no haciendo uso de la variable compleja). Erdős presentó independientemente otra prueba elemental, aunque basada en una desigualdad de Selberg establecida anteriormente. Una prueba totalmente distinta se debe a Daboussi (1984).

Con la demostración del teorema del número primo se dio un paso fundamental hacia el conocimiento de la distribución de los números primos. Sin embargo la teoría está lejos de completarse, y el orden de magnitud del error cometido en la aproximación $\pi(x) - li(x) = E(x)$ es prácticamente un enigma. Este error se puede calcular mejor cuanto más se conozca sobre la distribución de los ceros de la función zeta. Hasta ahora el mejor término de error que se ha encontrado es

$$E(x) = O\left(x \exp(-c \log x)^{3/5} (\log \log x)^{-1/5}\right),$$

que se deduce de la siguiente región libre de ceros

$$\sigma \geq 1 - C(\log t)^{-2/3} (\log \log t)^{-1/3} \quad \text{para } t \geq t_0.$$

De la misma forma, si supieramos que $\zeta(s)$ no tiene ceros en $\sigma \geq c$, $0 < c < 1$, se deduciría $E(x) = O(x^{c+\varepsilon})$. Vemos ahora la gran importancia que adquiere el punto e) de la memoria de Riemann, que en este caso implicaría un error de $E(x) = O(x^{1/2+\varepsilon})$ que es el mejor que se puede esperar.

Todo intento por probar esta conjetura ha sido por el momento en vano; sin embargo el punto e), y en general todo el trabajo de Riemann, han propiciado el nacimiento de una nueva teoría, la teoría de la función zeta de Riemann.

Aunque la distribución de los números primos es la causa de la aparición de la función zeta, por lo que nos hemos extendido más en la descripción de este problema, muchas son las aplicaciones de la teoría de $\zeta(s)$ a la teoría de números y a otras ramas de las matemáticas.

Gran cantidad de problemas de la teoría multiplicativa de números, en líneas generales dedicados al estudio de las series de Dirichlet $\sum a_n n^{-s}$, en donde los coeficientes están estrechamente relacionados con la aritmética², dependen directamente de las propiedades de la función zeta, como son el orden de magnitud de los momentos, las regiones libres de ceros, estimaciones de la densidad de los ceros, etc.

En particular $\zeta(s)$ es la más simple de las series de Dirichlet, $a_n = 1$, y su teoría ha dado pie a numerosas conjeturas, entre las cuales veremos las más sobresalientes:

→ **Hipótesis de Mertens (MH)** Para todo $x > 1$ se cumple $|\sum_{n \leq x} \mu(n)| < x^{1/2}$ donde $\mu(n)$ es la función de Möbius, cuya serie de Dirichlet está generada por $\zeta(s)^{-1}$; es decir, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \frac{1}{\zeta(s)}$.

→ **Hipótesis de Riemann (RH)**: Todos los ceros de $\zeta(s)$ en la banda crítica están en la línea $\sigma = \frac{1}{2}$

→ **Hipótesis de Lindelöf (LH)** Para todo $\varepsilon > 0$, $\zeta(\frac{1}{2} + it) << |t|^\varepsilon$.

Hipótesis de densidad (DH): Sea $N(\sigma, T)$ el número de ceros $\rho = \beta + i\gamma$, de $\zeta(s)$ con $\beta \geq \sigma$ y $|\gamma| \leq T$. Entonces

$$N(\sigma, T) << T^{2-2\sigma+\varepsilon} \quad \left(\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1\right).$$

→ **Hipótesis de primos consecutivos (CPH)**: Sea p_n el n -ésimo primo, entonces se cumple $p_{n+1} - p_n << p_n^{1/2+\varepsilon}$.

→ Aunque esta última hipótesis pertenece a la teoría de los números primos, depende directamente de la teoría de la función zeta. Esta conjetura es mucho más débil que la conjetura de Cramer, que afirma $p_{n+1} - p_n << (\log p_n)^2$.

→ El estudio de estas hipótesis será el centro de la última parte de la presente memoria. En ella veremos algunos resultados referentes a cada una de ellas, así como el estado actual de las mismas. También demostraremos que se cumple la

²Algunos ejemplos aparecen en [Iv1]

siguiente cadena de implicaciones

$$\text{MH} \Rightarrow \text{RH} \Rightarrow \text{LH} \Rightarrow \text{DH} \Rightarrow \text{CPH},$$

motivo por el cual hemos establecido el anterior orden al enunciar las hipótesis.

En cuanto a la primera hipótesis, A.M. Odlyzko y H.J.J. te Riele (1984) demostraron su falsedad, sin embargo no ha perdido su importancia debido a que, enunciando **MH** de la forma $|\sum_{n \leq x} \mu(n)| < x^{1/2+\epsilon}$, se cumple **MH** $\Leftrightarrow$ **RH**. Las restantes, aún después de innumerables intentos, todavía no han sido establecidas. Pero no por ello debemos olvidar el progreso que se ha experimentado en su resolución, principalmente en lo que se refiere a las dos últimas. Se sabe que **DH** es cierta para $\sigma \geq 11/14$ y respecto a **HPC** se ha llegado a

$$p_{n+1} - p_n \ll p_n^{c+\epsilon} \quad c = \frac{11}{20} - \frac{1}{384} = 0.547395833 \dots$$

En el último capítulo de la memoria podremos ver la demostración de resultados encaminados en este sentido, pero antes debemos familiarizarnos con la teoría de la función zeta. Para ello empezamos el capítulo primero dando algunos teoremas relativos al problema que la originó.

La Distribución de los Números Primos

Como ya hemos observado, la distribución de los números primos es un problema cuya respuesta se ha venido persiguiendo desde hace más de 2000 años, en tiempos de los griegos. Desde entonces se han venido consiguiendo resultados parciales que han contribuido al avance hacia una solución definitiva que todavía no se ha alcanzado por completo. Es interesante, por tanto, hacer un desarrollo del problema mostrando los resultados, siempre que no oscurezca la exposición, en el mismo orden en el que han surgido históricamente.

El primer resultado que veremos hace referencia a la infinitud de los números primos.

TEOREMA 1 (EUCLIDES). *Los números primos son más que cualquier multitud dada de números primos*

DEMOSTRACIÓN:

Sean A, B, C los números primos dados;

yo digo que los números primos son más que A, B , y C ;

Sea ED el menor número medible por A —

A, B y C , y le sumamos la unidad DF . B — G —

El número EF será primo o no. Primero C —

supongamos que es primo, de esta forma E — D F

ma habremos encontrado los números A, B, C y EF que son más que A, B y C .

Si EF no es primo, será medido por algún número que si lo sea. Llamemos a este número G , yo digo que G es distinto de A, B, C . Supongamos que es alguno de ellos, como A, B, C miden ED , también lo medirá G , pero G media EF , por lo que debe medir la unidad DF lo cual es absurdo, y G no es ninguno de los primos A, B, C , como por hipótesis era primo, hemos encontrado los números A, B, C, G , que son más que A, B, C . Q.E.D

Este resultado en realidad nos dice un poco más que la existencia de infinitos primos. De hecho si llamamos p_n al n -ésimo primo, se sigue que el entero

$Q_n = p_1 p_2 \cdots p_n + 1$ es divisible por p_m con $p_{n+1} \leq p_m \leq Q_n$ de lo que se deduce por inducción

$$p_n < 2^{2^n}$$

Sin embargo ésta estimación está muy lejos del verdadero orden del n -ésimo primo, lo que tendremos oportunidad de ver al final del capítulo. En cualquier caso, el resultado del teorema 1 se puede mejorar sustancialmente con un método todavía muy elemental, como veremos en el siguiente teorema

TEOREMA 2. *La serie $\sum_p \frac{1}{p}$ y el producto $\prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1}$ son divergentes.*

DEMOSTRACION:

Sea, para $x > 2$, $P(x) = \prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1}$. Entonces

$$P(x) > \prod_{p \leq x} \left(1 + \frac{1}{p} + \cdots + \frac{1}{p^m}\right) \text{ para todo } m > 0.$$

Ese producto será igual a $\sum \frac{1}{n}$ donde la suma recorre un cierto conjunto de enteros. Si escogemos m de forma que $2^{m+1} > x$, entonces ese conjunto incluye todos los enteros menores o iguales que x y por tanto

$$P(x) > \sum_{n \leq x} \frac{1}{n} > \log x.$$

Por otra parte, sea

$S(x) = \sum_{p \leq x} \frac{1}{p}$. Entonces, desarrollando $\log(1 - x)$ en su serie de Taylor tenemos

$$\log P(x) - S(x) = \sum_{p \leq x} \sum_{n > 2} \frac{1}{n p^n} < \sum_{p \leq x} \frac{1}{2p(p-1)} < \sum_n \frac{1}{2n(n-1)} = \frac{1}{2}.$$

De esta forma

$$S(x) > \log \log x - \frac{1}{2}.$$

De los teoremas 1 y 2 deducimos que $\pi(x)$ tiende a infinito con x . Sin embargo están lejos de decirnos la rapidez exacta con que la función crece. En el siguiente teorema podremos decir algo más en este sentido concluyendo el resultado $\pi(x)/x \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \infty$.

TEOREMA 3. $\pi(x) = o(x)$ cuando $x \rightarrow \infty$

DEMOSTRACIÓN:

$$n \uparrow 0 < n \leq x$$

Sea $N_r(x, h)$ el número de enteros divisibles por h y que no son divisibles por ninguno de los r primeros primos $p_1, \dots, p_r$. Claramente se cumple

$$(1.1) \quad \pi(x) \leq r + N_r(x, 1)$$

Además si dividimos los enteros enumerados en $N_{r-1}(x, h)$ en dos clases según $p_r \mid n$ o no, en el caso en que $p_r \nmid h$ se cumple

$$N_{r-1}(x, h) = N_r(x, h) + N_{r-1}(x, p_r h)$$

ya que, en este caso, n es dividido por p_r y por h a la vez si y solo si le divide $p_r h$. Si expresamos N_r en función de N_{r-1} y razonamos por inducción con $h = 1$ obtenemos

$$N_r(x, 1) = N_0(x, 1) - \sum_i N_0(x, p_i) + \sum_{i,j} N_0(x, p_i p_j) \dots$$

donde las sumas recorren las posibles combinaciones de los r primos tomados de uno en uno, dos en dos, etc. Como $N_0(x, h) = \left[\frac{x}{h} \right]$ tenemos

$$(1.2) \quad N_r(x, 1) = [x] - \sum_i \left[\frac{x}{p_i} \right] + \sum_{i,j} \left[\frac{x}{p_i p_j} \right],$$

que si lo escribimos en terminos de la función de Möebius (A.1) y definimos $P_r = \prod_{i=1}^r p_i$ tenemos

$$(1.3) \quad N_r(x, 1) = \sum_{d|P_r} \mu(d) \left[\frac{x}{d} \right].$$

Si consideramos $2 < \xi < x$, y tomamos r de forma que $p_r \leq \xi \leq p_{r+1}$, teniendo en cuenta que $y - [y] < 1$ podemos olvidarnos de la parte entera en cada sumando de (1.3) con lo que cometeremos un error menor que 2^r , que es el número de

términos del sumatorio. Sustituyendo (1.3) en (1.1), al ser $r < 2^r < 2^\xi$ obtenemos

$$\pi(x) < r + 2^r + x \sum_{d|P_r} \mu(d) \frac{1}{d} = r + 2^r + x \prod_{1 \leq i \leq r} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) < 2^{\xi+1} + x \prod_{p \leq \xi} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

La primera igualdad es un caso particular de (A.2). Si elegimos ahora ξ como una función de x tal que $\xi \rightarrow \infty$ y $2^{\xi+1}/x \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \infty$, deducimos que $\pi(x)/x \rightarrow 0$ sin más que aplicar el teorema 1. Si además escojemos $\xi = c \log x$ nos queda el resultado más preciso

$$\pi(x) = O\left(\frac{x}{\log \log x}\right).$$

Debemos observar que la principal idea involucrada en el anterior teorema no es otra que el uso de la criba de Eratóstenes, siendo Legendre quien dio la actual formula (1.2). Con este teorema hemos adquirido bastante más información acerca del verdadero orden de $\pi(x)$. Sin embargo en este punto es conveniente introducir las funciones que, ya en 1850 sirvieran a Chebychev para demostrar sus resultados en relación con la distribución de los números primos.

Funciones de Chebychev.

Definimos

$$\theta(x) = \sum_{p \leq x} \log p \quad \psi(x) = \sum_{p^m \leq x} \log p \quad (x > 0)$$

donde la segunda suma se extiende sobre las combinaciones de un primo p , y un entero positivo m , tal que $p^m \leq x$. Una simple interpretación aritmética de $\psi(x)$ consiste en calcular el logaritmo del m.c.m de todos los enteros que no superan x .

Agrupando los términos de $\psi(x)$ que tengan un mismo m obtenemos

$$\psi(x) = \theta(x) + \theta(x^{1/2}) + \theta(x^{1/3}) + \dots$$

donde la serie de la derecha contiene un número finito de términos distintos de cero, ya que $\theta(x) = 0$ si $x < 2$.

Si ahora agrupamos segun los términos que tengan el mismo primo p , queda

$$\psi(x) = \sum_{p \leq x} \left[\frac{\log x}{\log p} \right] \log p,$$

ya que el número de enteros que satisfacen $m \log p \leq \log x$ es justamente $\left[\frac{\log x}{\log p} \right]$. El comportamiento de $\pi(x)$ se puede deducir de estas dos funciones gracias al siguiente teorema.

TEOREMA 4. Los cocientes $\frac{\theta(x)}{x}$, $\frac{\psi(x)}{x}$, $\frac{\pi \log x}{x}$ tienen los mismos límites superiores, (límites inferiores)

DEMOSTRACIÓN:

Sean Λ_1 , Λ_2 , Λ_3 los lim sup, posiblemente $+\infty$, (λ_i con $i = 1, 2, 3$ los lim inf) de cada cociente respectivamente. Claramente se cumple

$$\frac{\theta(x)}{x} \leq \frac{\psi(x)}{x} \leq \frac{\pi \log x}{x}$$

y por tanto

$$(1.4) \quad \Lambda_1 \leq \Lambda_2 \leq \Lambda_3.$$

Además

$$\theta(x) \geq \sum_{x^\alpha < p \leq x} \log x \geq \log x^\alpha (\pi(x) - \pi(x^\alpha)).$$

Teniendo en cuenta que $\pi(x^\alpha) < x^\alpha$ nos queda

$$\frac{\theta(x)}{x} > \frac{\alpha \log x \pi(x)}{x} - \frac{\alpha \log x}{x^{1-\alpha}}.$$

Si fijamos α y hacemos tender x a infinito, resulta $\Lambda_1 \geq \alpha \Lambda_3$, ya que $\log x < x^\epsilon$. La demostración se acaba observando que la desigualdad es cierta para todo $0 < \alpha < 1$ y por tanto

$$\Lambda_1 \geq \Lambda_3.$$

Para conseguir el resultado para los límites inferiores no hay más que reemplazar λ_i por Λ_i en el razonamiento anterior.

Con este teorema deducimos que si alguno de los tres cocientes anteriores tiene límite, los otros dos también lo tendrán, y por tanto las expresiones $\psi(x) \sim x$ y $\theta(x) \sim x$ son equivalentes a $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$, que es el teorema de los números primos.

De las tres funciones anteriores, $\psi(x)$ es la que aparece de una forma más natural desde el punto de vista analítico aun siendo en principio la que parece más alejada del problema. Por este motivo, primero obtendremos resultados para la función $\psi(x)$ y luego, gracias al teorema 4, los traduciremos a $\pi(x)$.

Una primera aplicación en este sentido puede ser el cálculo del orden exacto de $\pi(x)$.

TEOREMA 5. *Existen dos constantes positivas, a y A , tal que para x suficientemente grande se cumple*

$$\frac{ax}{\log x} \leq \pi(x) \leq \frac{Ax}{\log x}.$$

DEMOSTRACIÓN:

Vamos a demostrar en primer lugar que

$$\frac{\theta(x)}{x} \leq 2 \log 2 \quad \text{para todo } x > 0.$$

Sea $M = \binom{2m+1}{m+1}$, donde m es un entero positivo. M es un entero, en particular es el número

$$M = \frac{(2m+1) \cdots (m+2)}{m(m-1) \cdots 1}$$

que aparece dos veces en el desarrollo de $(1+1)^{2m+1}$, por lo que

$$2M < 2^{2m+1} \quad \text{o bien} \quad M < 2^{2m}.$$

Además si $m+1 < p \leq 2m+1$ entonces p divide al numerador y no al denominador de M , y por tanto $p|M$, de lo que se concluye

$$\prod_{m+1 < p \leq 2m+1} p \leq M.$$

Uniando las dos anteriores expresiones obtenemos la desigualdad

$$\prod_{m+1 < p \leq 2m+1} p \leq M < 2^{2m}.$$

Tomando logaritmos,

$$(1.5) \quad \theta(2m+1) - \theta(m+1) < (2m) \log 2.$$

Razonemos ahora por inducción. Claramente se cumple para $n = 1$, supongamos que se cumple para todo $k = 1, 2, \dots, n-1$. Si n es impar, $n = 2m+1$, el teorema se deduce de (1.5) aplicando la hipótesis de inducción a $\theta(m+1)$. Si $n = 2m$, entonces es consecuencia del caso anterior, ya que

$$\theta(2m) = \theta(2m-1) \leq 2(2m-1) \log 2 < 2(2m) \log 2.$$



Hemos demostrado el resultado para todo n natural, lo que implica el resultado para todo x positivo, sin más que considerar su parte entera. Esta primera parte implica $\Lambda \leq 2 \log 2$.

Si demostramos ahora $\lambda \geq \log 2$ tendríamos $\log 2 \leq \lambda \leq \Lambda \leq 2 \log 2$, que junto con el teorema 4 nos daría el resultado.

Para demostrarlo tendremos en cuenta que si $m > 0$ y p un número primo, el número de veces que $p|m!$ es exactamente

$$\left\lfloor \frac{m}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{p^3} \right\rfloor + \dots$$

ya que el número de factores de $m!$ divisibles por p^r es $m_r = \left\lfloor \frac{m}{p^r} \right\rfloor$, y si $k \leq m$, y r es la máxima potencia de p que divide a k , este factor será contado exactamente r veces, una por cada sumando m_i con $i = 1, 2, \dots, r$.

Sea ahora $N = \frac{2n!}{(n!)^2}$, el término más grande del desarrollo de $(1+1)^{2n}$. Entonces, $(2n+1)N > 2^{2n}$. Escribamos N de la siguiente forma

$$N = \prod_{p \leq 2n} p^{\nu_p},$$

donde

$$\nu_p = \left[\frac{2n}{p} \right] + \left[\frac{2n}{p^2} \right] + \cdots - 2 \left[\frac{n}{p} \right] - 2 \left[\frac{n}{p^2} \right] - \cdots$$

y sea

$$M_p = \left[\frac{\log 2n}{\log p} \right].$$

Como $[2y] - 2[y] = 0$ o 1 , se cumple $\nu_p \leq M_p$ y por tanto

$$2^{2n} < (2n+1)N \leq (2n+1)e^{\psi(2n)}.$$

Tomando logaritmos, $(2n) \log 2 < \log(2n+1) + \psi(2n)$. Si ahora, para $x > 2$ real, consideramos $n = \left[\frac{x}{2} \right]$, tenemos

$$\psi(x) \geq \psi(2n) > (x-2) \log 2 - \log(x+1),$$

que implica $\lambda \geq \log 2$.

Obviamente, del teorema 5 se sigue el teorema 3. Es más de la desigualdad $\pi(x) > \frac{ax}{\log x}$ deducimos de manera trivial la existencia de infinitos números primos. Además

$$n = \pi(p_n) > \frac{ap_n}{\log p_n} > p_n^{1/2}$$

y por lo tanto

$$ap_n < n \log p_n < 2n \log n,$$

que demuestra la divergencia de la serie $\sum p_n^{-1}$ por comparación con $\sum (n \log n)^{-1}$. Por tanto los teoremas 1 y 2 son también consecuencia del anterior teorema.

El método utilizado en el teorema 5, con alguna modificación técnica, ha servido para que otros autores consiguieran mejorar las cotas, tanto para el límite superior como para el límite inferior. Por ejemplo J. Sylvester consiguió demostrar

$$0'96695 \leq \lambda \leq \Lambda \leq 1'0423.$$

Es más, el mismo teorema 5 tiene como una importante aplicación el postulado de Bertrand que asegura la existencia de un primo en el intervalo $[n, 2n]$

cualquiera que sea n . Sin embargo para demostrar el teorema de los números primos, ($\lambda = 1 = \Lambda$), tendremos que utilizar técnicas completamente distintas.

Hasta ahora hemos obtenido cotas para los límites superior e inferior, pero sin decir nada en concreto sobre el límite, que todavía no sabemos si existe. El siguiente paso será la demostración de que la existencia del límite implica que éste debe ser 1. Para ello tendremos que introducir antes una serie de resultados.

Identidad de Euler.

Vamos a demostrar una identidad, fundamental dentro de la teoría de los números primos, como caso particular del siguiente teorema

TEOREMA 6. Sea $n > 0$ un entero y sea $f(n)$ una función multiplicativa. Entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \prod_p \{1 + f(p) + f(p^2) + \dots\}$$

siempre que la serie de la izquierda sea absolutamente convergente en cuyo caso lo será también el producto. *que, como absolutamente, converge lo es en*

Si además $f(n)$ es completamente multiplicativa, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \prod_p (1 - f(p))^{-1}.$$

DEMOSTRACIÓN:

Consideramos $P(x) = \prod_{p \leq x} \{1 + f(p) + f(p^2) + \dots\}$. Cada factor es una serie convergente acotada por $\sum |f(n)|$, que por hipótesis lo es. El número de factores es finito y podemos aplicar el teorema de multiplicación de series de Cauchy para obtener una única serie absolutamente convergente. Además, por ser $f(n)$ multiplicativa, aplicando el teorema fundamental de la aritmética, esta serie será de la forma

$$P(x) = \sum_{n'} f(n')$$

donde n' son los enteros positivos sin factores primos mayores que x . Si escribimos

$$\sum_{n'} f(n') = \sum_{n \leq x} f(n) + R(x)$$

se cumple

$$|R(x)| \leq \sum_{n > x} |f(n)| \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} R(x) = 0,$$

ya que $\sum |f(n)|$ converge.

El producto es absolutamente convergente porque

$$\sum_{p \leq x} |f(p) + f(p^2) + \cdots| \leq \sum_{p \leq x} |f(p)| + |f(p^2)| + \cdots \leq \sum_n |f(n)| < \infty$$

Si además $f(n)$ es completamente multiplicativa, entonces

$$\{1 + f(p) + f(p^2) + \cdots\} = \{1 + f(p) + f(p)^2 + \cdots\} = \frac{1}{1 - f(p)},$$

lo que demuestra la última parte del teorema.

Tomemos ahora en el teorema 6, $f(n) = n^{-s}$ para $s > 1$. Esta función está en las condiciones del teorema, siendo además completamente multiplicativa y por tanto se cumple la llamada identidad de Euler:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

Gracias a la identidad de Euler podemos deducir de manera elemental algunas otras identidades relacionadas con la función zeta. Así

$$(1.6) \quad \frac{1}{\zeta(s)} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}.$$

Elevando al cuadrado la función zeta queda por un lado

$$\zeta^2(s) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^s}$$

donde $d(n)$ es la funcion divisor, que cuenta el numero de divisores de n . Por otro lado

$$\zeta^2(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-2} = \prod_p \left(1 + \frac{2}{p^s} + \frac{3}{p^s} + \dots\right),$$

multiplicando y comparando coeficientes, obtenemos la formula elemental

$$d(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_r + 1)$$

si $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$.

Otro sencillo calculo nos permite obtener

$$\frac{\zeta^4(s)}{\zeta(2s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\{d(n)\}^2}{n^s}$$

ya que

$$\begin{aligned} \frac{\zeta^4(s)}{\zeta(2s)} &= \prod_p \frac{1 - p^{-2s}}{(1 - p^{-2s})^4} = \prod_p \frac{1 + p^{-s}}{(1 - p^{-s})^3} \\ &= \prod_p (1 + p^{-s}) \{1 + 3p^{-s} + \dots + \frac{1}{2}(m+1)(m+2)p^{-ms} + \dots\} \\ &= \prod_p \{1 + 4p^{-s} + \dots + (m+1)^2 p^{-ms} + \dots\} \end{aligned}$$

multiplicando se obtiene el resultado.

Por ultimo si tomamos logaritmos en la identidad de Euler y desarrollamos en serie nos queda

$$(1.7) \quad \log \zeta(s) = - \sum_p \log \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) = \sum_{p,m} \frac{1}{mp^{ms}},$$

donde p recorre los números primos y m todos los enteros positivos. Derivando obtenemos

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{p,m} \frac{\log p}{p^{ms}},$$

que podemos escribirlo como

$$(1.8) \quad -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_n \frac{\Lambda(n)}{n^s},$$

donde $\Lambda(n)$ es la función de von Mangoldt definida por

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{si } n = p^m \text{ con } p \text{ primo y } n \geq 1 \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases}$$

La serie está bien definida debido a la convergencia uniforme de la serie para $s \geq 1 + \delta$, $\delta > 0$.

En (1.8) vemos cómo aparece de manera natural la función ψ , que la podemos escribir de la forma

$$(1.9) \quad \psi(x) = \sum_{p^m \leq x} \log p = \sum_{n \leq x} \Lambda(n).$$

Es decir, $\psi(x)$ es la suma de los $[x]$ primeros coeficientes de la serie de Dirichlet $\sum_1^\infty \frac{c_n}{n^s}$ asociada a $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$.

De igual forma podemos hallar la función asociada a $\log \zeta(s)$

$$(1.10) \quad \Pi(x) = \sum_{p^m \leq x} \frac{1}{m} = \pi(x) + \frac{1}{2}\pi(x^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{3}\pi(x^{\frac{1}{3}}) + \dots$$

De (1.8) y (1.9) podremos deducir

$$(1.11) \quad -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = s \int_1^\infty \frac{\psi(x)}{x^{s+1}} dx \quad s > 1$$

y análogamente, de (1.7) y (1.10) obtendremos

$$(1.12) \quad \log \zeta(s) = s \int_1^\infty \frac{\Pi(x)}{x^{s+1}} dx \quad s > 1.$$

Para demostrar estas igualdades necesitamos la siguiente fórmula de sumación parcial, que es una forma conveniente de enunciar el lema de Abel, y que tiene numerosas aplicaciones.

LEMA 1. Sean $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \dots$ una sucesión creciente de números reales tal que $\lim \lambda_n = \infty$ y sea $C(x) = \sum_{\lambda_n \leq x} c_n$, donde c_n pueden ser reales o complejos.

Entonces, si $X \geq \lambda_1$ y ϕ tiene derivada continua, se tiene

$$(1.13) \quad \sum_{\lambda_n \leq X} c_n \phi(\lambda_n) = C(X)\phi(X) - \int_{\lambda_1}^X C(t)\phi'(t)dt.$$

Si además $C(X)\phi(X) \rightarrow 0$ cuando $X \rightarrow \infty$ entonces

$$(1.14) \quad \sum_1^\infty c_n \phi(\lambda_n) = - \int_{\lambda_1}^\infty C(t)\phi'(t)dt$$

en el sentido de equiconvergencia; es decir, si una de las partes de la igualdad es convergente, la otra también lo es y con el mismo valor.

DEMOSTRACIÓN:

Sea $S = \sum_{\lambda_n \leq x} c_n \phi(\lambda_n)$, entonces

$$\begin{aligned} C(X)\phi(X) - S &= \sum_{\lambda_n \leq X} c_n \{\phi(X) - \phi(\lambda_n)\} = \sum_{\lambda_n \leq X} \int_{\lambda_n}^X c_n \phi'(t)dt \\ &= \int_{\lambda_1}^X \sum_{\lambda_n \leq X} c_n \phi'(t)dt = \int_{\lambda_1}^X C(t)\phi'(t)dt, \end{aligned}$$

lo que prueba (1.13), y (1.14) haciendo tender $X \rightarrow \infty$.

Nota. Aunque en el teorema el punto de partida era $n = 1$, es a veces útil empezar desde otro punto, (e.g. 0 o 2), siendo para estos casos igualmente válido el resultado.

Tomando $\phi(x) = x^{-s}$, $\lambda_n = n$, $c_n = \Lambda(n)$, deducimos (1.11), ya que fijado $s > 1$

$$C(X)\phi(X) = \psi(x)X^{-s} = O(X^{1-s}) = o(1) \text{ cuando } X \rightarrow \infty.$$

La igualdad (1.12) se deduce de forma análoga.

Podemos ahora demostrar el siguiente teorema

TEOREMA 7. $\liminf \frac{\pi(x)}{x/\log x} \leq 1 \leq \limsup \frac{\pi(x)}{x/\log x}$ cuando $x \rightarrow \infty$.

DEMOSTRACIÓN:

Tomemos $f(s) = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$, y sea

$$\limsup_{x \rightarrow \infty}, (\inf) \frac{\psi(x)}{x} = \Lambda, (\lambda), \quad \limsup_{s \rightarrow 1^+}, (\inf) (s-1)f(s) = \Lambda', (\lambda')$$

Escojamos $\infty > B > \Lambda$, tal que $\psi(x) \leq Bx$ si $x \geq x_0$, cuya existencia nos la asegura el teorema de Chebychev.³

$$\begin{aligned} f(s) &= s \int_1^\infty \frac{\psi(x)}{x^{s+1}} dx \leq s \int_1^{x_0} \frac{\psi(x)}{x^{s+1}} dx + s \int_{x_0}^\infty \frac{B}{x^s} dx \\ &= s \int_1^{x_0} \frac{(\psi(x) - Bx)}{x^{s+1}} dx + \frac{sB}{s-1} \leq Ks + \frac{sB}{s-1}. \end{aligned}$$

Luego $(s-1)f(s) \leq Ks(s-1) + sB$. Haciendo tender $s \rightarrow 1^+$ obtenemos $\Lambda' \leq B$. Como esto es cierto para todo $B > \Lambda$, deducimos $\Lambda' \leq \Lambda$. Análogamente se demuestra que $\lambda \leq \lambda'$ y juntando ambas desigualdades obtenemos

$$(1.15) \quad \lambda \leq \lambda' \leq \Lambda' \leq \Lambda.$$

Si ahora fijamos $s > 1$, la función x^{-s} es decreciente en x , y por tanto

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^s} dx \leq \sum_1^\infty \frac{1}{n^s} \leq 1 + \int_1^\infty \frac{1}{x^s} dx.$$

Es decir,

$$\frac{1}{s-1} \leq \zeta(s) \leq \frac{s}{s-1} + 1$$

y $\lim_{s \rightarrow 1^+} \zeta(s)(s-1) = 1$. Además la función $\frac{\log x}{x^s}$ también es una función decreciente para $x > e$, ($s > 1$) y podemos proceder de forma similar para

³Haciendo una ligera modificación se puede demostrar el resultado suponiendo no conocido que $\Lambda < \infty$.

obtener

$$\begin{aligned}
-\zeta'(s) &= \sum_1^\infty \frac{\log n}{n^s} = \int_1^\infty \frac{\log x}{x^s} dx + O(1) \\
&= \frac{1}{(s-1)^2} \int_0^\infty ye^{-y} dy + O(1) \\
&= \frac{1}{(s-1)^2} + O(1),
\end{aligned}$$

donde hemos hecho el cambio de variable $x^{s-1} = e^y$. De la última igualdad deducimos que $\lim_{s \rightarrow 1+} (s-1)^2(-\zeta'(s)) = 1$ por lo que

$$(s-1)f(s) = \frac{-(s-1)^2\zeta'(s)}{(s-1)\zeta(s)} \rightarrow 1 \quad \text{cuando } s \rightarrow 1.$$

Entonces $\lambda' = \Lambda' = 1$, que con (1.15), y el teorema 4 nos da el resultado.

Aunque ya estamos en disposición de abordar la demostración del teorema de los números primos, veamos antes las interesantes fórmulas de Mertens, en las que se calcula el comportamiento asintótico de algunas expresiones, series y productos, que involucran a los números primos.

Este es el momento de verlas, ya que necesitaremos para su prueba el teorema de Chebychev, $\psi(x) = O(x)$ y el hecho demostrado en el teorema 7 de que $(s-1)\zeta(s) \rightarrow 1$ cuando $s \rightarrow 1$.

TEOREMA 8. Formulas de Mertens

$$(1.16) \quad \sum_{p \leq x} \frac{\log p}{p} = \log x + O(1)$$

$$(1.17) \quad \sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \log \log x + B + O\left(\frac{1}{\log x}\right)$$

$$(1.18) \quad \prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sim \frac{e^{-\gamma}}{\log x}$$

donde B y γ son constantes, siendo esta última la constante de Euler $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_1^n \frac{1}{k} - \log n\right)$

DEMOSTRACIÓN:

Hemos visto que $m! = \prod_{p \leq m} p^{\left[\frac{m}{p}\right]}$. Por tanto

$$(1.19) \quad \log m! = \sum_{n \leq m} \left[\frac{m}{n} \right] \Lambda(n).$$

Utilizando la fórmula de Stirling para $m!$ (A.17), tenemos

$$(1.20) \quad \log m! = m \log m + O(m) \text{ cuando } m \rightarrow \infty.$$

Si ahora en (1.19) sustituimos $\left[\frac{m}{n}\right]$ por $\frac{m}{n}$ estamos cometiendo un error $E(m)$ del orden de $\psi(m)$; es decir, $E(m) \leq \psi(m) = O(m)$. Igualando (1.19) y (1.20) obtenemos al dividir por m

$$\sum_{n \leq m} \frac{\Lambda(n)}{n} = \log m + O(1).$$

Podemos ahora sustituir m por una variable continua x , y la demostración de (1.16) se termina observando que

$$\left| \sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{n} - \sum_{p \leq x} \frac{\log p}{p} \right| \leq \sum_{p \leq x} \log p \left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \dots \right) < \sum_p \frac{\log p}{p(p-1)} < \infty.$$

Sea ahora

$$A(x) = \sum_{p_n \leq x} a_n, \text{ con } a_n = \frac{\log p_n}{p_n} \quad \text{y} \quad B(x) = \sum_{p_n \leq x} \frac{1}{p_n}.$$

Por el lema 1 tenemos, para $x \geq 2$

$$B(x) = \sum_{p_n \leq x} \frac{a_n}{\log p_n} = \frac{A(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{A(u)}{u(\log u)^2} du.$$

Por (1.16) $A(x) = \log x + r(x)$ con $|r(x)| \leq k$ para todo $x \geq 2$, y por tanto

$$(1.21) \quad \begin{aligned} B(x) &= \int_2^x \frac{du}{u(\log u)} + \int_2^x \frac{r(u)}{u(\log u)^2} du + 1 + \frac{r(x)}{\log x} \\ &= \log \log x + B + R(x) \end{aligned}$$

donde B es una constante y

$$|R(x)| = \left| -\int_x^\infty \frac{r(u)}{u(\log u)^2} du + \frac{r(x)}{\log x} \right| < k \left(\int_x^\infty \frac{1}{u(\log u)^2} du + \frac{1}{\log x} \right) = \frac{2k}{\log x},$$

con lo que queda demostrado (1.17).

Podemos hallar exactamente el valor de B , para ello observamos el comportamiento de la función $g(s) = \sum p^{-s}$ cuando $s \rightarrow 1^+$.

Por el lema 1,

$$g(s) = \sum_1^\infty b_n p_n^{1-s} = (s-1) \int_2^\infty B(x) x^{-s} dx$$

ya que $B(x)x^{1-s} \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \infty$.

Teniendo en cuenta (1.21) resulta

$$\begin{aligned} g(s) &= (s-1) \int_2^\infty \frac{\log \log x}{x^s} dx + (s-1) \int_2^\infty \frac{B}{x^s} dx + (s-1) \int_2^\infty \frac{R(x)}{x^s} dx \\ &= (I_1 + I_2 + I_3) \end{aligned}$$

Como $R(x) = o(1)$ entonces $|R(x)| < \varepsilon'$ si $x > x_{0,\varepsilon'}$ y por tanto, si $1 < s < s_0$ para algun $s_{0,\varepsilon}$,

$$|I_3| < \varepsilon + (s-1) \int_2^{x_0} |R(x)| dx < 2\varepsilon$$

y $|I_3| \rightarrow 0$ cuando $s \rightarrow 1^+$.

En I_1 , e I_2 sustituimos el límite inferior de integración por 1 con lo que cometemos un error de $o(1)$ cuando $s \rightarrow 1^+$. Si hacemos ahora el cambio de variable $x^{s-1} = e^y$ en I_1 tenemos

$$\begin{aligned} g(s) &= \int_0^\infty e^{-y} \log \frac{y}{(s-1)} dy + B + o(1) \\ (1.22) \quad &= -\gamma - \log(s-1) + B + o(1) \end{aligned}$$

cuando $s \rightarrow 1^+$. Hemos utilizado la fórmula $\int_0^\infty e^{-y} \log y dy = -\gamma$ (A.16). Además, por (1.7) podemos escribir

$$h(s) = \log(s-1) + g(s) = \log \{(s-1)\zeta(s)\} + \sum_p \left\{ \log \left(1 - \frac{1}{p^s} \right) + \frac{1}{p^s} \right\}$$

y

$$(1.23) \quad h(s) \rightarrow \sum_p \left\{ \log \left(1 - \frac{1}{p} \right) + \frac{1}{p} \right\}$$

cuando $s \rightarrow 1^+$, porque $(s-1)\zeta(s) \rightarrow 1$ con s , y la serie de la derecha es uniformemente convergente para $s \geq 1$ por comparación con $\sum_p \frac{1}{p^2}$. De (1.22) y (1.23) deducimos

$$B = \gamma + \sum_p \left\{ \log \left(1 - \frac{1}{p} \right) + \frac{1}{p} \right\}$$

Si sustituimos el valor de B en (1.17) obtenemos

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} - \sum_p \left\{ \log \left(1 - \frac{1}{p} \right) + \frac{1}{p} \right\} = \log \log x + \gamma + O\left(\frac{1}{\log x}\right)$$

Podemos restringir el rango infinito de la segunda suma a los primos que no excedan x , con lo que cometemos un error

$$O\left(\sum_{p > x} \frac{1}{p^2}\right) = O\left(\sum_{n > x} \frac{1}{n^2}\right) = O\left(\frac{1}{x}\right)$$

y obtenemos

$$-\sum_{p \leq x} \log \left(1 - \frac{1}{p} \right) = \log \log x + \gamma + O\left(\frac{1}{\log x}\right).$$

Es decir,

$$\prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p} \right) = \frac{e^{-\gamma}}{\log x} e^{O\left(\frac{1}{\log x}\right)} = \frac{e^{-\gamma}}{\log x} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{\log x}\right) \right\}$$

→ que es equivalente a (1.18).

Teorema de los números primos

Anteriormente hemos visto como aparecía la función zeta en el problema. Sin embargo hasta ahora la hemos tratado como una función de variable real.

Esta forma de considerar la función no nos permite obtener toda la información necesaria para poder seguir adelante. A partir de ahora estudiaremos

$$\zeta(s) = \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

como una función de variable compleja $s = \sigma + it$.

Definimos x^s , en general con $x > 0$, como $\exp(s \log x)$ donde $\log x$ tiene la determinación real. De esta forma $|n^s| = n^\sigma$, y aplicando el test de Weierstrass, obtenemos la convergencia uniforme de la serie en $\sigma = 1 + \delta$, donde $\delta > 0$ es un número fijo. Por tanto $\zeta(s)$ es una función regular en $\sigma > 1$ y, por el teorema de Weierstrass, sus derivadas se pueden calcular derivando término a término.

Podemos ahora deducir que las fórmulas establecidas para $\zeta(s)$ en $s > 1$, son aún válidas en el semiplano $\sigma > 1$, ya que las series que intervienen pueden ser mayoradas por sí mismas cambiando σ por s . La rama del logaritmo que se considera en (1.7) y (1.12) es aquella que es real en el eje real, que está bien definida y sin singularidades porque $\zeta(s)$ no se anula en $\sigma > 1$. Esto último se debe a la representación de ζ en esa región, $\zeta(s) = \prod (1 - p^{-s})^{-1}$, donde ninguno de los factores se anula.

Una vez que sabemos cierta la relación

$$(1.24) \quad -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = s \int_1^{\infty} \frac{\psi(u)}{u^{s+1}} du \quad \sigma > 1,$$

intentamos estudiar el comportamiento de la función $\psi(x)$ mediante el de la función zeta, mucho más manejable desde que evitamos expresiones que involucren los números primos. Para ello necesitamos "invertir" la relación (1.24), y poner $\psi(x)$ en función de $\zeta(s)$, lo que podríamos hacer introduciendo la teoría de análisis de Fourier, y utilizando la fórmula de inversión. Sin embargo lo haremos de una forma más directa y ya clásica dentro de la teoría de números utilizando la fórmula de Perron, que veremos más adelante en el transcurso de la demostración. En cualquier caso, el estudio directo de $\psi(x)$ traería complicaciones de convergencia, y necesitamos regularizar la función de alguna forma.

Para ello se introduce la función $\psi_1(x) = \int_0^x \psi(t)dt$, algo así como la media aritmética de $\psi(x)$ y por lo tanto algo más regular, lo suficiente para evitar dichas complicaciones.

Para continuar la demostración del teorema del número primo, debemos ahora estudiar el comportamiento de $\psi_1(x)$ a partir del de la función $f(s) = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$, y es en este punto es donde entra la teoría de la función zeta.

En primer lugar deberemos extender un poco el dominio de definición de $\zeta(s)$ hasta ahora definida solamente en $\sigma > 1$, en particular lo extenderemos a $\sigma > 0$, ya que de la regularidad de $f(s)$ en la banda crítica, así como de su orden, dependerá la demostración del teorema. Podemos observar ahora la importancia del estudio de los ceros de la función $\zeta(s)$, que serán los polos de $f(s)$.

Una vez estudiado el comportamiento de $\psi_1(x)$, en particular estableceremos $\psi_1(x) \sim \frac{1}{2}x^2$, tendremos que transferirlo a $\psi(x)$, y establecer $\psi(x) \sim x$. Para lo que utilizaremos un teorema de tipo tauberiano, teoremas con los que se consigue información de la función a través de su media.

Existe una gran variedad de teoremas tauberianos, y escogiendo en vez de $\psi_1(x)$ la función auxiliar adecuada en cada caso, hay para cada uno de ellos una demostración distinta del teorema de los números primos, todos ellos sin cambiar la idea original.

Continuación analítica

TEOREMA 9. La función $\zeta(s)$ admite una continuación analítica en el semiplano $\sigma > 0$ como una función univaluada cuya única singularidad es un polo simple de residuo 1 en $s = 1$.

Una demostración de la primera parte del teorema se puede conseguir gracias a la siguiente representación de $\zeta(s)$ por medio de una serie alternada. Se observa que para $\sigma > 1$

$$1 - 2^{-s} + 3^{-s} - 4^{-s} + \cdots = \zeta(s) - 2 \sum_{n=1}^{\infty} (2n)^{-s} = (1 - 2^{1-s}) \zeta(s).$$

Por tanto

$$\zeta(s) = (1 - 2^{1-s})^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^{-s}$$

que nos muestra la continuación analítica para $\sigma > 0$ por la convergencia de la serie alternante. Esta representación muestra en particular que

$$(1.25) \quad \zeta(\sigma) < 0 \quad \text{si} \quad 0 < \sigma < 1.$$

Sin embargo es interesante que veamos la siguiente demostración del teorema 9

Si aplicamos el lema 1 con $\lambda_n = n$, $c_n = 1$ y $\phi(x) = x^{-s}$ para $\sigma > 1$ tenemos para $x \geq 1$

$$(1.26) \quad \sum_{n \leq x} \frac{1}{n^s} = \frac{[x]}{x^s} + s \int_1^x \frac{[t]}{t^{s+1}} dt$$

$$= \frac{[x]}{x^s} + \frac{s}{x^{s-1}(1-s)} + \frac{s}{s-1} - s \int_1^x \frac{\{t\}}{t^{s+1}} dt.$$

Haciendo x tender a infinito resulta la expresión

$$(1.27) \quad \zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s \int_1^{\infty} \frac{\{t\}}{t^{s+1}} dt.$$

Como la última integral es uniformemente convergente en $\sigma > \delta$ para cualquier $\delta > 0$ fijo, la expresión (1.27) es una función regular en $\sigma > 0$, lo que demuestra el teorema.

Una vez definida en un dominio mayor, y gracias a la fórmula (1.27) podemos dar ciertas cotas para la función zeta y para su derivada.

Orden de magnitud

Para el estudio de la función zeta nos restringiremos al semiplano superior $t > 0$, ya que de (1.27) se deduce $\overline{\zeta(s)} = \zeta(\bar{s})$.

Es trivial ver que $\zeta(s)$ está acotada en el semiplano $\sigma \geq 1 + \delta$ para todo $\delta > 0$ fijo, pues

$$|\zeta(s)| = |\zeta(\sigma)| \leq |\zeta(1 + \delta)|.$$

TEOREMA 10. Se tiene

$$(1.28) \quad |\zeta(s)| < A \log t \quad (\sigma \geq 1, t \geq 2)$$

$$(1.29) \quad |\zeta'(s)| < A \log^2 t \quad (\sigma \geq 1, t \geq 2)$$

$$(1.30) \quad |\zeta(s)| < A(\delta)t^{(1-\delta)} \quad (\sigma \geq \delta, t \geq 1 \text{ si } 0 < \delta < 1)$$

DEMOSTRACIÓN:

En la región $\sigma > 0$, $t \geq 1$ y $X \geq 1$ podemos utilizar las fórmulas (1.26) y (1.27), obteniendo

$$(1.31) \quad \zeta(s) = \sum_{n \leq X} \frac{1}{n^s} + \frac{1}{(s-1)X^{s-1}} + \frac{\{X\}}{x^s} - s \int_X^\infty \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx.$$

por tanto

$$(1.32) \quad |\zeta(s)| \leq \sum_{n \leq X} \frac{1}{n^\sigma} + \frac{1}{tX^{\sigma-1}} + \frac{1}{x^\sigma} + \left(1 + \frac{t}{\sigma}\right) \frac{1}{X^\sigma}$$

ya que $|s| < \sigma + t$, si además $\sigma \geq 1$ queda

$$|\zeta(s)| < (\log X + 1) + \frac{t}{X} + 3$$

y escogiendo $t = X$, obtenemos (1.28).

Si $\sigma \geq \delta$ con $0 < \delta < 1$, después de (1.32) queda

$$\begin{aligned} |\zeta(s)| &< \sum_{n \leq X} \frac{1}{n^\delta} + \frac{X^{1-\delta}}{t} + \left(2 + \frac{t}{\delta}\right) \frac{1}{X^\delta} \\ &< \int_0^{[X]} \frac{1}{x^\delta} dx + \frac{X^{1-\delta}}{t} + \frac{3t}{\delta X^\delta} \leq X^{1-\delta} \left(\frac{1}{1-\delta} + \frac{1}{t}\right) + \frac{3t}{\delta X^\delta} \end{aligned}$$

y de nuevo escogiendo $X = t$, obtenemos (1.30).

La desigualdad (1.29) puede deducirse de manera analoga a las anteriores, derivando en (1.31), sin embargo aquí la demostraremos de distinta forma.

Sea $s_0 = \sigma_0 + it_0$ un punto en la región $\sigma \geq 1$, $t \geq 2$, y sea C un círculo de centro s_0 y radio $\rho < \frac{1}{2}$, de la fórmula de Cauchy podemos deducir

$$|\zeta'(s_0)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\zeta(s)}{(s-s_0)^2} ds \right| \leq \frac{M}{\rho}$$

donde M es el máximo de $|\zeta(s)|$ sobre C . Además sobre el círculo se cumple $\sigma \geq \sigma_0 - \rho \geq 1 - \rho$, y $1 < t < 2t_0$, por tanto aplicando (1.30) obtenemos

$$M < 2t_0^\rho \left(\frac{1}{\rho} + 1 + \frac{3}{1-\rho} \right) < \frac{10t_0^\rho (\log t_0)^2}{\rho}$$

en donde hemos utilizado $A(\delta) \leq \left(\frac{3}{\delta} + 1 + \frac{1}{1-\delta} \right)$ lo que se deduce de la demostración de (1.30), y $\rho < 1 - \rho < 1$, $2^\rho < 2$. Si escogemos $\rho = \frac{1}{\log t_0 + 2}$, queda $t_0^\rho = e^{\rho \log t_0} < e$, y por tanto

$$|\zeta'(s)| < 10e(\log t_0 + 2)^2$$

que implica (1.29) ya que el razonamiento es válido para cualquier s_0 en esa región.

Observación. Las desigualdades (1.28), (1.29) y (1.30) no intentan ser las mejores posibles. En la literatura existen mejores acotaciones relativas a la función zeta, siendo todavía un problema abierto el encontrar el verdadero orden de $\zeta(s)$. En el capítulo siguiente, dedicado a la función zeta, tendremos oportunidad de ver algunas acotaciones más, de las que como veremos, las de mayor interés son las referentes a la banda crítica, y más concretamente a la recta $\sigma = \frac{1}{2}$.

Ceros

Como ya hemos observado, los ceros de la función zeta juegan un papel importante dentro de la teoría de los números primos desde que son las singularidades de $\log \zeta(s)$ y $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$.

Hasta ahora sabemos que $\zeta(s) \neq 0$ en $\sigma > 1$, lo que se deducía de la fórmula producto de Euler. Dicha fórmula sin embargo no nos ofrece ninguna otra información en el resto del plano complejo.

TEOREMA 11. $\zeta(s)$ no tiene ceros en $\sigma = 1$ y además $\frac{1}{\zeta(s)} = O(\log^7 t)$ uniformemente en $\sigma \geq 1$ cuando $t \rightarrow \infty$

DEMOSTRACIÓN:

Para la demostración vamos a utilizar el argumento de de la Valle Poussin, deduciendo el resultado de la simple desigualdad

$$(1.33) \quad 0 \leq 2(1 + \cos \theta)^2 = 3 + 4 \cos \theta + 2 \cos 2\theta.$$

Por (1.7) se cumple para $\sigma > 1$

$$\log |\zeta(\sigma + it)| = \Re \left(\sum_2^\infty c_n n^{-\sigma - it} \right) = \sum_2^\infty c_n n^{-\sigma} \cos(t \log n),$$

donde $c_n = \frac{1}{n}$ si $n = p^m$ y cero en otro caso. Por tanto $c_n \geq 0$ y

$$\begin{aligned} \log |\zeta^3(\sigma) \zeta^4(\sigma + it) \zeta(\sigma + 2it)| &= \\ &= \sum c_n n^{-\sigma} \{3 + 4 \cos(t \log n) + 2 \cos(2t \log n)\} \geq 0. \end{aligned}$$

Luego

$$(1.34) \quad \left| \frac{1}{((\sigma - 1)\zeta(\sigma))^3} \left(\frac{\zeta(\sigma + it)}{(\sigma - 1)} \right)^4 \zeta(\sigma + 2it) \right| \geq \frac{1}{\sigma - 1}.$$

Si en el punto $(1 + it)$ hubiese un cero, como $\zeta(s)$ es regular allí y en $(1 + 2it)$, y tiene un polo simple de residuo 1 en $s = 1$, haciendo tender $\sigma \rightarrow 1$, el miembro de la izquierda en (1.34) tendría un límite finito igual a $|\zeta'(1 + it)^4 \zeta(1 + 2it)|$, mientras que la derecha tendería a infinito, lo que contradice la desigualdad y prueba la primera parte del teorema.

Observación

Es importante darse cuenta de lo fundamental que es la relación entre $1 + it$ y $1 + 2it$ en la anterior demostración. Este hecho se hace más visible en la prueba debida a Hadamard⁴, en la que nos muestra que la existencia de un cero de la función zeta en el punto $(1 + it)$ implicaría que $\zeta(1 + 2it)$ fuese un polo. La idea es observar que si $\zeta(1 + it_0)$ es un cero, éste tiene que ser simple, ya que por (1.6), para σ cercana a 1 se tiene

$$\left| \frac{1}{\zeta(s)} \right| = \left| \sum_1^\infty \frac{\mu(n)}{n^s} \right| < \sum_1^\infty \frac{1}{n^\sigma} = \zeta(\sigma) < \frac{A}{\sigma - 1}$$

⁴ver [T1] 45-48

así cuando σ está cerca de 1 $\log(\sigma-1) \sim \log |\zeta(s)| - \Re h(s) = \sum \frac{\cos(t_0 \log p)}{p^\sigma}$, donde hemos utilizado (1.7) de forma que $\log \zeta(s) = \sum_p \frac{1}{p^s} + h(s)$ con $h(s)$ regular en $\sigma > 1/2$. Como $\zeta(\sigma)$ tiene un polo simple en $\sigma = 1$, $\sum \frac{1}{p^\sigma} \sim \log \left(\frac{1}{\sigma-1} \right)$ uniendo ambas consideraciones, es como decir que $\cos(t_0 \log p)$ es aproximadamente -1 para la mayoría de los p , y por tanto $\cos(2t_0 \log p) \approx 1$; para muchos p , de donde

$$\log |\zeta(\sigma + 2it_0)| \sim \sum_p \frac{\cos(2t_0 \log p)}{p^\sigma} \sim \sum_p \frac{1}{p^\sigma} \sim \log \left(\frac{1}{\sigma-1} \right).$$

Para probar la segunda parte del teorema basta considerar $1 \leq \sigma \leq 2$, ya que si $\sigma > 2$

$$\left| \frac{1}{\zeta(s)} \right| = \left| \prod_p (1 - p^{-s}) \right| \leq \prod_p (1 + p^{-\sigma}) < \zeta(\sigma) \leq \zeta(2).$$

Supongamos entonces $1 < \sigma \leq 2$ y $t \geq 2$. Por (1.34) se tiene

$$(\sigma-1)^3 \leq |(\sigma-1)\zeta(\sigma)|^3 |\zeta(\sigma+it)|^4 |\zeta(\sigma+2it)| \leq C_1^3 |\zeta(\sigma+it)|^4 C_2 \log t$$

en donde la última desigualdad se deduce de (1.28). Por tanto

$$(1.35) \quad |\zeta(\sigma+it)| \geq \frac{C_3(\sigma-1)^{3/4}}{(\log t)^{1/4}},$$

siendo la desigualdad anterior obviamente cierta para $\sigma = 1$. Sea ahora $1 < \eta < 2$, entonces para $1 \leq \sigma \leq \eta$, $t \geq 2$

$$\rightarrow |\zeta(s+it) - \zeta(\eta+it)| = \left| \int_\sigma^\eta \zeta'(u+it) du \right| \leq C \log^2 t (\eta-1).$$

Es decir,

$$\rightarrow |\zeta(s+it)| \geq |\zeta(\eta+it)| - C \log^2 t (\eta-1) \geq \frac{C_3(\sigma-1)^{3/4}}{(\log t)^{1/4}} - C \log^2 t (\eta-1)$$

Esta desigualdad es también cierta para $2 \geq \sigma \geq \eta$ sin más que observar (1.35).

Por tanto es cierto para todo $2 \geq \sigma \geq 1$ y todo $2 > \eta > 1$, escogiendo $\eta =$

$1 + \log^{-9} t \left(\frac{C_3}{2C}\right)^4$ con $t \gg t_0$ de modo que $\eta < 2$, se demuestra la segunda parte del teorema.

→ En realidad, con el mismo esfuerzo se puede demostrar un poco más, ya que si consideramos la región $\sigma \geq 1 - A/\log t$ se tiene

→ $|n^{-s}| = e^{-\sigma \log n} \leq \exp\{-(1 - A/\log t) \log n\} \leq n^{-1} e^A.$

Sustituyendo en (1.32) con $X = [t]$ queda

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{[t]} O\left(\frac{1}{n}\right) + O\left(\frac{1}{t}\right) + O(1) = O(\log t).$$

→ Analogamente a la demostración de (1.29), obtenemos en la región $\sigma \geq 1 - A/2\log t$

→ $\zeta'(s) = O(\log^2 t).$

Con las anteriores desigualdades, se obtiene para $\sigma \geq 1 - A/2\log t$

$$|\zeta(1+it) - \zeta(\sigma+it)| = \left| \int_{\sigma}^1 \zeta'(u+it) du \right| = O((1-\sigma) \log^2 t)$$

y por el teorema 11 queda

$$|\zeta(\sigma+it)| > A \log^{-7} t - A(1-\sigma) \log^2 t.$$

De donde se deduce que en la región $\sigma > 1 - A \log^{-9} t$

$$(1.36) \quad \frac{1}{\zeta(s)} = O(\log^7 t)$$

en particular $\zeta(s)$ no tiene ceros en dicha región.

La desigualdad que hemos utilizado para demostrar el teorema 11 (1.33), no es mas que un ejemplo de las infinitas desigualdades del mismo estilo $a_0 + a_1 \cos \theta + \dots + a_m \cos(m\theta) \geq 0$, que servirían para el mismo propósito, siendo esencialmente las únicas condiciones que se requieren que a_i sean positivas y $a_0 < a_1$.

Comportamiento asintótico de $\psi(x)$

Definimos una nueva función $\psi_1(x)$ de la siguiente forma

$$\psi_1(x) = \int_0^x \psi(u) du = \int_1^x \psi(u) du = \sum_{n \leq x} (x - n) \Lambda(n)$$

(en donde la ultima igualdad es una simple consecuencia del lema 1), y estudiando el orden de esta nueva función deduciremos más adelante el comportamiento de $\psi(x)$. En primer lugar vamos a demostrar que se cumple la siguiente igualdad

$$(1.37) \quad \psi_1(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{x^{s+1}}{s(s+1)} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) ds$$

valida para $x > 0$, siendo el camino de integración la recta $\sigma = c > 1$, como consecuencia del resultado siguiente

LEMA 2. (Fórmula de Perron) Sea k un entero positivo, $c > 0$, $y > 0$ entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{y^s}{s(s+1) \cdots (s+k)} = \begin{cases} 0 & y \leq 1 \\ \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{y}\right)^k & y > 1 \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN:

Sea $y \leq 1$. Consideramos el recinto encerrado por el arco de círculo $C_1 = \{s/|s| = R, \sigma \geq c\}$ y el segmento $I = \{s/|s| \leq R, \sigma = c\}$. En ese recinto el integrando es una función analítica, y aplicando el teorema de Cauchy obtenemos

$$\int_I \frac{y^s}{s(s+1) \cdots (s+k)} ds = - \int_{C_1} \frac{y^s}{s(s+1) \cdots (s+k)} ds.$$

Tomando $R > 2k$ tenemos

$$\left| \frac{y^s}{s(s+1) \cdots (s+k)} \right| \leq \frac{y^c}{R(R-1) \cdots (R-k)} \leq \frac{y^c}{(R/2)^{k+1}}$$

y por tanto cuando $R \rightarrow \infty$

$$\left| \int_{C_1} \frac{y^s}{s(s+1) \cdots (s+k)} ds \right| \leq \frac{2\pi R y^c}{(R/2)^{k+1}} \rightarrow 0,$$

con lo que se demuestra el caso $y \leq 1$.

Supongamos ahora $y > 1$. En este caso consideramos el recinto encerrado por I y por $C_2 = \{s/|s| = R, \sigma \leq c\}$. Los únicos polos del integrando son $s = -n$ con $n = 0, \dots, k$ y por el teorema de los residuos tenemos

$$\frac{1}{2\pi i} \int_I \frac{y^s}{s(s+1)\cdots(s+k)} ds + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{y^s}{s(s+1)\cdots(s+k)} ds = \sum_{n=0}^k \text{Res}(-n)$$

Como en el caso anterior se demuestra que $\int_{C_2} \frac{y^s}{s(s+1)\cdots(s+k)} ds \rightarrow 0$ cuando $R \rightarrow \infty$. Además, si llamamos $f(s)$ al integrando nos queda

$$\text{Res}(-n) = \lim_{s \rightarrow -n} (s+n)f(s) = \frac{(-1)^n}{k!} y^{-n} \binom{k}{n} \text{ y por tanto}$$

$$\sum_{n=0}^k \text{Res}(-n) = \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{y}\right)^k,$$

como queríamos ver.

Vamos ahora a deducir (1.37). La igualdad

$$\frac{\psi_1(x)}{x} = \sum_{n \leq x} \left(1 - \frac{n}{x}\right) \Lambda(n) = \sum_1^\infty \frac{\Lambda(n)}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{(x/n)^s}{s(s+1)} ds$$

es consecuencia del lema anterior sin más que elegir $k = 1$. Si $c > 1$ podemos intercambiar la suma con la integral, ya que

$$\sum_1^\infty \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left| \frac{\Lambda(n) \left(\frac{x}{n}\right)^s}{s(s+1)} \right| ds < x^c \sum_1^\infty \frac{\Lambda(n)}{n^c} \int_{-\infty}^\infty \frac{dt}{c^2 + t^2} < \infty.$$

Por tanto

$$\frac{\psi_1(x)}{x} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{x^s}{s(s+1)} \sum_1^\infty \frac{\Lambda(n)}{n^s} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{x^s}{s(s+1)} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) ds,$$

que es equivalente a (1.37).

TEOREMA 12. $\psi_1(x) \sim \frac{1}{2}x^2$ cuando $x \rightarrow \infty$

DEMOSTRACIÓN:

Para la demostración vamos a hacer uso de (1.37). Pero antes observemos que podemos evitar la singularidad de $\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)$ en $s = 1$ gracias a la siguiente identidad

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{x^{s-1}}{s(s+1)} \frac{1}{s-1} ds = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 \quad c > 1,$$

consecuencia directa del lema 2 sin más que hacer el cambio de variable $s-1 = u$.

De esta forma para $c > 1$

$$\frac{\psi_1(x)}{x^2} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{x^{s-1}}{s(s+1)} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{1}{s-1}\right) ds.$$

Si la integral tendiese a cero cuando $x \rightarrow \infty$ ya tendríamos el resultado.

Por este motivo nos interesa cambiar la línea de integración a $c = 1$, mediante el teorema de los residuos. Como $\zeta(1+it) \neq 0$ podemos integrar a lo largo de las rectas $L_1 = \{c+it/-T \leq t \leq T\}$, $L_2 = \{\sigma+iT/1 \leq \sigma \leq c\}$, $L_3 = \{1+it/-T \leq t \leq T\}$ y $L_4 = \{\sigma-iT/1 \leq \sigma \leq c\}$ en el sentido positivo, y por el teorema de Cauchy el resultado será 0 al ser la función regular en ese recinto. Además sobre las rectas L_2 y L_4 se cumplen las siguientes acotaciones

$$\left|\frac{1}{s(s+1)}\right| \leq \frac{1}{T^2}; \quad \left|\frac{1}{s(s+1)(s-1)}\right| \leq \frac{1}{T^3} \leq \frac{1}{T^2} \quad \text{y} \quad \left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| \leq M \log^9 T$$

en donde hemos aplicado los teoremas 10 y 11. Por tanto si definimos

$$h(s) = \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{1}{s-1}\right) \frac{1}{s(s+1)}$$

tenemos

$$\left|\int_{L_i} x^{s-1} h(s) ds\right| \leq (c-1)x^{c-1} \frac{M \log^9 T + 1}{T^2} \rightarrow 0 \quad i = 2, 4$$

cuando $T \rightarrow \infty$. De esta forma

$$(1.38) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{s-1} h(s) ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i \log(x)t} h(1+it) dt$$

que es la transformada de Fourier de la función h en el punto $\log x$. De nuevo por los teoremas 10 y 11 se obtiene $|h(1+it)| \ll \frac{M \log^9 t}{t^2}$ cuando $t \rightarrow \infty$ y por tanto $h(1+it)$ es una función de L^1 . Aplicando el lema de Riemann-Lebesgue obtenemos que (1.38) $\rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \infty$, de donde se deduce el resultado.

Ya solo nos falta trasladar la información obtenida en el teorema 12 a la función $\psi(x)$ por medio del teorema tauberiano.



TEOREMA 13. Sea f monótona creciente, $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ y tal que $F(x) \sim x^a$, ($a > 0$) cuando $x \rightarrow \infty$, entonces $f(x) \sim ax^{a-1}$ cuando $x \rightarrow \infty$.

DEMOSTRACIÓN:

Sea $c > 1$. Por ser f monótona creciente se tiene

$$f(x) \leq \frac{1}{(c-1)x} \int_x^{cx} f(t)dt = \frac{1}{(c-1)x} (F(cx) - F(x)).$$

Dividiendo por x^{a-1} ,

$$\frac{f(x)}{x^{a-1}} \leq \frac{1}{(c-1)} \left(\frac{F(cx)}{(cx)^a} c^a - \frac{F(x)}{x^a} \right),$$

de donde

$$\overline{\lim} \frac{f(x)}{x^{a-1}} \leq \frac{c^a - 1}{c - 1}.$$

Pero la anterior desigualdad es cierta para todo $c > 1$, por lo que podemos aproximarla tanto como queramos a la derivada de x^a en el punto 1 para obtener

$$\overline{\lim} \frac{f(x)}{x^{a-1}} \leq a.$$

Si ahora escogemos $c < 1$ y procedemos de igual forma obtendremos

$$\underline{\lim} \frac{f(x)}{x^{a-1}} \geq a.$$

De las dos desigualdades anteriores se deduce

$$f(x) \sim ax^{a-1}.$$

TEOREMA 14. (Teorema de los números primos)

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}.$$

DEMOSTRACIÓN:

$\psi(x)$ esta en las condiciones del teorema 13, por tanto del teorema 12 deducimos $\psi(x) \sim x$, que por el teorema 4 es equivalente al resultado.

Como consecuencia del teorema 14 podemos deducir un resultado para el n -esimo primo p_n .

TEOREMA 15.

$$p_n \sim n \log n$$

cuando $n \rightarrow \infty$

DEMOSTRACIÓN:

Sea $y = \pi(x)$, entonces cuando $x \rightarrow \infty$

$$(1.39) \quad \frac{y \log x}{x} \rightarrow 1.$$

Tomando logaritmos queda $\log y + \log \log x - \log x \rightarrow 0$, o de otra forma

$$\frac{\log y}{\log x} \rightarrow 1,$$

y por (1.39) tenemos $\frac{y \log y}{x} \rightarrow 1$.

Si ahora escogemos $x = p_n$, entonces $y = n$ y se deduce el resultado.

Recíprocamente el teorema 15 implica el teorema de los números primos, y por tanto son equivalentes. Supongamos cierto el teorema 15, y sea $n = n(x)$ tal que $p_n \leq x \leq p_{n+1}$. Como $p_n \sim n \log n$ y $p_{n+1} \sim (n+1) \log(n+1) \sim n \log n$ cuando $x \rightarrow \infty$, se sigue que $x \sim n \log n$ y por tanto $x \sim y \log y$, con $y = \pi(x) = n$. Como en el razonamiento del teorema 15 podemos deducir $\log x \sim \log y$, de donde $y \sim \frac{x}{\log x}$.

La distribución de los números primos es una de las aplicaciones, quizá la más importante, de la teoría de la función zeta. Para la demostración del teorema de los números primos hemos tenido que ver algunas de las propiedades de $\zeta(s)$, que sin embargo están lejos de ser los mejores resultados posibles, que por otra parte no eran imprescindibles para el desarrollo del capítulo. En el capítulo siguiente veremos algo más sobre $\zeta(s)$ y algunos de los problemas que existen alrededor de esta teoría.

La Función Zeta

→ Este capítulo no intenta ser un estudio exhaustivo de la función Zeta, para lo que existen numerosos libros que hacen un detallado examen de sus propiedades y comportamiento. Sin embargo veremos los resultados básicos de la teoría que nos darán una visión general del problema y nos proporcionarán los instrumentos necesarios para las pruebas de resultados posteriores.

Hemos podido observar cómo aparece de manera natural la función zeta al considerar la distribución de los números primos, pero en realidad no nos ha hecho falta ahondar demasiado en la naturaleza de $\zeta(s)$ para establecer resultados relevantes acerca de la distribución de los números primos. De esta forma podemos esperar que un mejor estudio de la función traiga como consecuencia mejoras en el problema.

Si nos fijamos en nuestra actual $\zeta(s)$ observamos que sólo está definida para $\text{Re}(s) > 0$. No es ésta, sin embargo, una frontera natural para la función zeta. Este hecho se recoge en el siguiente teorema.

TEOREMA 16. *La función zeta se puede extender como una función meromorfa a todo el plano complejo con un único polo en el punto $s = 1$.*

→ Se puede llegar a la demostración del teorema de muchas formas distintas. Una de ellas consiste en extender el dominio de definición, paso a paso, integrando por partes en (1.27) y de esa manera la fórmula de sumación de Euler-Maclaurin nos proporciona, para $\sigma > 1$ y $n \geq 1$ fijo (A.26), la expresión

$$(2.1) \quad \zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{B_{2k} \Gamma(s+2k-1)}{(2k)! \Gamma(s)} - \frac{\Gamma(s+2n+1)}{(2n+1)! \Gamma(s)} \int_1^\infty \bar{B}_{2n+1}(t) t^{-s-2n-1} dt.$$

→ Usando el hecho de que $\bar{B}_{2n+1} = O(1)$ (A.25), la expresión (2.1) se cumple en el semiplano $\sigma + 2n > 0$, por continuación analítica. La demostración se termina observando que n se puede hacer tan grande como se quiera.

La fórmula (2.1) se puede usar para obtener aproximaciones numéricas de valores de $\zeta(s)$. Sin embargo un resultado mucho más espectacular es la fórmula

explícita establecida por Euler para el caso $s = 2k$

TEOREMA 17. Si $k = 1, 2, \dots$, y B_j son los números de Bernoulli (A.20), entonces

$$\zeta(2k) = \frac{(-1)^{k+1}(2\pi)^{2k} B_{2k}}{2(2k)!}.$$

DEMOSTRACIÓN:

Consideremos la identidad

$$\operatorname{sen}(x) = x \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 k^2}\right).$$

Tomando $x = -\frac{1}{2}iu$ y calculando la derivada logarítmica obtenemos

$$\frac{1}{e^u - 1} = \frac{1}{u} - \frac{1}{2} + \sum_1^{\infty} \frac{2u}{4k^2\pi^2 + u^2}$$

para todo $u \neq \pm 2m\pi i$.

El desarrollo en serie de potencias (A.20) sigue siendo válido si consideramos $x = u$ complejo con $|u| < 2\pi$, por tanto para $|u| < 2\pi$ tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k} u^{2k}}{2k!} &= \frac{u}{e^u - 1} - 1 + \frac{u}{2} = 2 \sum_{r=1}^{\infty} \frac{u^2}{4r^2\pi^2 + u^2} \\ &= 2 \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \left(\frac{u}{2r\pi}\right)^{2k} \\ &= 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \left(\sum_{r=1}^{\infty} (2r\pi)^{-2k}\right) u^{2k} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \{2(2\pi)^{-2k} \zeta(2k) (-1)^{k+1}\} u^{2k}. \end{aligned}$$

Igualando los coeficientes de u^{2k} obtenemos el resultado. En particular

$$\zeta(2) = \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \zeta(4) = \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Este no es el caso de los enteros positivos impares, de los que no sólo no existe una fórmula sencilla para $\zeta(2k+1)$, sino que, exceptuando el resultado de R. Apery en el que establece la irracionalidad de $\zeta(3)$, se desconoce casi todo acerca de su aritmética cuando $k > 1$.

LA ECUACIÓN FUNCIONAL

El siguiente teorema, aunque de forma algo más complicada, nos proporciona una nueva prueba del teorema 16. No es éste sin embargo su principal interés, ya que además en él se establece la famosa ecuación funcional de la función zeta, principal herramienta en el estudio de $\zeta(s)$.

TEOREMA 18. *Para todo s complejo se cumple*

$$\rightarrow (2.2) \quad \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s).$$

Hay muchas formas de demostrar la ecuación funcional (ver [T1]). De entre todas ellas vamos a dar una de las pruebas originales de Riemann, que es además una de las más elegantes.

DEMOSTRACIÓN:

Partimos de la representación integral de la función Gamma en $\sigma > 0$ (A.14)

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\frac{s}{2}-1} dt.$$

Haciendo el cambio de variable $t = n^2 \pi t$ tenemos

$$\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{n^s \pi^{\frac{s}{2}}} = \int_0^\infty e^{-n^2 \pi t} t^{\frac{s}{2}-1} dt$$

y sumando en n , obtenemos para $\sigma > 1$

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty e^{-n^2 \pi t} t^{\frac{s}{2}-1} dt.$$

Podemos intercambiar la suma con la integral ya que

$$\sum_{n>N} e^{-n^2 \pi t} = O\left(e^{-N^2 \pi t}\right) \text{ si } t \geq 1 \text{ y } \sum_{n=1}^\infty e^{-n^2 \pi t} = O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \text{ si } 0 < t < 1.$$

De esta forma nos queda la expresión

$$(2.3) \quad \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \int_0^\infty t^{\frac{s}{2}-1} \omega(t) dt = \int_1^\infty t^{\frac{s}{2}-1} \omega(t) dt + \int_1^\infty t^{-\frac{s}{2}-1} \omega\left(\frac{1}{t}\right) dt$$

donde

$$\omega(t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi t}.$$

Esto nos lleva a considerar la función $\theta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2 \pi t}$, de la que sabemos que satisface la siguiente ecuación funcional⁵

$$\theta(x) = x^{-\frac{1}{2}} \theta(x^{-1}) \quad \text{para } x > 0$$

y cuya demostración se reduce a aplicar la fórmula de sumación de Poisson (A.27), a la función $g(t) = e^{-t^2 \pi x}$, cuya trasformada de Fourier es $\hat{g}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\xi^2 \pi \frac{1}{x}}$.

Dicha ecuación nos permite escribir

$$\omega(x^{-1}) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}} \omega(x),$$

de lo que se sigue

$$\int_1^{\infty} \omega\left(\frac{1}{t}\right) t^{-\frac{s}{2}-1} dt = -\frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} + \int_1^{\infty} \omega(t) t^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} dt.$$

Teniendo en cuenta (2.3), obtenemos

$$(2.4) \quad \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^{\infty} \left(t^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} + t^{\frac{s}{2}-1}\right) \omega(t) dt.$$

La última integral es absolutamente convergente para todo s ya que $\omega(t) = O(e^{-\pi t})$, y por tanto define una función regular en todo el plano complejo que nos proporciona la continuación analítica de $\zeta(s)$. Además dicha función es simétrica respecto de la recta $\sigma = \frac{1}{2}$, por tanto cambiando s por $(1-s)$ en (2.4) obtenemos el resultado.

Hay otras formas de escribir la ecuación funcional, veamos algunas de ellas. Usando la ecuación funcional de la función Gamma (A.15), (2.2) se puede escribir

$$(2.5) \quad \zeta(s) = \chi(s) \zeta(1-s), \quad \chi(s) = (2\pi)^s / (2\Gamma(s) \cos(\pi s/2))$$

⁵Este hecho no es más que un caso particular de las ecuaciones satisfechas por las funciones theta de Jacobi.

*ya es conocido en 1828
probo dicho autor 30 años antes*

*ya es conocido en 1828
probo dicho autor 30 años antes*

*quizá no lo
paga*

*ya es conocido en 1828
probo dicho autor 30 años antes*

o también

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \Gamma(1-s) \operatorname{sen}(\pi s/2) \zeta(1-s)$$

Por último, si definimos

$$\xi(s) = \frac{1}{2} s(s-1) \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s)$$

tenemos que

$$(2.6) \quad \xi(s) = \xi(1-s)$$

es equivalente a (2.2).

Esta última forma de considerar la ecuación es de gran interés, ya que la función $\xi(s)$ representa una función entera, (analítica en todo el plano complejo), y de orden 1, es decir se cumple

$$|\xi(s)| \ll e^{|s|^{1+\epsilon}},$$

lo que nos permitirá, utilizando el teorema de factorización de Hadamard, escribir $\xi(s)$, y por tanto $\zeta(s)$ como un producto infinito en función de sus ceros.

Pero antes hagamos unas observaciones que se deducen inmediatamente de la ecuación funcional.

En primer lugar vemos que el único polo de $\zeta(s)$ se encuentra en $s = 1$, ya que en $s = 0$ el polo de $\zeta(1-s)$ se cancela con el polo de $\Gamma(\frac{s}{2})$. De hecho, dividiendo (2.2) por $\Gamma(\frac{s}{2})$ y haciendo $s \rightarrow 0$ obtenemos $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$.

El desarrollo de Laurent de la función zeta en un entorno del polo $s = 1$ es de la forma

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma_0 + \gamma_1(s-1) + \gamma_2(s-1)^2 + \dots$$

donde los coeficientes γ_i ⁶ cumplen (ver [Iv1])

$$(2.7) \quad \gamma_i = \frac{(-1)^i}{i!} \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{m \leq N} \frac{1}{m} \log^i m - \frac{\log^{i+1} N}{i+1} \right).$$

⁶Se les suele llamar constantes de Stieltjes, ya que fue él quien probó por primera vez la igualdad (2.7)

Aquí nos limitaremos al cálculo de

$$\gamma_0 = \left(\gamma = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N} - \log N \right) \right) = 0.5772157 \dots$$

LEMA 2. Se cumple

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + O(|s-1|)$$

DEMOSTRACIÓN:

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 1} \left(\zeta(s) - \frac{1}{s-1} \right) &= - \int_1^\infty \frac{\{t\}}{t^2} dt + 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{[t] - t}{t^2} dt + 1 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{m=1}^{n-1} m \int_m^{m+1} \frac{1}{t^2} dt - \log n + 1 \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m+1} + 1 - \log n \right) \\ &= \gamma \end{aligned}$$

Para la primera igualdad hemos usado la definición de $\zeta(s)$ que aparece en (1.27).

También, gracias a la ecuación funcional y mediante un cálculo sencillo, se puede obtener $\zeta'(0) = -\frac{1}{2} \log 2\pi$. Consideremos la primera igualdad de (2.5) y tomemos su derivada logarítmica:

$$(2.8) \quad -\frac{\zeta'(1-s)}{\zeta(1-s)} = -\log 2\pi - \frac{1}{2}\pi \tan \frac{s\pi}{2} + \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} + \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}.$$

Ahora bien, en las proximidades de $s = 1$ se cumplen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\pi \tan \frac{s\pi}{2} &= -\frac{1}{s-1} + O(|s-1|) \\ \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} &= -\gamma \\ \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} &= \frac{-\frac{1}{(s-1)^2} + k + \cdots}{\frac{1}{s-1} + \gamma + k(s-1) + \cdots} = -\frac{1}{s-1} + \gamma + O(|s-1|), \end{aligned}$$

donde k es una constante.

Por tanto, haciendo $s \rightarrow 1$ en (2.8) obtenemos

$$(2.9) \quad \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} = -\log 2\pi.$$

CEROS

De la ecuación funcional también se deducen algunos resultados acerca de los ceros de $\zeta(s)$. Los pondremos en forma de corolarios del teorema 18.

COROLARIO 1. *La función zeta tiene ceros simples en $s = -2n$ para $n = 1, 2, \dots$*

Estos vienen de los polos de $\Gamma(\frac{s}{2})$.

A estos ceros se les suele llamar los ceros triviales para distinguirlos de los demás ceros de la función zeta, cuya distribución es todavía hoy un misterio.

A partir de ahora, y siempre que no se especifique, nos referiremos a los ceros no triviales de $\zeta(s)$.

COROLARIO 2. *Todos los ceros de $\zeta(s)$ están en la banda $0 < \sigma < 1$.*

Recordar que $\zeta(s) \neq 0$ si $\sigma \geq 1$, y mirar la ecuación funcional.

COROLARIO 3. *Los ceros son simétricos respecto de las rectas $\sigma = \frac{1}{2}$ y $t = 0$.*

Si cambiamos s por $\bar{s}$ en (2.4), obtenemos $\zeta(s) = \overline{\zeta(\bar{s})}$, ya que $\Gamma(s) = \overline{\Gamma(\bar{s})}$ y por tanto la simetría respecto de $t = 0$. Además, si miramos la ecuación funcional y tenemos en cuenta que la función $\Gamma(s)$ no se anula, de lo que acabamos de demostrar deducimos la simetría respecto de $\sigma = \frac{1}{2}$.

Estos tres resultados son de gran utilidad a la hora de estudiar los ceros de la función zeta, sin embargo para conseguir más información es conveniente centrar nuestro estudio en la función $\xi(s)$ definida en (2.6), cuyos ceros coinciden con los ceros no triviales de $\zeta(s)$.

TEOREMA 19. *$\xi(s)$ es una función entera de orden 1*

DEMOSTRACIÓN:

De la definición se deduce que $\xi(s)$ es regular en $\sigma > 0$, ya que lo es $(s-1)\zeta(s)$. Además por (2.6) también lo es en $\sigma < 1$, y por tanto es una función entera. Veamos pues su orden. De (1.27) se obtiene uniformemente en $\sigma \geq \frac{1}{2}$

$$(2.10) \quad |(1-s)\zeta(s)| \ll |s|^2,$$

y por la fórmula de Stirling (A.18) se obtiene en esa región

$$(2.11) \quad |\xi(s)| \ll e^{A|s| \log |s|}.$$

Teniendo en cuenta la ecuación funcional (2.6), la cota (2.10) es cierta en todo el plano complejo.

Para ver que en realidad la función tiene exactamente orden 1 usamos de nuevo la fórmula de Stirling, en este caso para $s \rightarrow \infty$ real, con lo que

$$\log |\xi(s)| \sim \frac{1}{2}|s|(\log(|s|+1)).$$

Más adelante veremos que la función $\xi(s)$ tiene un número infinito de ceros con exponente de convergencia⁷1. Es decir, si $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots$ son los ceros de $\xi(s)$ entonces, para todo $\varepsilon > 0$, $\sum \frac{1}{|\rho_n|^{1+\varepsilon}}$ converge, mientras que $\sum \frac{1}{|\rho_n|}$ es divergente.

Como la función $s(s-1)\Gamma(s)$ no se anula en la banda crítica, $0 < \sigma < 1$, se deduce que todos los ceros de $\xi(s)$ son también ceros de $\zeta(s)$. Es decir la función zeta tiene una infinidad de ceros en la banda crítica. Si además tenemos en cuenta (1.25) vemos que todos los ceros son complejos, es decir $\Im(\rho_i) \neq 0$ para $i = 1, 2, \dots$.

Podemos aplicar el teorema de factorización de Hadamard (A.11), que nos proporciona una forma de escribir $\xi(s)$ en función de sus ceros, válida para

⁷En general, si $f(s)$ es entera de orden exactamente α , los ceros tienen exponente de convergencia α .

cualquier valor de s . Teniendo en cuenta que $\frac{s}{2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \Gamma\left(1 + \frac{s}{2}\right)$ obtenemos $\xi(0) = -\zeta(0) = \frac{1}{2}$ y

$$(2.12) \quad \xi(s) = \frac{1}{2} e^{b_0 s} \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) e^{\frac{s}{\rho}},$$

donde el producto recorre los ceros de $\zeta(s)$, y b_0 es una constante cuyo valor podemos calcular por diferenciación logarítmica. Para ello escribamos para $\zeta(s)$ la fórmula análoga a (2.12):

$$\zeta(s) = \frac{e^{bs}}{2(s-1)\Gamma(\frac{1}{2}s+1)} \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) e^{\frac{s}{\rho}},$$

con $b = b_0 + \frac{1}{2} \log \pi$. Tomando logaritmos, y derivando se obtiene

$$(2.13) \quad \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = b - \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2} \frac{\Gamma'(\frac{1}{2}s+1)}{\Gamma(\frac{1}{2}s+1)} + \sum \left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho} \right).$$

Haciendo tender $s \rightarrow 0$ resulta

$$\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} = b + 1 - \frac{1}{2} \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = b + 1 + \frac{\gamma}{2}.$$

Luego $b = \log(2\pi) - 1 - \frac{\gamma}{2}$ por (2.9).

La información que hemos obtenido sobre la función $\xi(s)$ puede ser trasladada a la función zeta y obtener así algunos resultados sobre sus ceros.

Si llamamos $N(T)$ al número de ceros de $\zeta(s)$ en la región $0 < \sigma < 1$, $0 < t < T$, una sencilla aplicación de la fórmula de Jensen (A.8) aplicada a $\xi(s)$, nos proporciona, para $R = 4T$ con $T \gg T_0$ la desigualdad

$$\begin{aligned} N(T) &\ll \int_{\frac{R}{2}}^R \frac{1}{r} n(r) dr \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |\xi(Re^{i\theta})| d\theta \\ &\ll \int_0^{2\pi} R \log R d\theta \ll T \log T, \end{aligned}$$

por (2.11). El orden obtenido de esta manera para la función $N(T)$ es, como ya afirmara Riemman en su memoria, su verdadero orden. Sin embargo no fue hasta 1897 que H.von Mangoldt consiguió la primera prueba de este hecho obteniendo una fórmula asintótica para $N(T)$, cuyo término de error mejoró él mismo en otro artículo en 1905 dando finalmente con el siguiente resultado:

TEOREMA 20.

$$(2.14) \quad N(T) = \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\log T)$$

DEMOSTRACIÓN:

Consideramos el rectángulo $\mathcal{D}$ de vértices $-1 \pm iT$, $2 \pm iT$, y sea T tal que $\zeta(\sigma + iT) \neq 0$. Entonces, por el principio del argumento tenemos

$$4\pi N(T) = \Delta_{\mathcal{D}arg} \xi(s),$$

donde $\Delta_{\mathcal{D}arg}$ es el incremento del argumento de la función correspondiente a lo largo de $\mathcal{D}$.

Ahora bien, $\xi(s) = s(s-1)\eta(s)$ con $\eta(s) = \frac{1}{2}\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s)$, luego

$$\Delta_{\mathcal{D}arg} \xi(s) = \Delta_{\mathcal{D}arg}\{s(s-1)\} + \Delta_{\mathcal{D}arg} \eta(s)$$

El primer sumando es $\Delta_{\mathcal{D}arg}\{s(s-1)\} = 4\pi$ y para calcular el segundo tenemos en cuenta la igualdad

$$\xi(s) = \xi(1-s) = \overline{\xi(1-\bar{s})},$$

que también cumple la función $\eta(s)$. De esta forma llegamos a

$$\frac{1}{4}\Delta_{\mathcal{D}arg} \eta(s) = \Delta_{\mathcal{L}arg} \eta(s),$$

donde $\mathcal{L}$ es el camino que va de 2 a $2 + iT$ y de allí a $\frac{1}{2} + iT$ a lo largo de segmentos.

Ahora bien,

$$\Delta_{\mathcal{L}arg} \pi^{-\frac{s}{2}} = -\frac{1}{2}T \log \pi,$$

mientras que por la fórmula de Stirling tenemos

$$\Delta_{\mathcal{L}arg} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \Im \log \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \frac{T}{2} \log \frac{T}{2} - \frac{T}{2} - \frac{\pi}{8} + O\left(\frac{1}{T}\right).$$

De todo ello deducimos que

$$(2.15) \quad N(T) = \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + \frac{7}{8} + S(T) + O\left(\frac{1}{T}\right),$$

donde $S(T) = \frac{1}{\pi} \Delta_{\mathcal{L}} \arg \zeta(s)$. Para llegar al resultado que buscamos nos falta ver que

$$(2.16) \quad S(T) = O(\log T).$$

Esta es una de las pocas estimaciones, en lo que se refiere a la teoría de la función zeta, que no ha sido mejorada en el último siglo.

A la vista de la estimación que esperamos conseguir, y el poco conocimiento que tenemos de la función $S(T)$, puede parecer un poco extraño el no incluir el término $\frac{7}{8}$ en su definición; sin embargo esto tiene un motivo que veremos más adelante.

Para dar la prueba procederemos de dos formas distintas. En primer lugar $\pi S(T) = \arg \zeta(\sigma + iT)$, donde el argumento está definido por variación continua a lo largo de $\mathcal{L}$, (o equivalentemente desde $\infty + iT$ hasta $\frac{1}{2} + iT$ empezando con el valor cero). Para $\sigma \geq 2$ tenemos

$$(2.17) \quad \Re \zeta(s) = 1 + \sum_2^{\infty} \frac{\cos(t \log n)}{n^{\sigma}} \geq 1 - \sum_2^{\infty} \frac{1}{n^2} = 2 - \frac{\pi^2}{6} > 0,$$

de donde $|\arg \zeta(2 + iT)| \leq \frac{\pi}{2}$. Nos falta por ver la variación de $\arg \zeta(s)$ en el segmento $[2 + iT, \frac{1}{2} + iT]$. Este hecho lo deduciremos de un lema algo más general.

LEMA 3. Sea $0 \leq \alpha < \beta < 2$, $f(s)$ una función analítica, real para s real, regular en $\sigma \geq \alpha$ excepto quizá en $s = 1$, y cumpliendo

$$\begin{aligned} |\Re f(2 + it)| &\geq m > 0 \text{ para todo } t, \text{ y} \\ |f(\sigma' + it')| &\leq M_{\sigma, t} \quad (\sigma' \geq \sigma, \quad 1 \leq t' \leq t). \end{aligned}$$

Entonces, si T no es la ordenada de un cero de $f(s)$ se cumple

$$|\arg f(\sigma + iT)| \leq \frac{\pi}{\log \left(\frac{2-\alpha}{2-\beta} \right)} \left(\log M_{\alpha, T+2} + \log \frac{1}{m} \right) + \frac{3\pi}{2}$$

en $\sigma \geq \beta$. 

DEMOSTRACIÓN:

En primer lugar vemos que, como en el caso de la función zeta, sólo nos interesa la variación de argumento en el segmento $l = [2 + iT, \beta + iT]$, pues de $\arg f(2) = 0$ y $\Re f(2 + it) \neq 0$ obtenemos $|\arg f(2 + iT)| \leq \frac{\pi}{2}$.

Supongamos que $\Re f(s)$ se anula q veces en l . Entonces $|\arg(f(\sigma + iT))| \leq (q + \frac{3}{2})\pi$, ya que los puntos en donde se anula dividen a l en $q + 1$ intervalos en los que $\Re f(s) \geq 0$ ó $\Re f(s) \leq 0$, y por tanto en cada uno el argumento no varía más de π .

Consideramos la siguiente función analítica $g(z) = \frac{f(z+iT) + f(z-iT)}{2}$. En $\Im(z) = 0$, $\beta \leq \Re z \leq 2$, $g(z)$ se anula exactamente q veces. Por tanto, si llamamos $n(r)$ al número de ceros de $g(z)$ en el círculo $|z - 2| \leq r$, se cumple $q \leq n(2 - \beta)$. Aplicamos la fórmula de Jensen a la función $g(z)$ para obtener

$$\begin{aligned} \int_0^{2-\alpha} \frac{n(r)}{r} dr &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |g\{2 + (2 - \alpha)e^{i\theta}\}| d\theta - \log |g(2)| \\ &\leq \log M_{\alpha, T+2} + \log \frac{1}{m}. \end{aligned}$$

Por otra parte

$$\int_0^{2-\alpha} \frac{n(r)}{r} dr \geq \int_{2-\beta}^{2-\alpha} \frac{n(r)}{r} dr \geq n(2 - \beta) \log \left(\frac{2 - \alpha}{2 - \beta} \right),$$

de donde se deduce el resultado.

Así, para probar (2.16), y con ello (2.14), no hay más que aplicar el lema para $f(s) = \zeta(s)$, $\alpha = \frac{1}{4}$, $\beta = \frac{1}{2}$ en vista de (1.30) y (2.17).

De (2.14) podemos deducir fácilmente algunos resultados referentes a los ceros de $\zeta(s)$.

COROLARIO. Sean $0 < \gamma_0 \leq \gamma_1 \leq \gamma_2 \cdots$ las ordenadas consecutivas de los ceros $\rho = \beta + i\gamma$ de $\zeta(s)$, entonces

$$\begin{aligned}
 & 1) \quad |\rho_n| \sim \gamma_n \sim \frac{2\pi n}{\log n} \\
 & 2) \quad \sum_{|\gamma|} \frac{1}{|\gamma|^{1+\varepsilon}} < \infty \quad \text{Para todo } \varepsilon > 0 \\
 (2.18) \quad & 3) \quad \sum_{|\gamma| \leq T} \frac{1}{|\gamma|} \ll \log^2 T \\
 (2.19) \quad & 4) \quad \sum_{|\gamma| > T} \frac{1}{|\gamma|^2} \ll \frac{\log T}{T}.
 \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN:

1) Observamos que

$$N(\gamma_n - 1) \leq n \leq N(\gamma_n + 1)$$

y no hay más que tener en cuenta (2.14) para obtener

$$\gamma_n \log \gamma_n \sim 2\pi n,$$

ya que

$$N(\gamma_n \pm 1) \sim \frac{\gamma_n \pm 1}{2\pi} \log \left(\frac{\gamma_n \pm 1}{2\pi} \right) \sim \frac{\gamma_n}{2\pi} \log \gamma_n.$$

Por tanto

$$\log \gamma_n \sim \log n$$

y

$$\gamma_n \sim \frac{2\pi n}{\log n},$$

como queríamos ver. Claramente $|\rho_n| \sim \gamma_n$ pues $\beta_n = O(1)$.

Las demostraciones de 2), 3) y 4) se deducen de 1) mayorando la suma por la integral.

Para nuestra segunda prueba de (2.16) escribamos

$$(2.20) \quad S(T) = O(1) - \Im \int_{\frac{1}{2} + iT}^{2 + iT} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds,$$

en donde el primer término viene de la variación del argumento entre ∞ y 2. De esta manera el estudio de $S(T)$ se centra en el de la función que aparece bajo el signo integral. De la representación de $\zeta(s)$ en función de sus ceros obtendremos una fórmula asintótica para $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ con la que podremos calcular la integral involucrada en $S(T)$ con un error dentro de lo permitido. A lo largo de la prueba se obtendrán resultados que son de interés en sí mismos; de ahí que los enunciemos aparte.

LEMA 4. Se cumple

$$(2.21) \quad \sum_{\rho} \frac{1}{1 + (T - \gamma)^2} = O(\log T)$$

donde $\rho = \beta + i\gamma$ recorre los ceros de $\zeta(s)$, y T es suficientemente grande.

Supongamos $\sigma \geq 2$, $-1 \leq \sigma \leq 2$. De la fórmula de Stirling obtenemos

$$\frac{\Gamma'(\frac{1}{2}s + 1)}{\Gamma(\frac{1}{2}s + 1)} = O(\log T).$$

Sustituyendo en (2.13), y tomando partes reales, llegamos a

$$-\Re \left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) < A \log T - \sum_{\rho} \Re \left(\frac{1}{s - \rho} + \frac{1}{\rho} \right).$$

Hagamos $s = 2 + iT$. Entonces $\left| \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right| \ll 1$, luego

$$\sum_{\rho} \Re \left(\frac{1}{s - \rho} + \frac{1}{\rho} \right) < A \log T.$$

Si ρ es un cero no trivial de $\zeta(s)$,

$$\Re \frac{1}{\rho} = \frac{\beta}{\beta^2 + \gamma^2} > 0, \quad \Re \frac{1}{s - \rho} = \frac{2 - \beta}{(2 - \beta)^2 + (T - \gamma)^2} \geq \frac{1}{4 + (T - \gamma)^2}.$$

Reuniendo las anteriores consideraciones obtenemos el resultado.

COROLARIO.

$$(2.22) \quad a) \quad N(T+1) - N(T) \ll \log T$$

$$(2.23) \quad b) \quad \sum_{|T-\gamma| \geq 1} \frac{1}{(T-\gamma)^2} \ll \log T$$

$$(2.24) \quad c) \quad \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{|t-\gamma| < 1} \frac{1}{s-\rho} + O(\log t),$$

siempre que en c), $-1 \leq \sigma \leq 2$ y $|t| \geq 2$, no coincida con la ordenada de un cero.

DEMOSTRACIÓN: Mientras que (2.22) y (2.23) se siguen de manera inmediata de (2.21), para demostrar (2.24) utilizamos la representación (2.13) en los puntos s y $2+it$, y restamos ambas expresiones para obtener

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{\rho} \left(\frac{1}{s-\rho} - \frac{1}{2+it-\rho} \right) + O(\log t).$$

Teniendo en cuenta que

$$\left| \frac{1}{s-\rho} - \frac{1}{2+it-\rho} \right| = \frac{2-\sigma}{|s-\rho||2+it-\rho|} \leq \frac{3}{|t-\gamma|^2}$$

y la desigualdad (2.23), deducimos la expresión

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{|t-\gamma| < 1} \left(\frac{1}{s-\rho} - \frac{1}{2+it-\rho} \right) + O(\log t).$$

Por último observemos que $|\frac{1}{2+it-\rho}| \leq 1$ y, por el apartado a), el número de términos es $O(\log t)$.

Después de estos resultados, en particular de c), demostrar (2.14) se reduce a demostrar

$$\sum_{|T-\gamma| < 1} \arg(s-\rho) = O(\log T),$$

ya que por (2.20) tenemos

$$S(T) = O(\log T) + \sum_{|T-\gamma| < 1} \arg(s-\rho)$$

pero esto es cierto pues $|\arg(s - \rho)| < \pi$ en $[\frac{1}{2} + iT, 2 + iT]$.

La representación (2.24) nos proporciona una fórmula manejable para deducir resultados de la derivada logarítmica de $\zeta(s)$, que como ya vimos por ejemplo son útiles en estimaciones de la distribución de los números primos. Sin embargo a la hora de estudiar la función zeta, tiene el inconveniente de que también aparece su derivada. Integrando (2.24) podemos evitar este problema, consiguiendo una fórmula útil referente al logaritmo de $\zeta(s)$. Esta función sigue siendo interesante porque sus singularidades coinciden con los ceros de la función ζ . En $\sigma \geq 2$ definimos $\log \zeta(s)$ tal que $-\frac{\pi}{2} \leq \arg \zeta(s) \leq \frac{\pi}{2}$, definición que se puede hacer teniendo en cuenta (2.17), y para $\sigma < 2$ ^{por} continuación analítica a lo largo del segmento $[2 + it, \sigma + it]$ siempre que $\zeta(s)$ no se anule en dicho segmento. Entonces, cuando s no es un cero de la función zeta se cumple

$$(2.25) \quad \log \zeta(s) = \sum_{|\gamma-t|<1} \log(s - \rho) + O(\log t)$$

uniformemente en $-1 \leq \sigma \leq 2$, donde $-\pi < \Im \log(s - \rho) \leq \pi$.

Supongamos que t no es la ordenada de un cero, integrando en (2.24) tenemos

$$\log \zeta(2 + it) - \log \zeta(\sigma + it) = \sum_{|\gamma-t|<1} \log(2 + it - \rho) - \sum_{|\gamma-t|<1} \log(s - \rho) + O(\log t).$$

Ahora bien, $\log \zeta(2 + it)$ y $\log(2 + it - \rho)$ están claramente acotados, luego por (2.22) su suma sera $O(\log t)$. De aquí se deduce el resultado para esos t , y en general, por continuidad, para cualquier s de la banda que no sea un cero.

Hemos visto que conocer el comportamiento de $N(T)$ se reduce al estudio de $S(T)$; sin embargo éste parece ser muy complicado, ya que en la ordenada de un cero de $\zeta(s)$ de orden k debe haber una discontinuidad del mismo orden, (observar que el término $O(\frac{1}{T})$ que aparece en (2.15) es continuo), mientras que entre dos ordenadas sucesivas, $N(T)$ es constante, y por tanto debe equilibrar la variación de los otros términos.

Esta variación de $S(T)$ se refleja en que su media conserva el mismo orden, hecho que veremos en el siguiente teorema.⁸

TEOREMA 21.

$$S_1(T) = \int_0^T S(t)dt = O(\log T)$$

Observación Este hecho por tanto, sería mentira si hubiéramos incluido en la definición de $S(T)$ la fracción $\frac{7}{8}$ que aparecía en $N(T)$.

DEMOSTRACIÓN:

→ La demostración se basa en un lema de Littelwood, que es como una fórmula de Jensen para rectángulos. En particular, el paso esencial de la demostración consiste en escribir

$$(2.26) \quad S_1(T) = \frac{1}{\pi} \int_{\frac{1}{2}}^2 \log |\zeta(\sigma + iT)| d\sigma + O(1).$$

Supongamos que es cierto, entonces tomando partes reales en (2.25) se obtiene

→
$$\int_{\frac{1}{2}}^2 \log |\zeta(\sigma + iT)| d\sigma = \sum_{|\gamma-T|<1} \int_{\frac{1}{2}}^2 \log \left(\frac{s-\rho}{s-\beta} \right) d\sigma + O(\log T).$$

Ahora bien, la cadena de desigualdades

$$\frac{3}{4} \log \left(\frac{9}{4} + 1 \right) \geq \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^2 \log \{ (\sigma - \beta)^2 + (T - \gamma)^2 \} d\sigma \geq \int_{\frac{1}{2}}^2 \log |\sigma - \beta| d\sigma > -A$$

es válida para cualquier término de la suma. Por tanto, teniendo en cuenta (2.22) tenemos la estimación

$$\int_{\frac{1}{2}}^2 \log |\zeta(\sigma + iT)| d\sigma = O(\log T),$$

lo que terminaría la prueba. Vamos entonces a demostrar (2.26)

⁸El motivo que hace que la media siga siendo como $O(\log T)$ puede ser los frecuentes cambios de signo que sufre la función. En realidad se puede demostrar que $S(T)$ cambia infinitas veces de signo.

LEMA 5. Dada una función $\phi(s)$, que sea meromorfa en el rectángulo $R = \{\alpha \leq \sigma \leq \beta, 0 \leq t \leq T\}$, y regular y sin ceros en $\sigma = \beta$, consideramos $F(s) = \log \phi(s)$. En una banda alrededor de la recta $\sigma = \beta$, $F(s)$ representa una función regular, y fuera de esa banda definiremos $F(s)$ con $s = \sigma + it$ por continuación analítica, empezando en el punto $s = \beta + it$, a lo largo del camino $t = \text{constante}$, cuando ϕ no tenga ceros ni polos en esa recta y en otro caso $F(\sigma + it) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} F(\sigma + it + i\epsilon)$. Sea $\nu(\sigma_0, T)$ el número de ceros de la función menos el de polos que están en el rectángulo R y a la derecha de $\sigma = \sigma_0$, contando aquellos con parte imaginaria igual a T , pero no los que esten en la recta $t = 0$. Entonces

$$\int_R F(s) ds = -2\pi i \int_{\alpha}^{\beta} \nu(\sigma, T) d\sigma.$$

DEMOSTRACIÓN:

(2.27)

$$\int_R F(s) ds = \int_{\alpha}^{\beta} F(\sigma) d\sigma - \int_{\alpha}^{\beta} F(\sigma + iT) d\sigma + \int_0^T i \{F(\beta + it) - F(\alpha + it)\} dt.$$

Podemos escribir el último término de (2.27) como

$$\int_0^T i \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\phi'(\sigma + it)}{\phi(\sigma + it)} d\sigma dt = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{\sigma}^{\sigma + iT} \frac{\phi'(s)}{\phi(s)} ds d\sigma.$$

Aplicando el teorema de los residuos,

$$\begin{aligned} \int_{\sigma}^{\sigma + iT} \frac{\phi'(s)}{\phi(s)} ds &= \left(\int_{\sigma}^{\beta} + \int_{\beta}^{\beta + iT} - \int_{\sigma + iT}^{\beta + iT} \right) \frac{\phi'(s)}{\phi(s)} ds - 2\pi i \nu(\sigma, T) \\ &= F(\sigma + iT) - F(\sigma) - 2\pi i \nu(\sigma, T) \end{aligned}$$

y sustituyendo en (2.27) obtenemos el resultado.

Si en el lema hacemos $\phi(s) = \zeta(s)$, $\alpha = \frac{1}{2}$ y β un número que haremos tender a infinito, y tomamos partes reales queda

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{2}}^{\beta} \log |\zeta(\sigma)| d\sigma - \int_0^T \arg \zeta(\beta + it) dt - \int_{\frac{1}{2}}^{\beta} \log |\zeta(\sigma + iT)| d\sigma + \\ + \int_0^T \arg \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) dt = 0. \end{aligned}$$

Para estimar cada una de las integrales vemos como se comporta el logaritmo para $\Re s$ grande. Cuando $\sigma \rightarrow \infty$

$$\log \zeta(s) = \log \left(1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots \right) = O\left(\frac{1}{2^\sigma}\right)$$

uniformemente en t , por tanto $\arg \zeta(\beta + it) = O(\frac{1}{2^\beta})$, y la segunda integral tiende a cero cuando $\beta \rightarrow \infty$. La primera integral es también una constante, mientras que en la tercera queda

$$\int_2^\beta \log |\zeta(\sigma + iT)| d\sigma = \int_2^\beta O(2^{-\sigma}) d\sigma = O(1),$$

lo que demuestra (2.26).

ORDEN

En el anterior teorema se ha hecho visible el manejo de la fórmula (2.25). Ahora veremos una sencilla aplicación que nos permite deducir que la función zeta no es muy pequeña en la banda $-1 \leq \sigma \leq 2$.

TEOREMA 22. *Existe una constante A tal que en cada intervalo $(T, T+1)$ hay un t en el que*

$$a) \quad |\zeta(\sigma + it)| > t^{-A} \quad -1 \leq \sigma \leq 2.$$

Además, si H es un número mayor que 1, entonces

$$b) \quad |\zeta(\sigma + it)| > t^{-HA}$$

en el rectángulo $-1 \leq \sigma \leq 2$ y $T \leq t \leq T+1$ excepto para un conjunto de valores de t de medida $\frac{1}{H}$.

DEMOSTRACIÓN:

Tomando partes reales en (2.25) queda

$$\log |\zeta(s)| = \sum_{|\gamma-t|<1} \log |s - \rho| + O(\log t) \geq \sum_{|\gamma-t|<1} \log |t - \gamma| + O(\log t).$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} \int_T^{T+1} \sum_{|\gamma-t|<1} \log |t-\gamma| dt &\geq \sum_{T-1 \leq \gamma \leq T+2} \int_{\max(\gamma-1, T)}^{\min(\gamma+1, T+1)} \log |t-\gamma| dt \\ &> \sum_{T-1 \leq \gamma \leq T+2} \int_{\gamma-1}^{\gamma+1} \log |t-\gamma| dt \\ &= \sum_{T-1 \leq \gamma \leq T+2} (-2) > -A \log T, \end{aligned}$$

de donde se deduce que para algún t en $T \leq t \leq T+1$ se cumple

$$\sum_{|\gamma-t|<1} \log |t-\gamma| > -A \log T$$

y que

$$\sum_{|\gamma-t|<1} \log |t-\gamma| > -AH \log T,$$

excepto en un conjunto de valores de t de medida $\frac{1}{H}$, en el que se incluyen los ceros de $\zeta(s)$. Ambas afirmaciones son ciertas uniformemente en $-1 \leq \sigma \leq 2$. Este hecho termina la demostración.

Sin embargo el mayor interés en el estudio del orden de la función zeta se centra en dar cotas superiores. Estas nos permiten deducir resultados acerca de los ceros.

La primera pregunta que podemos hacernos es si la función continuará acotada a la derecha de la recta crítica. De esta forma obtendremos la primera respuesta negativa.

TEOREMA 23. Si $\sigma > 1$ se cumple para todo $\varepsilon > 0$

$$|\zeta(s)| \geq (1-\varepsilon)\zeta(\sigma)$$

para valores de t arbitrariamente grandes.

DEMOSTRACIÓN:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^N n^{-\sigma} e^{-it \log n} + \sum_{n=N+1}^{\infty} n^{-\sigma} e^{-it \log n}$$

Esta cuestión se resolverá con una respuesta negativa. Gracias a un teorema de gran importancia.

Acotando el primer sumando por su parte real tenemos

$$|\zeta(s)| \geq \sum_{n=1}^N n^{-\sigma} \cos(t \log n) - \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} n^{-\sigma} e^{-it \log n} \right|,$$

y por el teorema de Dirichlet (A.28) existe un $t_0 \leq t \leq t_0 q^N$ y unos enteros $p_1, p_2, \dots, p_N$ tales que dados N y q , se satisfacen las desigualdades

$$\left| \frac{t}{2\pi} \log n - p_n \right| < \frac{1}{q}$$

para $n = 1, 2, \dots, N$. Por tanto $\cos(t \log n) \geq \cos(\frac{2\pi}{q})$ para esos n , de donde

$$\sum_{n=1}^N n^{-\sigma} \cos(t \log n) \geq \cos\left(\frac{2\pi}{q}\right) \sum_{n=1}^N n^{-\sigma} > \cos\left(\frac{2\pi}{q}\right) \zeta(\sigma) - \sum_{n=N+1}^{\infty} n^{-\sigma},$$

por lo que finalmente obtenemos

$$|\zeta(s)| \geq \cos\left(\frac{2\pi}{q}\right) \zeta(\sigma) - 2 \sum_{n=N+1}^{\infty} n^{-\sigma}.$$

De las desigualdades

$$\zeta(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\sigma} > \int_1^{\infty} x^{-\sigma} dx = \frac{1}{\sigma-1}$$

y

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} n^{-\sigma} < \int_N^{\infty} x^{-\sigma} dx = \frac{N^{1-\sigma}}{\sigma-1}$$

resulata la estimación

$$|\zeta(s)| \geq \left(\cos\left(\frac{2\pi}{q}\right) - 2N^{1-\sigma} \right) \zeta(\sigma),$$

de donde se deduce el resultado si q y N son suficientemente grandes.

Una vez visto que no esta acotada⁹, tiene más sentido preguntarse por el orden. Hay que observar que para el estudio del orden de $\zeta(s)$ sólo tenemos que

⁹Más adelante veremos que el teorema 23 implica que la función no esta acotada en ninguna recta $\Re s = \sigma \leq 1$

preocuparnos de los s que pertenecen a la banda crítica, ya que en $\sigma \geq \sigma_0 > 1$, la función está acotada, y para $\sigma < 0$ no hay más que mirar a la ecuación funcional. Vemos, así una vez más, la importancia que tiene al relacionar los valores de $\zeta(s)$ en los semiplanos a derecha e izquierda de la recta crítica. Sin embargo, tiene el inconveniente de que no expresa $\zeta(s)$ de forma explícita, lo que imposibilita el cálculo del orden de forma directa. Para esto último es de gran importancia el encontrar fórmulas explícitas de $\zeta(s)$.

En el teorema 10 vimos un ejemplo de cómo estimar el orden de la función zeta. Allí se hacía uso de la fórmula explícita (1.27). En dicha representación la acotación trivial es muy mala, ya que no se mide la cancelación que aparece en la integral; sin embargo, por ser ésta absolutamente convergente, podíamos partirla en dos trozos, el segundo de los cuales nos aportaba un término de error pequeño, mientras que el primero se evaluaba quedándonos un polinomio de Dirichlet; es decir, una suma finita en donde los términos son n^{-s} , "más fácil" de estimar. (En aquel caso con la acotación trivial del polinomio conseguíamos una cota no trivial de $\zeta(s)$.) De esta manera, cuanto mejor seamos capaces de estimar el polinomio, mejores resultados obtendremos.

A dichas representaciones de $\zeta(s)$ por medio de polinomios de Dirichlet más un término de error se ha dado en llamar ecuaciones funcionales aproximadas. Existen muchas de tales ecuaciones en la literatura, y cuanto "mejor" sea la ecuación, más fácil nos será dar estimaciones no triviales.

En el siguiente teorema veremos la más sencilla de dichas ecuaciones funcionales aproximadas.

TEOREMA 24. Sea $x \geq \frac{|t|}{\pi}$, $s = \sigma + it$, entonces se cumple uniformemente en $0 < \sigma_0 \leq \sigma$

$$(2.28) \quad \zeta(s) = \sum_{n \leq x} n^{-s} + \frac{x^{1-s}}{s-1} + O(x^{-\sigma}),$$

donde la constante solo depende de σ_0 .

Para su demostración vamos a establecer antes un lema referente a sumas exponenciales.

LEMA 6. Sea $f(x)$ real en $[a, b]$ con derivada continua y monótona en $[a, b]$ y tal que $|f'(x)| \leq \delta < 1$, entonces

$$\sum_{a < n \leq b} e(f(n)) = \int_a^b e(f(x)) dx + O((1 - \delta)),$$

donde $e(z) = \exp(2\pi iz)$.

DEMOSTRACIÓN:

La demostración es esencialmente la fórmula de sumación de Poisson.

Consideramos la función $\varphi_n(x) = e(f(n+x))$ $0 < x < 1$ y

$$\varphi_n(0) = \varphi_n(1) = \frac{e(f(n+1)) + e(f(n))}{2}.$$

Entonces, si llamamos $a_m^n = \dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ a los coeficientes de la serie de Fourier de la función $\varphi_n(x)$, tenemos $a_0^n = \int_0^1 e(f(n+x)) dx$ y $a_m^n \neq 0$

$$\begin{aligned} a_m^n &= \int_0^1 e(f(n+x) - mx) dx = \frac{e(f(n+x))e(-mx)}{2\pi im} \Big|_0^1 \\ &\quad + \frac{1}{m} \int_0^1 f'(n+x) e(f(n+x) - mx) dx. \end{aligned}$$

Sumando en m se cancelan los primeros términos, con lo que al evaluar en 1 queda

$$\frac{e(f(n+1)) + e(f(n))}{2} = \int_n^{n+1} e(f(x)) dx + \sum_{m \neq 0} \frac{1}{m} \int_n^{n+1} f'(x) e(f(x) - mx) dx.$$

Sumando ahora en n ,

$$\sum_{a < n \leq b} e(f(n)) = \int_a^b e(f(x)) dx + \sum_{m \neq 0} \frac{1}{m} I_m + O(1),$$

donde

$$I_m = \int_{[a]+1}^{[b]} f'(x) e(f(x) - mx) dx = \frac{1}{2\pi i} \int_{[a]+1}^{[b]} \frac{f'(x)}{f'(x) - m} d(e(f(x) - mx)).$$

Como $f'(x)$ es monótona, podemos aplicar el segundo teorema del valor medio para integrales a $\Re I_m$ e $\Im I_m$ respectivamente, con lo que obtenemos $I_m = O\left(\frac{1}{|m|-\delta}\right)$. Por tanto,

$$\sum_{m \neq 0} \frac{1}{m} I_m \ll (1-\delta)^{-1} + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m(m-\delta)} \ll (1-\delta)^{-1}.$$

Es importante observar que dado que el lema aproxima sumas por integrales, el término de error debe estar en función del tamaño de la derivada, ya que si la función crece mucho, la exponencial compleja oscilaría mucho y la aproximación sería muy mala.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA:

Sea $N > x$ un entero, por (1.31) tenemos

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \sum_{n \leq N} \frac{1}{n^s} + \frac{N^{1-s}}{(s-1)} - s \int_N^{\infty} \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx \\ (2.29) \quad &= \sum_{n \leq N} \frac{1}{n^s} + \frac{N^{1-s}}{(s-1)} - \frac{N^{-s}}{2} + s \int_N^{\infty} \frac{\frac{1}{2} - \{x\}}{x^{s+1}} dx, \end{aligned}$$

siendo el último sumando $O(|t|N^{-\sigma})$.

Examinemos la suma $S = \sum_{x < n \leq N} n^{-s}$. Sea $s(u) = \sum_{x < n \leq u} n^{-it}$, entonces por el lema 6, con $f(x) = -\frac{t}{2\pi} \log x$ $\delta = \frac{1}{2}$, tenemos

$$s(u) = \int_x^u y^{it} dy + O(1) = \frac{u^{1-it} - x^{1-it}}{1-it} + O(1).$$

La relación entre S y $s(u)$ viene dada por el lema 1, que en este caso queda

$$\begin{aligned} S &= s(N)N^{-\sigma} + \sigma \int_x^N s(u)u^{-\sigma-1} du \\ &= \sigma \int_x^N \frac{u^{-s} - x^{1-it}u^{-\sigma-1}}{1-it} du + O(xN^{-\sigma}) + O(x^{-\sigma}) + \frac{N^{1-s}}{1-it} \\ &= \frac{N^{1-s}}{1-s} - \frac{x^{1-s}}{1-s} + O(xN^{-\sigma}) + O(x^{-\sigma}). \end{aligned}$$

Sustituyendo en (2.29) nos queda en $\sigma_0 \leq \sigma \leq 2$

$$\zeta(s) = \sum_{n \leq x} \frac{1}{n^s} + \frac{x^{1-s}}{(s-1)} + O(xN^{-\sigma}) + O(x^{-\sigma}) + O(|t|N^{-\sigma}).$$

Haciendo tender $N \rightarrow \infty$ obtenemos (2.28).

Vamos a utilizar esta primera ecuación funcional aproximada para dar un resultado más fuerte que el teorema 10 sobre el orden de la función zeta. En particular si $1 \leq \sigma \leq 2$, $t \geq 2$ (2.28) nos da otra demostración de (1.28) pues

$$|\zeta(s)| = \sum_{n \leq t} n^{-\sigma} + O(1) \ll \log t.$$

Podemos elegir $t > 0$ por la simetría de $\zeta(s)$ respecto de la recta $t = 0$.

Si $\sigma \geq 2$

$$|\zeta(s)| \leq |\zeta(2)| = \sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

En $\sigma \leq 0$ podemos acotar el módulo de $\zeta(s)$ gracias a la ecuación funcional, y el uso de la fórmula de Stirling. Para ello utilizaremos la función $\xi(s)$ de más fácil ecuación funcional.

$$\begin{aligned} \log |\xi(s)| &= \Re \log \xi(s) \\ &= \log \frac{1}{2} + \log |s| + \log |s-1| - \frac{\sigma}{2} \log \pi + \Re \log \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \\ &\quad + \log |\zeta(s)| \\ &\sim \frac{\sigma}{2} \log \left|\frac{s}{2}\right| - \frac{1}{2} \log \left|\frac{s}{2}\right| - \frac{t}{2} \Im \log \frac{s}{2} - \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \log \pi \\ &\quad + \log \frac{1}{2} + \log |s| + \log |s-1| - \frac{\sigma}{2} \log \pi + \log |\zeta(\sigma+it)| \\ &\sim \frac{\sigma}{2} \log \frac{t}{2\pi e} + \frac{1}{2} \log |s| + \frac{1}{2} \log \frac{\pi}{2} - \frac{\pi t}{4} + \log |s-1| \\ &\quad + \log |\zeta(\sigma+it)| \\ &\sim \frac{\sigma}{2} \log \frac{t}{2\pi e} + \frac{1}{2} \log \frac{\pi}{2} - \frac{\pi t}{4} + \frac{3}{2} \log t + \log |\zeta(\sigma+it)|. \end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} 0 &= \log |\xi(\sigma+it)| - \log |\xi(1-\sigma+it)| \\ &\sim \frac{\sigma}{2} \log \frac{t}{2\pi e} - \frac{1-\sigma}{2} \log \frac{t}{2\pi e} + \log |\zeta(\sigma+it)| - \log |\zeta(1-\sigma+it)|, \end{aligned}$$

de donde se concluye

$$1 \sim \left(\frac{t}{2\pi e} \right)^{\sigma - \frac{1}{2}} \frac{|\zeta(\sigma + it)|}{|\zeta(1 - \sigma + it)|}.$$

En particular, sobre la recta $\sigma = 0$ se tiene $|\zeta(it)| \ll t^{\frac{1}{2}} \log t$, y en cualquier línea $\sigma < 0$, $|\zeta(\sigma + it)| \ll t^{\frac{1}{2} - \sigma}$.

Las anteriores estimaciones no sirven para $0 < \sigma < 1$, sin embargo Lindelöf observó que se podían dar cotas del crecimiento de $|\zeta(s)|$ en esa banda por interpolación lineal de las estimaciones en las rectas $\sigma = 0$ y $\sigma = 1$. En particular demostró que existe una constante k tal que $|\zeta(\sigma + it)| < kt^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sigma} \log t$ en la banda crítica para $t \geq 1$. El exponente es la recta afin que vale $\frac{1}{2}$ en $\sigma = 0$ y 0 en $\sigma = 1$. La demostración es consecuencia de un teorema de Lindelöf, el cual está dentro de una clase de teoremas del mismo estilo, el primero de los cuales es debido a Phragmén.¹⁰

TEOREMA 25. Sea $f(s)$ analítica en $D = \{\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2, t \geq t_0 > 0\}$, p y q tales que $|f(s)| \ll t^p$ en $\sigma = \sigma_1$ y $|f(s)| \ll t^q$ en $\sigma = \sigma_2$. Si además existe una constante A tal que $|f(s)| \ll t^A$ en D , entonces

$$|f(\sigma + it)| \ll t^{k(\sigma)} \text{ con } k(\sigma) = \{(q - p)/(\sigma_2 - \sigma_1)\}(\sigma - \sigma_1) + p.$$

Es particularmente interesante el caso en el que $p = q = 0$ que diría que si $|f(s)| \ll t^A$ entre las dos rectas, y es acotada en ellas, entonces es acotada en toda la banda.

DEMOSTRACIÓN:

¹⁰En algún sentido estos teoremas se pueden pensar como casos particulares del Principio de Phragmén-Lindelöf. Este es una generalización del teorema del módulo máximo a funciones en C_∞ que no están acotadas en un punto de la frontera del dominio. En el caso particular en el que el punto es el del infinito, la generalización se extiende a dominios no acotados.

Supongamos en principio que $p = q = 0$, entonces $|f(s)| \leq M$ en la frontera de D . Consideramos la función $\log |f(s)|$ definida en D con singularidades en los ceros de la función, donde tiende a $-\infty$. Entonces se cumple que para cualquier $\varepsilon > 0$ la función armónica $\log |f(s)| - \varepsilon t$ tiende a $-\infty$ cuando $t \rightarrow \infty$ uniformemente en D , luego para T suficientemente grande está acotada por $\log M$ en la frontera del rectángulo $\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$, $t_0 \leq t \leq T$, y por el principio del máximo para funciones armónicas, la misma desigualdad se cumple dentro del rectángulo, y por esto en toda la banda. De esta forma obtenemos $|f(s)| \leq e^{-\varepsilon t} M$ en toda la banda. El teorema se deduce por ser ε arbitrariamente pequeño.

Para el caso general no hay más que escoger la función armónica $\log |f(s)| - k(\sigma)t - \varepsilon t$ en vez de $\log |f(s)| - \varepsilon t$.

COROLARIO. $|\zeta(s)|$ no está acotada en ninguna recta $\sigma = \sigma_0$ con $\sigma_0 \leq 1$.

La demostración se sigue del anterior teorema y el teorema 23.

Agrupando las anteriores consideraciones podemos formular el siguiente teorema global referente al orden de la función zeta.

TEOREMA 26. Para $t \geq t_0 > 0$ se cumple uniformemente en σ

$$\zeta(\sigma + it) \ll \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma \geq 2 \\ \log t & \text{si } 1 \leq \sigma \leq 2 \\ t^{\frac{1-\sigma}{2}} \log t & \text{si } 0 \leq \sigma \leq 1 \\ t^{\frac{1}{2}-\sigma} \log t & \text{si } \sigma \leq 0. \end{cases}$$

Es importante observar que gracias al teorema de "interpolación", el estudio del orden de $\zeta(s)$ se reduce de alguna manera, (sólo se obtienen acotaciones del orden de una potencia de t) al estudio del orden en la recta $\sigma = \frac{1}{2}$, ya que luego se interpola con la recta $\sigma = 1$, y después se utiliza la ecuación funcional. Esto lo podemos resumir en el comportamiento de la función $\mu(\sigma)$ definida como el ínfimo de los ξ tales que

$$\zeta(\sigma + it) = O(|t|^\xi).$$

Se sigue del teorema 25 que $\mu(\sigma)$ es continua, no creciente y convexa. Además es no negativa, luego por el teorema 26

$$\mu(\sigma) = \begin{cases} 0 & \text{si } \sigma \geq 1 \\ \frac{1}{2} - \sigma & \text{si } \sigma \leq 0 \end{cases}$$

y

$$\mu(\sigma) \leq \frac{1}{2} - \frac{\sigma}{2} \quad (0 < \sigma < 1).$$

En particular se tiene $\mu(\frac{1}{2}) \leq \frac{1}{4}$, es decir

$$\zeta(1/2 + it) = O(|t|^{\frac{1}{4} + \epsilon}).$$

Actualmente no se sabe el valor exacto de $\mu(\sigma)$ para ningún $0 < \sigma < 1$. Veremos que $\mu(\frac{1}{2}) < \frac{1}{4}$, (se espera $\mu(\frac{1}{2}) = 0$, lo que sería consecuencia de la hipótesis de Riemman). Sin embargo, para mejorar el $\frac{1}{4}$ nos harán falta herramientas más complicadas. En particular hemos visto cómo de la ecuación funcional aproximada (2.28), reducíamos el problema a acotar un polinomio de Dirichlet. En general acotar una suma exponencial depende de dos cosas; por una parte de la derivada de la función, que en nuestro caso siempre será $\frac{t}{2\pi} \log n$, y por otra del rango de sumación. El inconveniente de (2.28) es que el número de sumandos es demasiado grande y necesitamos reducirlo para poder dar una mejor estimación. (Claramente muy pocos sumandos tampoco nos darán la suficiente información sobre la función zeta). Buscaremos una ecuación funcional aproximada en la que el polinomio de Dirichlet tenga un rango de sumación menor. Si nos fijamos en cómo dimos con (2.28) veremos que es necesario que el rango sea grande para poder aplicar el lema 6. Por tanto, reducir el número de sumandos pasará por mejorar dicho lema; es decir, encontrar una mejor aproximación de las sumas exponenciales. Dicha aproximación la encontraremos en función de integrales exponenciales, por lo que necesitamos tener un control sobre este tipo de integrales.

Vamos a necesitar algunos lemas para acotar integrales exponenciales debidos a van der Corput.

LEMA 7. Sea $F(x)$ real derivable en $[a, b]$, y sea $G(x)$ tal que $\frac{F'(x)}{G(x)}$ es monótona en $[a, b]$ y $\frac{F'(x)}{G(x)} \geq m > 0$ o $\frac{F'(x)}{G(x)} \leq -m < 0$. Entonces

$$\left| \int_a^b G(x) e(F(x)) dx \right| \leq \frac{4}{m}.$$

DEMOSTRACIÓN:

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\frac{F'(x)}{G(x)}$ es positiva y creciente.

$$\int_a^b G(x) \cos(F(x)) dx = \int_a^b \frac{G(x)}{F'(x)} F'(x) \cos(F(x)) dx.$$

Por el segundo teorema del valor medio para integrales obtenemos

$$\int_a^b \frac{G(x)}{F'(x)} F'(x) \cos(F(x)) dx = \frac{G(a)}{F'(a)} (\sin(F(\xi)) - \sin(F(a))).$$

Luego el módulo no supera $\frac{2}{m}$. Procediendo análogamente para la parte imaginaria obtenemos el resultado.

COROLARIO. Sea $F(x)$ real derivable en $[a, b]$, con $F'(x)$ monótona en $[a, b]$ y $F'(x) \geq m > 0$ o $F'(x) \leq -m < 0$. Entonces

$$\left| \int_a^b e(F(x)) dx \right| \leq \frac{4}{m}.$$

LEMA 8. Sea $F(x)$ real dos veces derivable en $[a, b]$, con $F''(x) \geq r > 0$ o $F''(x) \leq -r < 0$; y sea $G(x)$ tal que $|G(x)| \leq M$ y $\frac{F'(x)}{G(x)}$ monótona en $[a, b]$. Entonces

$$\left| \int_a^b G(x) e(F(x)) dx \right| \leq \frac{8M}{\sqrt{r}}$$

DEMOSTRACIÓN:

Como en el lema anterior podemos suponer $F''(x) \geq r > 0$. En este caso $F'(x)$ es creciente, y por tanto habrá como mucho un punto c en donde se anule. Consideramos

$$I = \int_a^b G(x) e(F(x)) dx = \int_a^{c-\delta} + \int_{c-\delta}^{c+\delta} + \int_{c+\delta}^b = I_1 + I_2 + I_3,$$

donde δ lo elegiremos más tarde. Asumimos que $a + \delta \leq c \leq b - \delta$, entonces en I_1, I_3 se tiene

$$F'(x) = \int_c^x F''(u) du \geq r(x - c) \geq r\delta.$$

Por tanto el lema 7 nos da $\max(|I_1|, |I_3|) \leq \frac{4M}{r\delta}$, mientras que $|I_2| \leq 2\delta M$. Es decir,

$$|I| \leq \frac{8M}{r\delta} + 2\delta M.$$

Tomando $\delta = 2r^{-\frac{1}{2}}$ obtenemos el resultado. Si $c < a + \delta$, $c > b - \delta$ o si $F'(x) \neq 0$ en todo el intervalo se razona de manera similar.¹¹.

COROLARIO. Si $F(x)$ está en las condiciones del anterior lema se tiene

$$\left| \int_a^b e(F(x)) dx \right| \leq \frac{8M}{\sqrt{r}}.$$

El siguiente paso consistirá en expresar nuestras sumas exponenciales, (polinomios de Dirichlet en nuestro caso), como suma de integrales exponenciales. En particular tenemos

LEMA 9. Sea $f(x)$ real $f \in C^2[a, b]$ y $f''(x) < 0$ en $[a, b]$ con $f'(b) = \alpha$, $f'(a) = \beta$ entonces

$$\sum_{a < n \leq b} e(f(n)) = \sum_{\alpha - \eta < \nu < \beta + \eta} \int_a^b e(f(x) - \nu x) dx + O(\log(\beta - \alpha + 2)),$$

donde η es cualquier constante positiva menor que 1.

DEMOSTRACIÓN:

Primeramente observamos que es suficiente considerar el caso $\eta - 1 < \alpha < \eta$, con lo que $\nu \geq 0$, ya que en otro caso consideramos la función $h(x) = f(x) - kx$

¹¹Este tipo de lemas existen para cualquier orden de la derivada k , y la demostración se construye por inducción, dandonos en cada caso $|I| = O\left(\frac{M}{r^{\frac{1}{k}}}\right)$

con $\eta - 1 < \alpha - k < \eta$. De esta forma

$$\begin{aligned}
 \sum_{a < n \leq b} e(f(n)) &= \sum_{a < n \leq b} e(h(n)) = \\
 &= \sum_{\alpha' - \eta < \nu < \beta' + \eta} \int_a^b e(h(x) - \nu x) dx + O(\log(\beta' - \alpha' + 2)) \\
 &= \sum_{\alpha - \eta < \nu + k < \beta + \eta} \int_a^b e(f(x) - (\nu + k)x) dx + O(\log(\beta - \alpha + 2)) \\
 &= \sum_{\alpha - \eta < \nu < \beta + \eta} \int_a^b e(f(x) - \nu x) dx + O(\log(\beta - \alpha + 2)).
 \end{aligned}$$

Por la fórmula de sumación de Euler-Maclaurin se obtiene

$$\sum_{a < n \leq b} e(f(n)) = \int_a^b e(f(x)) dx + 2\pi i \int_a^b \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) f'(x) e(f(x)) dx + O(1).$$

Cuando x no es un entero podemos utilizar la identidad

$$x - [x] - \frac{1}{2} = -\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(2\pi n x).$$

Las sumas parciales de la serie $S_n(x)$ están uniformemente acotadas en x y n , (ver [T2]) y al estar multiplicada por una función integrable, se puede integrar término a término, para escribir la segunda integral como

$$\begin{aligned}
 -2i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} \int_a^b \sin(2\pi \nu x) f'(x) e(f(x)) dx &= \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} \int_a^b \left(\overline{e(\nu x)} - e(\nu x)\right) f'(x) e(f(x)) dx.
 \end{aligned}$$

Podemos escribir la última integral como resta de dos integrales similares de la forma

$$\int_a^b \frac{f'(x)}{f'(x) - \nu} d(e(f(x) - \nu x)) - \int_a^b \frac{f'(x)}{f'(x) + \nu} d(e(f(x) + \nu x)).$$

Como $\frac{f'(x)}{f'(x)+\nu}$ es decreciente podemos aplicarle el segundo teorema del valor medio para integrales a la parte real e imaginaria, con lo que la segunda integral es

$$O\left(\frac{\beta}{\beta+\nu}\right).$$

Por tanto, este término contribuye a la serie

$$\begin{aligned} O\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\beta}{\nu(\beta+\nu)}\right) &= O\left(\sum_{\nu=1}^{\beta} \frac{1}{\nu}\right) + O\left(\sum_{\nu=\beta+1}^{\infty} \frac{\beta}{\nu^2}\right) \\ &= O(\log(\beta+2)) + O(1). \end{aligned}$$

De la misma forma, si $\nu > \beta + \eta$, el primer término es del orden de

$$\begin{aligned} O\left(\sum_{\nu>\beta+\eta} \frac{\beta}{\nu(\nu-\beta)}\right) &= O\left(\sum_{\eta+\beta<\nu<2\beta} \frac{1}{\nu-\beta}\right) + O\left(\sum_{\nu\geq 2\beta} \frac{\beta}{\nu^2}\right) \\ &= O(\log(\beta+2)) + O(1). \end{aligned}$$

Por último, si calculamos los términos restantes de forma directa,

$$\sum_{\nu=1}^{\beta} \frac{1}{\nu} \int_a^b e(f(x) - \nu x) f'(x) dx = \sum_{\nu=1}^{\beta} \frac{e(f(x) - \nu x)}{2\pi i \nu} \Big|_a^b + \sum_{\nu=1}^{\beta} \int_a^b e(f(x) - \nu x) dx,$$

el resultado se deduce observando que el primer término es $O(\log(\beta+2))$.

Observación: De este lema, y del corolario al lema 7 se puede deducir el lema 6. No hay mas que tomar $\eta = 1 - \delta$, y si $f'(x) \geq \eta$ o $f'(x) \leq -\eta$, entonces el lema 7 nos da

$$\int_a^b e(f(x)) = O(1).$$

El lema 9 admite la siguiente generalización cuando los coeficientes que acompañan a la exponencial no son constantes pero tienen una propiedad adicional.

LEMA 10. Sea $f(x)$ como en el lema anterior, y sea $g(x)$ una función positiva, decreciente, con derivada continua y tal que $|g'(x)|$ sea decreciente. Entonces

$$\begin{aligned} \sum_{a < n \leq b} g(n) e(f(n)) &= \sum_{\alpha - \eta < \nu < \beta + \eta} \int_a^b g(x) e(f(x) - \nu x) dx \\ &\quad + O(g(a) \log(\beta - \alpha + 2)) + O(|g'(a)|). \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN:

Razonamos igual que en el lema 9, pero esta vez en la fórmula de Euler-Maclaurin escogemos la función

$$\phi(x) = g(x)e(f(x)).$$

De esta forma nos aparecen términos del tipo

$$\int_a^b \frac{g(x)f'(x)}{f'(x) \pm \nu} d(e(f(x) \pm \nu x))$$

o bien

$$\int_a^b \frac{g'(x)}{f'(x) \pm \nu} d(e(f(x) \pm \nu x)).$$

El término de error que aparece de las primeras se acota de forma análoga por

$$O(g(a) \log(\beta - \alpha + 2)),$$

mientras que el error de las del segundo es, por ejemplo, como

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{|g'(a)|}{\nu^2} = O(|g'(a)|),$$

de donde se deduce el resultado.

Ya podemos establecer nuestra segunda ecuación funcional aproximada con un número mucho menor de sumandos en el polinomio de Dirichlet. La demostración se basa en una fórmula asintótica para la integral que aparece en el lema 10. Para ello no nos serán suficientes los lemas de Van der Corput, ya que sólo nos proporcionaban cotas superiores. Habrá que hacer un estudio más detallado de esta integral en particular.

TEOREMA 27. Sea h una constante positiva, $0 < \sigma < 1$, $2\pi xy = |t|$, $x > h > 0$, $y > h > 0$. Entonces,

$$(2.30) \quad \zeta(s) = \sum_{n \leq x} \frac{1}{n^s} + \chi(s) \sum_{n \leq y} \frac{1}{n^{1-s}} + O(x^{-\sigma} \log |t|) + O(|t|^{\frac{1}{2}-\sigma} y^{\sigma-1}).$$

¿donde la función $\chi(s)$ se define en 2.5?

DEMOSTRACIÓN:

Es suficiente probarlo para $t > 0$. En este caso por el lema 10 se tiene

$$\sum_{x < n \leq N} n^{-\sigma} e^{-it \log n} = \sum_{\frac{t}{2\pi N} - \eta < \nu \leq y + \eta} \int_x^N \frac{e(u\nu)}{u^s} du + O \left\{ x^{-\sigma} \log \left(\frac{t}{x} - \frac{t}{N} + 2 \right) \right\}.$$

Si $2\pi N\eta > t$ entonces $\nu > 0$, y teniendo en cuenta que

$$\int_x^N u^{-s} du = \frac{N^{1-s} - x^{1-s}}{1-s}$$

nos queda, sustituyendo en (2.29),

$$\zeta(s) = \sum_{n \leq x} \frac{1}{n^s} + \sum_{1 \leq \nu \leq y + \eta} \int_x^N \frac{e(u\nu)}{u^s} du + O(x^{-\sigma} \log t) + O(tN^{-\sigma}),$$

ya que $x^{1-s}/(1-s) = O(x^{-\sigma})$.

Por otra parte

$$\int_0^\infty e(u\nu) u^{-s} du = \Gamma(1-s) \left(\frac{2\pi\nu}{i} \right)^{s-1}.$$

Aplicando el lema 7 tenemos

$$\begin{aligned} \int_N^\infty u^{-\sigma} \frac{e(u\nu)}{u^{it}} du &= O \left(\frac{N^{-\sigma}}{\nu - \frac{t}{2\pi N}} \right) \\ &= O \left(\frac{N^{-\sigma}}{\nu} \right) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \int_0^x u^{-s} e(u\nu) du &= \frac{u^{1-s}}{1-s} e(u\nu) \Big|_0^x + \frac{2\pi i \nu}{s-1} \int_0^x u^{1-s} e(u\nu) du \\ &= O \left(\frac{x^{1-\sigma}}{t} \right) + O \left(\frac{\nu}{t} \frac{x^{1-\sigma}}{\nu - \frac{t}{2\pi x}} \right). \end{aligned}$$

Finalmente

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq \nu \leq y - \eta} \int_x^N \frac{e(u\nu)}{u^s} du &= \Gamma(1-s) \left(\frac{2\pi}{i} \right)^{s-1} \sum_{1 \leq \nu \leq y - \eta} \frac{1}{\nu^{1-s}} + O(N^{-\sigma} \log y) + \\ &\quad + O \left(\frac{x^{-\sigma}}{t} \right) + O \left(\frac{x^{1-\sigma}}{t} \sum_{1 \leq \nu \leq y - \eta} \frac{\nu}{\nu - \frac{t}{2\pi x}} \right) \\ &= \Gamma(1-s) \left(\frac{2\pi}{i} \right)^{s-1} \sum_{1 \leq \nu \leq y - \eta} \frac{1}{\nu^{1-s}} + O(N^{-\sigma} \log t) + O(x^{-\sigma} \log t). \end{aligned}$$

es negativo

limitar lo de que

puedo poner "y"

y ponerlo al revers para que sea (+)

y - r

Quede quizás

Nos falta por estimar un término de $y - \eta < \nu \leq y + \eta$. En ese caso el lema 8 nos da

$$\int_0^x u^{1-s} e(u\nu) du = O \left\{ x^{1-\sigma} \left(\frac{t}{x^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right\},$$

quedando un error de

$$O \left\{ \frac{y}{t} x^{1-\sigma} \left(\frac{t}{x^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right\} = O \left(y^{\sigma-1} t^{\frac{1}{2}-\sigma} \right).$$

Si tenemos en cuenta que la función $\chi(s)$ definida en (2.5) cumple

$$\begin{aligned} \chi(s) &= 2^s \pi^{s-1} \operatorname{sen} \frac{s\pi}{2} \Gamma(1-s) = (2\pi)^{s-1} \Gamma(1-s) \left(\frac{e^{i\frac{\pi}{2}s} - e^{-i\frac{\pi}{2}s}}{i} \right) \\ &= \left(\frac{2\pi}{i} \right)^{s-1} \Gamma(1-s) (1 - e^{i\pi s}) \\ &= \left(\frac{2\pi}{i} \right)^{s-1} \Gamma(1-s) (1 + O(e^{-\pi t})) \end{aligned}$$

y reemplazamos $\sum_{\nu \leq y-\eta}$ por $\sum_{\nu \leq y}$, cometiendo un error

$$O \left(\Gamma(1-s) \left(\frac{2\pi}{i} \right)^{s-1} y^{\sigma-1} \right) = O \left(t^{\frac{1}{2}-\sigma} y^{\sigma-1} \right),$$

obtenemos el resultado sin más que hacer N suficientemente grande. Para la última igualdad hemos tenido en cuenta que

$$\chi(s) = O \left(\Gamma(1-s) \left(\frac{2\pi}{i} \right)^{s-1} \right) = O \left(|t|^{\frac{1}{2}-\sigma} \right).$$

Refinando un poco el método se puede quitar el $\log |t|$ que aparece en el término de error, obteniendo de esta forma la que se conoce como "ecuación funcional aproximada" y que fue establecida por Hardy y Littlewood. Sin embargo (2.30) es suficiente para muchos propósitos, y en particular a nosotros nos permitirá desarrollar el resto de la teoría.

En (2.30) observamos que hemos ganado alguna flexibilidad en el rango de los polinomios de Dirichlet que aparecen, y los elegiremos dependiendo de

la parte real de s . En el caso $\sigma = \frac{1}{2}$ es claro que deberemos escoger ambos límites iguales $x = y = O(\sqrt{t})$, lo que nos proporciona una gran ventaja de esta ecuación sobre (2.28).

Resumiendo, para mejorar el $\frac{1}{4}$ tenemos que medir la cancelación que aparece en sumas del estilo

$$S = \sum_{a < n \leq b} n^{-\sigma} e^{-it \log n}.$$

Por sumación parcial (A.24)

$$|S| < a^{-\sigma} \max_{a < c \leq b} \left| \sum_{a < n \leq c} e^{-it \log n} \right|.$$

De esta forma nuestro problema se centra en estimar sumas

$$(2.31) \quad \sum_{a < n \leq b} e(f(n))$$

donde $f(n) = -\frac{t}{2\pi} \log n$. Existen varios métodos para estudiar la cancelación de dichas sumas. El primero que veremos se debe a Weyl-Hardy-Littlewood. La idea es aproximar S por una suma en donde la fase sea un polinomio $g(n)$ de grado k suficientemente alto. Después,

$$\begin{aligned} |S_1|^2 &= \left| \sum e(g(n)) \right|^2 = \sum_{m,n} e(g(n) - g(m)) \\ &= \sum_{\nu} \sum_n e(g(n+\nu) - g(n)) \leq \sum_{\nu} \left| \sum_n e(g(n+\nu) - g(n)) \right|, \end{aligned}$$

donde ahora $g(n+\nu) - g(n)$ es un polinomio de grado $k-1$. Repitiendo el proceso llegamos a una suma en donde la fase es lineal, y que podemos estimar de la forma

$$|S_k| = \left| \sum_{a < n \leq b} e(\lambda n + \mu) \right| = \left| \frac{1 - e((b-a)\lambda)}{1 - e(\lambda)} \right| \leq \frac{1}{|\sin \pi \lambda|}.$$

Si $|\csc \pi \lambda|$ es pequeño comparado con la longitud del intervalo, nos sirve para dar una cota no trivial de la suma original S . Ahora bien, λ está en función del último coeficiente de $g(x)$, el cual será más o menos la derivada k -ésima de f . Así, si k es suficientemente alto, la derivada será pequeña, el seno no oscilará mucho, y nos permitirá dar una estimación no trivial de $|S_k|$. Por otra parte no nos interesa que k sea demasiado alto porque deberíamos aplicar muchas veces Cauchy-Schwartz, y perderíamos mucha información.

TEOREMA 28.

$$\zeta(1/2 + it) = O(t^{\frac{1}{6}} \log^{\frac{3}{2}} t).$$

Vamos a utilizar el método W-H-L descrito anteriormente, para lo cual deberemos observar la relación que hay entre la suma original y aquella en la que aparece el polinomio.

LEMA 11. Sea $t \geq 1$, $\frac{b-a}{a} \leq \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{3}}$ y

$$\left| \sum_1^\mu \exp \left\{ -it \left(\frac{m}{a} - \frac{1}{2} \frac{m^2}{a^2} \right) \right\} \right| \leq M \quad (\mu \leq b-a).$$

Entonces

$$\left| \sum_{a < n \leq b} e^{-it \log n} \right| < AM$$

DEMOSTRACIÓN:

$$\begin{aligned} |S| &= \left| \sum_{a < n \leq b} e^{-it \log n} \right| = \left| \sum_{m=1}^{b-a} \exp(-it \log m + a) \right| \\ &= \left| \sum_{m=1}^{b-a} \exp \left(-it \left(\frac{m}{a} - \frac{m^2}{2a^2} \right) \right) \exp \left\{ -it \left(\sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \left(\frac{m}{a} \right)^k \right) \right\} \right|. \end{aligned}$$

SIN HACER (es el C.23 line 348)

Desarrollando en serie de potencias la última exponencial, y llamando a los coeficientes de dicha serie $e_\nu(t)$, $\nu = 1, 2, \dots$ tenemos

$$\left| \sum_{m=1}^{b-a} \exp \left(-it \left(\frac{m}{a} - \frac{m^2}{2a^2} \right) \right) \sum_{\nu=0}^{\infty} e_\nu(t) \left(\frac{m}{a} \right)^\nu \right| =$$

$$= \left| \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{e_\nu(t)}{a^\nu} \sum_{m=1}^{b-a} \exp \left\{ -it \left(\frac{m}{a} - \frac{m^2}{2a^2} \right) \right\} \cdot m^\nu \right|$$

Haciendo sumación parcial queda

quede y teniendo en cuenta como son $e_\nu(t)$

$$|S| \leq 2M \sum_{\nu=0}^{\infty} |e_\nu(t)| \left(\frac{b-a}{a} \right)^\nu \leq 2M \exp \left\{ t \left(\frac{(b-a)^4}{4a} + \frac{(b-a)^5}{5a} + \dots \right) \right\}$$

$$\leq 2M \exp \left\{ \frac{t \left(\frac{b-a}{a} \right)^4}{1 - \frac{b-a}{a}} \right\} \leq 2Me^2.$$

Por lo 2º de los. no hay un problema en como se lo ext.

Demos ahora una cota para el polinomio cuadrático

LEMA 12. Sea $S = \sum_1^\mu e(\alpha m^2 + \beta m)$ entonces

$$|S|^2 \leq \mu + 2 \sum_1^{\mu-1} \min(\mu, |\csc 2\pi\alpha r|).$$

quizé por $\csc$

DEMOSTRACIÓN:

$$|S|^2 = \sum_{m=1}^{\mu} \sum_{n=1}^{\mu} e(\alpha n^2 + \beta n - \alpha m^2 - \beta m)$$

$$= \mu + \sum_{m \neq n} e(\alpha n^2 + \beta n - \alpha m^2 - \beta m)$$

$$\leq \mu + 2 \left| \sum_{m=1}^{\mu} \sum_{m < n \leq \mu} e(\alpha n^2 + \beta n - \alpha m^2 - \beta m) \right|.$$

Haciendo $n = k + m$ queda

$$|S|^2 \leq \mu + 2 \sum_{k=1}^{\mu-1} \left| \sum_{m=1}^{\mu-k} e(2\alpha km) \right| \leq \mu + 2 \sum_1^{\mu-1} \min(\mu, |\csc 2\pi\alpha r|).$$

Ya podemos demostrar el teorema. Sea $2t^{\frac{1}{3}} \leq a < At$, $b \leq 2a$ y $\mu = \left\lfloor \frac{1}{2}at^{-\frac{1}{3}} \right\rfloor$, entonces

$$S = \sum_{a+1}^b e^{-it \log n} = \sum_{M=0}^N \sum_{a+M\mu}^{a+(M+1)\mu} e^{-it \log n} = \sum_{M=0}^N S_M$$

donde $N = \left\lfloor \frac{b-a}{\mu} \right\rfloor = O\left(\frac{a}{\mu}\right) = O\left(t^{\frac{1}{3}}\right)$. Por el lema 11, $S_M = O(C)$, donde

$$C = \max_{\mu' \leq \mu} \left| \sum_{r=1}^{\mu'} \exp \left\{ -it \left(\frac{r}{a+M\mu} - \frac{r^2}{2(a+M\mu)^2} \right) \right\} \right|.$$

Por el lema 12,

$$C \ll \left(\mu + \sum_{r=1}^{\mu-1} \min \left\{ \mu, \left| \csc \left(\frac{tr}{2(a+M\mu)^2} \right) \right| \right\} \right)^{\frac{1}{2}}$$

y por la desigualdad de Cauchy-Schwartz se tiene

$$\begin{aligned} |S| &\leq (N+1)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{M=0}^N \left[\mu + \sum_{r=1}^{\mu-1} \min \left\{ \mu, \left| \csc \left(\frac{tr}{2(a+M\mu)^2} \right) \right| \right\} \right] \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= O \left\{ (N+1)\mu^{\frac{1}{2}} \right\} + \\ &+ O \left\{ (N+1)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{r=1}^{\mu-1} \sum_{M=0}^N \min \left\{ \mu, \left| \csc \left(\frac{tr}{2(a+M\mu)^2} \right) \right| \right\} \right)^{\frac{1}{2}} \right\}. \end{aligned}$$

Además

$$\frac{tr}{2(a+M\mu)^2} - \frac{tr}{2(a+(M+1)\mu)^2} = \frac{tr\mu(2a+(2M+1)\mu)}{2(a+M\mu)^2} \left(a + (M+1)\mu \right)^{-2},$$

que cuando M varía, se mantiene entre dos múltiplos constantes de $tr\mu/a^3$, o teniendo en cuenta la definición de μ , de r/μ^2 . De esta forma, si fijamos el intervalo $(k\pi, k\pi \pm \frac{\pi}{2})$, todos excepto como mucho uno de los valores de M , para los que $\frac{tr}{2(a+M\mu)^2}$ pertenece al intervalo, satisfacen

$$\left| \sin \left(\frac{tr}{2(a+M\mu)^2} \right) \right| \geq \frac{Ar}{\mu^2}.$$

Todos excepto dos serán $2Ar/\mu^2$, y así hasta $M = O\left(t^{\frac{1}{3}}\right)$ términos. Por tanto la suma en M quedará

$$\mu + O\left(\frac{\mu^2}{r} + \frac{\mu^2}{2r} + \frac{\mu^2}{3r} + \dots\right) = \mu + O\left(\frac{\mu^2}{r} \log t\right) = O\left(\frac{\mu^2}{r} \log t\right).$$

El número de tales intervalos es $O\left((N+1)\frac{r}{\mu^2} + 1\right)$, con lo que la suma doble queda

$$O\left(\sum_{r=1}^{\mu-1} \left[(N+1) \log t + \frac{\mu^2}{r} \log t\right]\right) = O((N+1)\mu \log t) + O(\mu^2 \log^2 t),$$

que sustituyendo en el valor de la suma total nos da

$$\begin{aligned} |S| &= O\left((N+1)\mu^{\frac{1}{2}}\right) + O\left((N+1)\mu^{\frac{1}{2}} \log^{\frac{1}{2}} t\right) + O\left((N+1)^{\frac{1}{2}} \mu \log t\right) \\ &= O\left(t^{\frac{1}{6}} a^{\frac{1}{2}} \log^{\frac{1}{2}} t\right) + O\left(at^{-\frac{1}{6}} \log t\right). \end{aligned}$$

Si tomamos $a \ll t^{\frac{1}{2}}$ podemos quitar el segundo término y por sumación parcial obtenemos

$$\sum_a^b \frac{1}{n^{\frac{1}{2}+it}} = O\left(t^{\frac{1}{6}} \log^{\frac{1}{2}} t\right).$$

Dividiendo en trozos diádicos el intervalo

$\left[2t^{\frac{1}{3}}, \left(\frac{t}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$ obtenemos $O(\log t)$ sumas del mismo orden. De esta forma

$$\sum_{2t^{\frac{1}{3}} < n \leq \left(\frac{t}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}+it}} = O\left(t^{\frac{1}{6}} \log^{\frac{3}{2}} t\right).$$

Por último

$$\sum_{1 \leq n \leq 2t^{\frac{1}{3}}} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}+it}} = O\left(t^{\frac{1}{6}}\right).$$

El resultado ahora se obtiene de (2.30).

Veremos un segundo método para acotar sumas del tipo (2.31). El método de J.G. Van der Corput. En realidad este método empieza en los lemas 7-10, con los que se consigue transformar la suma original en otra de integrales

exponenciales, y acotar ésta con los lemas 7 y 8; sin embargo estos últimos lemas tienen varios inconvenientes, el primero es que el intervalo no aparece de forma explícita en la estimación, lo que la hace menos manejable, ya que como ya observamos la estimación en general depende del intervalo. El segundo y más importante problema es que sólo nos proporcionan cotas superiores para la integral. Esto se solucionó con un teorema de fase estacionaria, con el que se obtiene una fórmula asintótica para la integral, en la que la mayor contribución proviene de los puntos donde se anula la derivada de la fase, de ahí el nombre del teorema. Introduciendo dicha fórmula en el lema 10, se obtiene otra suma más fácil de estimar que la primera. Esto sería la primera parte del método. En nuestro caso no nos hará falta esta primera parte, y solo nos dedicaremos a la segunda, en la que aprovecharemos la regularidad de la función.¹² Para ello utilizaremos un lema que nos permite escribir nuestra suma en función del rango de sumación, y de otra suma en la que aparece, de alguna manera, la derivada de la fase. Si la función es k veces derivable, podremos aplicar este lema hasta $k - 2$ veces. De esta forma obtendremos una suma donde la función ahora será la i -ésima derivada, que podremos acotar gracias al lema 8. Hemos obtenido así alrededor de k formas distintas de estimar la suma original, lo que proporciona una gran flexibilidad al método. El lema en cuestión es el siguiente

LEMA 13. Sea $f(n)$ real, $a < n \leq b$ y $0 < q \leq b - a$ entonces

$$|S| = \left| \sum_{a < n \leq b} e(f(n)) \right| < (b-a)q^{-\frac{1}{2}} + \left((b-a)q^{-1} \sum_{h=1}^{q-1} \left| \sum_{a < m \leq b-h} e(f(m+h) - f(m)) \right| \right)^{-\frac{1}{2}}$$

DEMOSTRACIÓN:

¹² Ambas partes forman lo que se llama hoy en día, teoría de los pares de exponentes. Para más detalles ver [Ch] o [Iv1].

que f(h) sea b+k por q>3 y que

Si $q \leq 2$ el resultado se sigue trivialmente de $(b-a) \left(\ll \right) (b-a)q^{-\frac{1}{2}}$ y $|S| < (b-a)$. Además se puede suponer que es un entero, ya que el orden a la derecha no varía al cambiar el número por el entero más cercano. Con q en esas condiciones se tiene

$$qS = \sum_{m=1}^q \sum_{n=a-m+1}^{b-m} e(f(m+n)).$$

Definimos $f(n) = 0$ si $n > b$ o $n \leq a$. Entonces, intercambiando el orden de sumación obtenemos

$$qS = \sum_n \sum_{m=1}^q e(f(m+n)).$$

Aplicando Cauchy-Schwartz y observando que n solo puede tomar $b-a+q \leq 2(b-a)$ valores para los que la suma interior no se anula, tenemos

$$|qS|^2 \leq 2(b-a) \sum_n \left| \sum_{m=1}^q e(f(m+n)) \right|^2.$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{m=1}^q e(f(m+n)) \right|^2 &= \sum_{m=1}^q \sum_{h=1}^q e(f(m+n)) - e(f(h+n)) \\ &= q + \sum_{m < h} e(f(m+n)) - e(f(h+n)) + \\ &\quad + \sum_{h < m} e(f(m+n)) - e(f(h+n)). \end{aligned}$$

Luego

$$\sum_n \left| \sum_{m=1}^q e(f(m+n)) \right|^2 \leq 2(b-a)q + 2 \left| \sum_n \sum_{h < m} e(f(m+n)) - e(f(h+n)) \right|.$$

En la última suma hacemos $m+n = \nu+r$, $h+n = \nu$ para unos ν, r fijos tales que $a < \nu \leq b-r$, $1 \leq r \leq q-1$ exactamente $q-r$ veces; es decir, $h = 1, \dots, q-r$, $n = \nu - h$. Por tanto la última suma la podemos acotar por

$$\left| \sum_{r=1}^{q-1} (q-r) \sum_{a < \nu \leq b-r} e(f(\nu+r)) - e(f(\nu)) \right| \leq q \sum_{r=1}^{q-1} \left| \sum_{a < \nu \leq b-r} e(f(\nu+r)) - e(f(\nu)) \right|$$

y de esta forma

$$|qS|^2 \leq 4(b-a)^2q + 4(b-a)q \sum_{r=1}^{q-1} \left| \sum_{a < \nu \leq b-r} e(f(\nu+r)) - e(f(\nu)) \right|.$$

El resultado se concluye extrayendo la raíz cuadrada y dividiendo por q .

LEMA 14. Sea $k \geq 2$ un entero fijo, $K = 2^{k-1}$, $b \geq a+1$ y $f(x) \in C^k[a, b]$ tal que $0 < \lambda_k \leq f^{(k)}(x) \leq A\lambda_k$, (o lo mismo para $-f^{(k)}(x)$). Entonces

$$\sum_a^b e(f(n)) = O\left(A^{\frac{2}{K}}(b-a)\lambda_k^{\frac{1}{2K-2}}\right) + O\left((b-a)^{1-\frac{2}{K}}\lambda_k^{-\frac{1}{2K-2}}\right),$$

donde las constantes involucradas son independientes de k .

DEMOSTRACIÓN:

Podemos suponer $\lambda_k > 1$, pues en otro caso el resultado sería trivial.

Si $k = 2$ los lemas 8 y 9 nos dan

$$O\left((\beta - \alpha + 1)\lambda_2^{-\frac{1}{2}}\right) + O(\log(\beta - \alpha + 2)),$$

donde

$$\beta - \alpha = f'(a) - f'(b) = O(A(b-a)\lambda_2).$$

y

$$\begin{aligned} \log(\beta - \alpha + 2) &= O(\beta - \alpha + 2) = O(A(b-a)\lambda_2) + O(1) \\ &= O\left(A(b-a)\lambda_2^{\frac{1}{2}}\right) + O(1), \end{aligned}$$

lo que nos da el resultado para ese caso.

Para $k \geq 3$ razonamos por inducción en k . Sea h fijo, y $g(x) = f(x+h) - f(x)$, entonces $h\lambda_k \leq g^{(k-1)}(x) \leq hA\lambda_k$. Aplicando el teorema a la función $g(x)$ con $k-1$ derivadas queda

$$\sum_{a < n \leq b-h} e(g(n)) < C_1 A^{\frac{4}{K}}(b-a)(h\lambda_k)^{\frac{1}{K-2}} + C_2(b-a)^{1-\frac{4}{K}}(h\lambda_k)^{-\frac{1}{K-2}}.$$

Sumando en $h = 1, \dots, q - 1$ obtenemos

$$\sum_{h=1}^{q-1} \sum_{a < n \leq b-h} e(g(n)) < C_1 A^{\frac{4}{K}} (b-a) (\lambda_k)^{\frac{1}{K-2}} q^{1+\frac{1}{K-2}} \\ + 2C_2 (b-a)^{1-\frac{4}{K}} (\lambda_k)^{-\frac{1}{K-2}} q^{1-\frac{1}{K-2}},$$

donde hemos mayorado la suma $\sum_{h=1}^{q-1} h^{\frac{1}{K-2}}$ por la integral. *correspondiente*

Si aplicamos el lema anterior, deducimos la siguiente cota para la suma original:

$$\left| \sum_{a < n \leq b} e(f(n)) \right| < C_3 (b-a) q^{-\frac{1}{2}} + \\ + C_4 \left[(b-a) q^{-1} \left\{ C_1 A^{\frac{4}{K}} (b-a) \lambda_k^{\frac{1}{K-2}} q^{1+\frac{1}{K-2}} + \right. \right. \\ \left. \left. + 2C_2 (b-a)^{1-\frac{4}{K}} (\lambda_k)^{-\frac{1}{K-2}} q^{1-\frac{1}{K-2}} \right\} \right]^{\frac{1}{2}} \\ \leq C_3 (b-a) q^{-\frac{1}{2}} + C_1^{\frac{1}{2}} C_4 (b-a) q^{\frac{1}{2K-4}} A^{\frac{2}{K}} \lambda_k^{\frac{1}{2K-4}} \\ + \sqrt{2} C_2^{\frac{1}{2}} C_4 (b-a)^{\frac{3K-8}{2K}} \lambda_k^{-\frac{1}{2K-4}} q^{-\frac{1}{2K-4}}. \quad 1 - \frac{1}{2K}$$

Escogiendo $q = \left\lceil \lambda_k^{-\frac{1}{K-1}} \right\rceil + 1$ hacemos los dos términos del mismo orden. Además, con esta elección de q ,

$$\lambda_k^{-\frac{1}{K-1}} \leq q \leq 2\lambda_k^{-\frac{1}{K-1}},$$

y obtenemos, tras algunas operaciones,

$$\leq \left(C_3 + 2C_4 C_1^{\frac{1}{2}} \right) A^{\frac{2}{K}} (b-a) \lambda_k^{\frac{1}{2K-2}} + C_4 (2C_2)^{\frac{1}{2}} (b-a)^{1-\frac{2}{K}} \lambda_k^{-\frac{1}{2K-2}},$$

que nos da el resultado en el caso k . Las constantes en el paso k son las del paso $k - 1$ si

$$C_3 + 2C_4 C_1^{\frac{1}{2}} < C_1, \quad C_4 (2C_2)^{\frac{1}{2}} < C_2,$$

lo cual es cierto para C_1, C_2 suficientemente grandes.

Hemos asumido que $q \leq b - a$ que es cierto para $2\lambda_k^{-\frac{1}{K-1}} \leq b - a$. En otro caso la acotación trivial nos daría el resultado.

Como ya vimos en el lema 6, una buena aproximación de sumas por integrales depende de que el tamaño de la derivada no sea muy grande. Este hecho se refleja en el primer término de la aproximación. Ahora bien, si nos fijamos en el segundo término vemos que la derivada tampoco puede ser demasiado pequeña, porque en este caso los sumandos serían como constantes y la estimación no mejoraría a la trivial.

Vamos a aplicar el método para dar una estimación del orden en la banda crítica. En este caso las derivadas de la función son $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k (k-1)!t}{2\pi x^k}$ que, en un intervalo $[a, 2a]$ sería del orden $f^{(k)}(x) = O(ta^{-k})$, lo que nos dice que para que la derivada no sea demasiado pequeña habrá que escoger los k 's más pequeños a medida que aumenta la longitud del intervalo.

TEOREMA 29. Sea el entero $l \geq 2$, $L = 2^{l-1}$, $\sigma = 1 - \frac{l}{2L-2}$. Entonces

$$(2.32) \quad \zeta(s) = O\left(t^{\frac{1}{2L-2}} \log t\right).$$

DEMOSTRACIÓN:

Aplicamos el lema anterior a

$$f(x) = -\frac{t}{2\pi} \log x, \quad f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k (k-1)!t}{2\pi x^k}.$$

Si $a < n \leq b \leq 2a$ tenemos

$$\frac{(k-1)!t}{2\pi(2a)^k} \leq |f^{(k)}| \leq \frac{(k-1)!t}{2\pi a^k}$$

y podemos tomar $\lambda_k = \frac{(k-1)!t}{2\pi(2a)^k}$, $A = 2^k$. Entonces

$$\sum_{a < n \leq b} n^{-it} = O\left(a^{1-\frac{k}{2K-2}} t^{\frac{1}{2K-2}}\right) + O\left(a^{1-\frac{k}{K}+\frac{k}{2K-2}} t^{-\frac{1}{2K-2}}\right).$$

El segundo término se puede omitir si

$$a = O\left(t^{K/(kK-2K+2)}\right) = O\left(t^{P(k)}\right).$$

Por sumación parcial queda con a de ese orden

$$\sum_{a < n \leq b} n^{-\sigma - it} = O\left(a^{1-\sigma - \frac{k}{2K-2}} t^{\frac{1}{2K-2}}\right).$$

Haciendo $\sigma = 1 - \frac{l}{2L-2}$ obtenemos la estimación

$$\sum_{a < n \leq b} n^{-\sigma - it} = O\left(a^{\frac{l}{2L-2} - \frac{k}{2K-2}} t^{\frac{1}{2K-2}}\right).$$

Tomando ahora $k = l$

$$\left| \sum_{n \leq t^{P(l)}} n^{-\sigma - it} \right| \leq \sum_{N=0}^{C \log t} \left| \sum_{2^{-(N+1)t^{P(l)}} < n \leq 2^{-N}t^{P(l)}} n^{-\sigma - it} \right| = O\left(t^{\frac{1}{2L-2}} \log t\right).$$

Por otra parte

$$\sum_{t^{P(l)} < n \leq t} \frac{1}{n^s} = \sum_m \sum_{2^{-m}t < n \leq 2^{1-m}t} \frac{1}{n^s}.$$

Para cada m hay un $k < l$ tal que

$$t^{P(k+1)} < 2^{-m} \leq t^{P(k)}.$$

Por tanto

$$\sum_{2^{-m}t < n \leq 2^{1-m}t} \frac{1}{n^s} = O\left(t^{\{l/(2L-2) - k/(2K-2)\}P(k+1) + 1/(2K-2)}\right) = O\left(t^{E(l,k)}\right)$$

Y el exponente $E(l, k)$ no supera $\frac{1}{2L-2}$, ya que la desigualdad

$$E(l, k) \leq \frac{1}{2L-2}$$

se reduce despues de algunas operaciones a

$$(l-k)K \leq L-K$$

es decir

$$l-k \leq 2^{l-k} - 1$$

que
cambiar

Para ver que
el exponente
E(l,k) no sup
1/(2L-2) utilizamos

la desigualdad $l-k \leq 2^{l-k} - 1$ que sob esto
para cualquier l, k enteros. ~~es evidentemente cierto~~
ya que $E(l,k) \leq \frac{1}{2L-2}$ se reduce tras alguna
operación a dicho los

Lo cual es cierto. Como de nuevo hay $O(\log t)$ términos,

$$\sum_m \sum_{2^{-m}t < n \leq 2^{1-m}t} \frac{1}{n^s} = O\left(t^{\frac{1}{2L-2}} \log t\right).$$

El resultado se deduce de (2.28).

Tomando $l = 3$ se deduce *obtenemos*

$$\zeta(1/2 + it) = O\left(t^{\frac{1}{6}} \log t\right),$$

que mejora la potencia del logaritmo en el teorema 28.

Observación: Con el método W-H-L. también se obtiene una cota del mismo estilo aproximando la función por un polinomio de mayor grado y utilizando la desigualdad de Hölder tantas veces como el grado del polinomio para que la suma tenga fase lineal. De esta forma se obtiene la cota $\zeta(1/2 + it) = O\left(t^{\frac{1}{(l+1)L}} \log^{1+\frac{1}{L}} t\right)$ en $\sigma = 1 - \frac{1}{L}$ para $l \geq 2$, $L = 2^{l-1}$. Sin embargo debemos observar la potencia del método de Van der Corput, donde no nos hizo falta utilizar (2.30), y por tanto la longitud del polinomio de Dirichlet que estima es mucho mayor, obteniendo una cota algo mejor.

Actualmente existen diversos métodos para conseguir cotas no triviales de la función zeta en la recta crítica. En particular, gracias al método de los pares de exponentes y a una generalización de éste a dimensiones superiores (es decir, que acotan sumas dobles, triples, etc), se consiguen mejores cotas que el exponente $\frac{1}{6}$. Históricamente se han conseguido las siguientes cotas de $\mu(\frac{1}{2})$

$\mu(1/2) \leq 1/6 = 0.166\dots$	G.H.Hardy y J.E.Littlewood (1921)
$\mu(1/2) \leq 163/988 = 0.164979\dots$	A.Walfisz (1924)
$\mu(1/2) \leq 27/164 = 0.164634\dots$	E.C.Titchmarsh (1931)
$\mu(1/2) \leq 229/1392 = 0.164511\dots$	E.Phillips (1933)
$\mu(1/2) \leq 0.164510\dots$	R.A.Rankin (1955)
$\mu(1/2) \leq 19/116 = 0.163793\dots$	E.C.Titchmarsh (1942)
$\mu(1/2) \leq 15/92 = 0.163043\dots$	S.H.Min (1949)
$\mu(1/2) \leq 6/37 = 0.162162\dots$	W.Haneke (1963)-Chen Jing-run (1965)
$\mu(1/2) \leq 173/1067 = 0.162136\dots$	G.Kolesnik (1973)
$\mu(1/2) \leq 35/216 = 0.162037037\dots$	G.Kolesnik (1982)
$\mu(1/2) \leq 139/858 = 0.162004\dots$	G.Kolesnik (1985)
$\mu(1/2) \leq 9/56 = 0.16071\dots$	E.Bombieri y H.Iwaniec (1986)
$\mu(1/2) \leq 89/570 = 0.15614\dots$	M.N.Huxley (1988).

MOMENTOS

Como ya hemos dicho, el problema del orden de $\zeta(s)$ en la banda crítica permanece aún sin resolver, y actualmente todavía parece muy difícil de atacar. Una posible forma de entender el problema es considerar las norma L_p e intentar deducir de ahí algún resultado de la norma L_∞ . En este punto aparece la teoría de los momentos de la función zeta. Esta teoría tiene interés en sí mismo y aparece de manera decisiva en muchas partes del estudio de $\zeta(s)$. Es también importante señalar que el hecho de dar cotas superiores a los momentos de la función zeta tiene aplicaciones en la teoría de los números primos, así como en otros problemas aritméticos como el problema del divisor, o el Lattice point problem.

En particular vamos a considerar la integral

$$\frac{1}{T} \int_1^T |\zeta(\sigma + it)|^{2k} dt.$$

El motivo por el que el orden es par es claro. En Primer lugar observamos que los momentos de orden impar se deducen de estos por la desigualdad de Cauchy-Schwartz, y en segundo lugar como $|z|^2 = z\bar{z}$, podemos escribir la integral de manera explícita gracias a las fórmulas para $\zeta(s)$. En particular, si $\sigma > 1$ la función zeta y todas sus potencias se pueden escribir como una serie y también nuestra integral.

LEMA 15. Sean $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ y $g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}$ absolutamente convergentes para $\alpha > \sigma_1$ y $\beta > \sigma_2$ respectivamente, entonces se cumple

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(\alpha + it)g(\beta - it)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n b_n}{n^{\alpha+\beta}}.$$

DEMOSTRACIÓN:

$$f(\alpha + it)g(\beta - it) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n b_n}{n^{\alpha+\beta}} + \sum_{n \neq m} \sum \frac{a_n b_m}{n^{\alpha} m^{\beta}} \left(\frac{m}{n}\right)^{it},$$

siendo las series absoluta y uniformemente convergentes en cualquier rango finito de t . Por tanto podemos intercambiar la suma con la integral obteniendo

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(\alpha + it)g(\beta - it)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n b_n}{n^{\alpha+\beta}} + \sum_{n \neq m} \sum \frac{a_n b_m}{n^{\alpha} m^{\beta}} \frac{\text{sen}(T \log \frac{m}{n})}{T \log \frac{m}{n}}.$$

Ahora bien, el factor en el que interviene T esta acotado para todo T , m , n y por tanto la serie doble converge uniformemente en T . Como cada término de dicha serie tiende a cero cuando $T \rightarrow \infty$ la suma también tenderá a cero y se concluye el resultado.

COROLARIO. En $\sigma > 1$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |\zeta(\sigma + it)|^{2k} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_k^2(n)}{n^{2\sigma}},$$

donde $d_k(n)$ es el número de formas de escribir n como producto de k factores, contando expresiones que tienen los mismos factores en distinto orden como distintas.

En el anterior lema hacemos $f(s) = g(s) = \zeta^k(s)$, $\alpha = \beta = \sigma$ y el resultado se deduce entonces teniendo en cuenta que

$$\zeta^k(s) = \sum_{\nu_1=1}^{\infty} \frac{1}{\nu_1^s} \cdots \sum_{\nu_k=1}^{\infty} \frac{1}{\nu_k^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \sum_{\nu_1 \cdots \nu_k = n} 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_k(n)}{n^s}.$$

La teoría de los momentos de $\zeta(s)$ se construye intentando generalizar el anterior resultado a $\sigma \leq 1$. Este hecho se ha conseguido totalmente si $k \leq 2$, pero sólo parcialmente si $k > 2$. Vamos a ver el caso $k = 1$. Para ello estableceremos un lema previo.

LEMA 16. Se cumple la siguiente acotación

$$\sum_{0 < n < m \leq T} \frac{1}{n^{\sigma} m^{\sigma} \log \frac{m}{n}} = O(T^{2-2\sigma} \log T),$$

uniformemente en $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq \sigma_0 < 1$.

DEMOSTRACIÓN:

Dividimos la suma en dos trozos. El primero, S_1 , donde los términos cumplen $n < \frac{m}{2}$. En este caso $\log \frac{m}{n} \leq C$, y por tanto

$$S_1 = \sum_{0 < n \leq T} \sum_{2n \leq m \leq T} \frac{1}{n^\sigma m^\sigma \log \frac{m}{n}} \\ = O \left(\sum_{0 < n \leq T} n^{-\sigma} \right)^2 = O(T^{2-2\sigma}).$$

En el segundo, S_2 , escribimos $n = m - k$, con lo que $\log \frac{m}{n} = -\log \left(1 - \frac{k}{m}\right) > \frac{k}{m}$ y por tanto

$$S_2 = \sum_{0 < m \leq T} \sum_{T \geq n \geq \frac{m}{2}} \frac{1}{n^\sigma m^\sigma \log \frac{m}{n}} < \sum_{0 < m \leq T} \sum_{k \leq \frac{m}{2}} \frac{1}{(m-k)^\sigma m^{\sigma-1} k} \\ = O \left(\sum_{0 < m \leq T} m^{1-2\sigma} \sum_{k \leq \frac{m}{2}} \frac{1}{k} \right) = O(T^{2-2\sigma} \log T).$$

Juntando las acotaciones de S_1 y S_2 obtenemos el resultado.

TEOREMA 30. Sea $\frac{1}{2} < \sigma < 1$ fija, entonces

$$(2.33) \quad \int_1^T |\zeta(\sigma + it)|^2 dt = \zeta(2\sigma)T + O(T^{2-2\sigma} \log T).$$

DEMOSTRACIÓN:

Haciendo $x = t$ en (2.28) obtenemos

$$\zeta(s) = \sum_{n \leq t} n^{-\sigma - it} + O(t^{-\sigma}) = S + O(t^{-\sigma}).$$

Ahora bien,

$$\int_1^T |S|^2 dt = \int_1^T \sum_{n \leq t} n^{-\sigma - it} \sum_{m \leq t} m^{-\sigma + it} dt \\ = \sum_{n \leq T} \sum_{m \leq T} n^{-\sigma} m^{-\sigma} \int_{T_1}^T \left(\frac{m}{n}\right)^{it} dt \quad (T_1 = \max(m, n)) \\ = \sum_{n \leq T} n^{-2\sigma} (T - n) + \sum_{n \neq m} \sum_{m \leq T} \frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{iT} - \left(\frac{m}{n}\right)^{iT_1}}{n^\sigma m^\sigma i \log \left(\frac{m}{n}\right)} \\ = T \sum_{n \leq T} n^{-2\sigma} - \sum_{n \leq T} n^{1-2\sigma} + O \left(\sum_{0 < n < m \leq T} \frac{1}{n^\sigma m^\sigma \log \left(\frac{m}{n}\right)} \right).$$

Teniendo en cuenta que

$$\sum_{n < T} n^{-2\sigma} = \zeta(2\sigma) + O(T^{1-2\sigma}),$$

$$\sum_{n < T} n^{1-2\sigma} = O(T^{2-2\sigma}),$$

del anterior lema deducimos

$$\int_1^T |S|^2 dt = \zeta(2\sigma)T + O(T^{2-2\sigma} \log T).$$

Por último,

$$\begin{aligned} \int_1^T |\zeta(\sigma + it)|^2 dt &= \int_1^T |S|^2 dt + O\left(\int_1^T t^{-2\sigma} dt\right) + O\left(\int_1^T |S| t^{-\sigma} dt\right) \\ &= \int_1^T |S|^2 dt + O(T^{1-2\sigma}) + O\left(\int_1^T |S|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_1^T t^{-2\sigma} dt\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \zeta(2\sigma)T + O(T^{2-2\sigma} \log T). \end{aligned}$$

En la anterior prueba se pueden considerar los casos en la frontera rehaciendo la demostración para cada caso en particular, obteniéndose

$$\int_1^T |\zeta(1 + it)|^2 dt = \zeta(2)T + O(\log^2 T)$$

$$\int_1^T |\zeta(1/2 + it)|^2 dt \ll T \log T.$$

La cota que obtenemos en el segundo caso $\sigma = \frac{1}{2}$, es en realidad el verdadero orden de la integral. En este caso también existe una fórmula asintótica, y se puede demostrar que

$$\int_1^T |\zeta(1/2 + it)|^2 dt = T \log T + (2\gamma - 1 - \log 2\pi)T + E(T)$$

→ con $E(T) \ll T^{\frac{139}{429} + \epsilon}$.

Observación: Esta es la misma cota que se conoce para el problema del divisor y, al igual que en aquel, se conjetura el exponente $\frac{1}{4}$. Esta relación no

es casualidad, y se puede observar más claramente en la fórmula de sumación de Voronoi para el error en el problema del divisor, y en la fórmula de Atkinson para $E(T)$ (ver [Iv1]).

En el caso $k = 2$ podemos conseguir un teorema análogo tratándolo de la misma manera. Sin embargo este caso es algo más complicado, y necesitaremos el uso de la ecuación funcional (2.30).

TEOREMA 31. Sea $\frac{1}{2} < \sigma < 1$ fija, entonces

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_1^T |\zeta(\sigma + it)|^4 dt = \frac{\zeta^4(2\sigma)}{\zeta(4\sigma)}$$

DEMOSTRACIÓN:

Tomando $x = y = \sqrt{t/2\pi}$ y $\sigma > \frac{1}{2}$ en (2.30), tenemos

$$\zeta(s) = \sum_{n \leq \sqrt{t/2\pi}} \frac{1}{n^s} + \chi(s) \sum_{n \leq \sqrt{t/2\pi}} \frac{1}{n^{1-s}} + O(|t|^{-\frac{1}{4}} \log t) = S_1 + \chi(s)S_2 + o(1).$$

Ahora bien,

$$|S_1|^4 = \sum_{n_1, n_2, n_3, n_4} (n_1 n_2 n_3 n_4)^{-\sigma} \left(\frac{n_1 n_2}{n_3 n_4} \right)^{it},$$

donde cada variable recorre los enteros en el intervalo $(1, \sqrt{t/2\pi})$. De esta forma

$$I = \int_1^T |S_1|^4 dt = \sum_{n_1, n_2, n_3, n_4 \leq \sqrt{T/2\pi}} (n_1 n_2 n_3 n_4)^{-\sigma} \int_{T_1}^T \left(\frac{n_1 n_2}{n_3 n_4} \right)^{it} dt,$$

donde $T_1 = 2\pi \max(n_1^2, n_2^2, n_3^2, n_4^2)$. Si calculamos la última integral obtenemos

$$I = \sum_{n_1 n_2 = n_3 n_4} \frac{T - T_1}{(n_1 n_2 n_3 n_4)^\sigma} + O \left(\sum_{n_1 n_2 \neq n_3 n_4} \frac{1}{(n_1 n_2 n_3 n_4)^\sigma} \left| \log \left(\frac{n_1 n_2}{n_3 n_4} \right) \right| \right).$$

Teniendo en cuenta que $n_1 n_2 = n_3 n_4 = r$ ocurre $\{d(r)\}^2$ veces si $r \leq \sqrt{T/2\pi}$, y en cualquier caso menos de $\{d(r)\}^2$ veces, se deduce que

$$\begin{aligned} \sum_{n_1 n_2 = n_3 n_4} \frac{1}{(n_1 n_2 n_3 n_4)^\sigma} &= \sum_{r \leq \sqrt{T/2\pi}} \frac{\{d(r)\}^2}{r^{2\sigma}} + O \left(\sum_{\sqrt{T/2\pi} \leq r \leq T/2\pi} \frac{\{d(r)\}^2}{r^{2\sigma}} \right) \\ &\sim \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\{d(r)\}^2}{r^{2\sigma}} = \frac{\zeta^4(2\sigma)}{\zeta(4\sigma)}. \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned} \sum_{n_1 n_2 = n_3 n_4} \frac{T_1}{(n_1 n_2 n_3 n_4)^\sigma} &< \sum_{n_1, n_2 \leq \sqrt{\frac{T}{2\pi}}} \frac{T_1 \{d(n_1 n_2)\}^2}{(n_1 n_2)^{2\sigma}} \\ &< 2 \sum_{n_1 \leq n_2 \leq \sqrt{\frac{T}{2\pi}}} \frac{T_1 \{d(n_1 n_2)\}^2}{(n_1 n_2)^{2\sigma}} = O \left(T^\varepsilon \sum_{n_1 \leq n_2 \leq \sqrt{\frac{T}{2\pi}}} \frac{1}{(n_1)^{2\sigma} (n_2)^{2\sigma-2}} \right) \\ &= O \left(T^\varepsilon \sum_{n_1 \leq \sqrt{\frac{T}{2\pi}}} \frac{1}{(n_1)^{2\sigma}} \sum_{n_2 \leq \sqrt{\frac{T}{2\pi}}} \frac{1}{(n_2)^{2\sigma-2}} \right) = O(T^{2-2\sigma+\varepsilon}). \end{aligned}$$

Por tanto el término principal es asintóticamente $\sim T^{\frac{\zeta^4(\sigma)}{\zeta(2\sigma)}}$. El resto lo acotamos gracias al lema 16, con lo que obtenemos

$$\rightarrow O \left(\sum_{0 < q < r \leq \frac{T}{2\pi}} \frac{d(q)d(r)}{(qr)^\sigma |\log r/q|} \right) = O \left(T^\varepsilon \sum_{0 < q < r \leq \frac{T}{2\pi}} \frac{1}{(qr)^\sigma |\log r/q|} \right) = O(T^{2-2\sigma+\varepsilon}).$$

De esta forma $I \sim T^{\frac{\zeta^4(\sigma)}{\zeta(2\sigma)}}$.

Sea

$$J(t) = \int_1^t |S_2|^4 du$$

Procediendo de la misma forma que para I , y cambiando σ por $1-\sigma$ obtenemos como término principal de J

$$T^{1+\varepsilon} \sum_{r < AT} \frac{1}{r^{2-2\sigma}} = O(T^{2\sigma+\varepsilon}),$$

quedando el término del resto del mismo orden de magnitud, con lo que $J(T) = O(T^{2\sigma+\varepsilon})$. De esta forma teniendo en cuenta que $\chi(s) = O(t^{\frac{1}{2}-\sigma})$ obtenemos

$$\begin{aligned} \int_1^T |\chi(\sigma + iu)|^4 J'(u) du &\ll \int_1^T u^{2-4\sigma} J'(u) du \\ &= u^{2-4\sigma} J(u) \Big|_1^T + (4\sigma - 2) \int_1^T u^{1-4\sigma} J(u) du \\ &= O(T^{2-2\sigma+\varepsilon}). \end{aligned}$$

El resultado ahora se sigue como en el teorema anterior.

Llevando de nuevo el argumento hasta la frontera se obtiene

$$\int_1^T |\zeta(1/2 + it)|^4 dt = O(T \log^4 T),$$

que de nuevo se puede ver que es su verdadero orden de magnitud.

El anterior argumento se puede llevar al caso general, obteniendo resultados parciales, en el sentido que sólo serán válidos cuando nos restringimos a una determinada región de σ , *que depende del orden k del momento*.

TEOREMA 32. Si $\sigma > 1 - \frac{1}{k}$ fija, entonces

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_1^T |\zeta(\sigma + it)|^{2k} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_k^2(n)}{n^{2\sigma}}.$$

Procedemos de manera análoga al teorema anterior. En este caso

$$|S_1|^{2k} = \sum \frac{1}{(n_1 \cdots n_{2k})^\sigma} \left(\frac{n_1 \cdots n_k}{n_{k+1} \cdots n_{2k}} \right)^{it},$$

donde cada variable recorre los enteros en el intervalo $(1, \sqrt{t/2\pi})$. Reemplazando $d(n)$ por $d_k(n)$ obtenemos el término principal que aparece en el teorema, y el mayor término de error es

$$O \left(T^\varepsilon \sum_{0 < q < r \leq \left(\frac{T}{2\pi}\right)^{\frac{k}{2}}} \frac{1}{(qr)^\sigma |\log r/q|} \right) = O(T^{k-k\sigma}),$$

siendo el término correspondiente a $J(u)$ (definida de manera análoga), del mismo orden de magnitud. Este error es $o(T)$ si σ esta en la región indicada, lo que nos da el teorema como en los casos anteriores.

Hay que observar que los anteriores teoremas se basaban en el uso de una ecuación funcional aproximada para $\zeta(s)$. Este hecho rodea constantemente a la teoría de los momentos. Sin embargo, si nos limitamos a utilizar (2.30), se acumulará demasiado error cuando k sea grande, por lo que necesitamos

ecuaciones que nos expresen directamente $\zeta^k(s)$. Existen ecuaciones análogas a (2.30) para todas las potencias $\zeta^k(s)$, pero además de que el rango de sumación del polinomio de Dirichlet depende de $\Im s$, lo que las hace poco manejables a la hora de integrar, tienen el inconveniente de que el error que se comete es demasiado grande si $k \geq 3$, (ver [Iv1]).

Vamos a utilizar esa idea de trabajar directamente con las potencias de la función zeta, para dar un teorema que nos relacione los momentos de $\zeta(s)$ en dos rectas $\sigma = \alpha$, y $\sigma = \beta > \alpha$. En este caso estableceremos una especie de ecuación funcional para la k -potencia de la función zeta, en la que de alguna manera aparecerá también involucrado el momento del mismo orden. Para ello utilizaremos una idea más general, que consiste en escribir sumas como integrales de contorno, lo que nos proporciona una gran flexibilidad al cambiar el camino de integración gracias al teorema de los residuos. En nuestro caso escribiremos lo que en esencia será el momento de orden k en una recta $\sigma = \sigma_0 > 1$, como un polinomio de Dirichlet, y gracias al teorema de los residuos obtendremos la deseada ecuación funcional. El punto de partida será un lema tipo "fórmula de Perron", que estableceremos gracias a la trasformada de Mellin de la función Gamma. (A.13)

LEMA 17. Sea $f(s) = \sum_1^\infty a_n n^{-s}$ absolutamente convergente para $\sigma > 1$, entonces

$$\sum_1^\infty \frac{a_n}{n^s} e^{-\delta n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(\omega - s) f(\omega) \delta^{s-\omega} d\omega$$

donde $c > 1$, $\delta > 0$, $c > \sigma$.

DEMOSTRACIÓN:

La parte derecha queda

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(\omega-s) \sum_1^{\infty} \frac{a_n}{n^{\omega}} \delta^{s-\omega} d\omega &= \sum_1^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(\omega-s) (n\delta)^{s-\omega} d\omega \\ &= \sum_1^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-\sigma-i\infty}^{c-\sigma+i\infty} \Gamma(\omega') (n\delta)^{-\omega'} d\omega' \\ &= \sum_1^{\infty} \frac{a_n}{n^s} e^{-n\delta}. \end{aligned}$$

El intercambio entre la suma y la integral esta justificado por la convergencia de

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(c-\sigma+i(v-t))| \sum_1^{\infty} \frac{a_n}{n^c} \delta^{\sigma-c} dv.$$

Si en el lema tomamos $a_n = d_k(n)$, $f(s) = \zeta^k(s)$, $c = 2$ obtenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_k(n)}{n^s} e^{-n\delta} = \frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \Gamma(\omega-s) \zeta^k(\omega) \delta^{s-\omega} d\omega \quad (\sigma < 2).$$

Si movemos la linea de integración a α , $\sigma-1 < \alpha < \sigma$ tendremos que tener en cuenta el polo de Gamma en $\omega = s$ con residuo $\zeta^k(s)$, y el de $\zeta^k(\omega)$ en $\omega = 1$, cuyo residuo es una suma finita de términos de la forma

$$K_{m,n} \Gamma^m(1-s) \log^n(\delta) \delta^{s-1},$$

donde $K_{m,n}$ son ciertas constantes. Dicho residuo es, por la fórmula de Stirling, $O(e^{-A|t|} \delta^{\sigma-1+\epsilon})$. Escogiendo $\delta > |t|^{-A}$ nos queda $O(e^{-A|t|})$. Del anterior análisis se deduce

$$(2.34) \quad \zeta^k(s) = \sum_1^{\infty} \frac{d_k(n)}{n^s} e^{-n\delta} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \Gamma(\omega-s) \zeta^k(\omega) \delta^{s-\omega} d\omega + O(e^{-A|t|}).$$

Hay que observar que en la serie no tendremos en cuenta ningun término a partir de uno dado, ya que los coeficientes están multiplicados por la "función de corte" $e^{-n\delta}$. Antes de enunciar el teorema vamos a definir una función $\mu_k(\sigma)$ que hará

el papel de la función μ en el orden de la función zeta. Para cada entero positivo k , y cada σ , definimos $\mu_k(\sigma)$ como el ínfimo de los ξ tal que se cumple¹³

$$\frac{1}{T} \int_1^T |\zeta(\sigma + it)|^{2k} dt = O(T^\xi).$$

TEOREMA 33. Sea σ_k el ínfimo de los σ tal que

$$(2.35) \quad \frac{1}{T} \int_1^T |\zeta(\sigma + it)|^{2k} dt = O(1).$$

Entonces para $0 < \alpha < 1$ se tiene

$$\sigma_k \leq \max \left(1 - \frac{1 - \alpha}{1 + \mu_k(\alpha)}, \frac{1}{2}, \alpha \right).$$

DEMOSTRACIÓN:

Sean Z_1 y Z_2 respectivamente los dos términos principales de (2.34). Procediendo de manera análoga a los anteriores teoremas, obtenemos para el primer término, si $\frac{1}{2} < \sigma < 1$,

$$\begin{aligned} \int_{\frac{T}{2}}^T |Z_1|^2 dt &= O \left(T \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_k^2(n)}{n^{2\sigma}} e^{-2\delta n} \right) + O \left(\sum_{n \neq m} \frac{d_k(m) d_k(n) e^{-\delta(m+n)}}{m^\sigma n^\sigma |\log m/n|} \right) \\ &= O(T) + O \left(\sum_{n \neq m} \frac{e^{-\delta(m+n)}}{m^{\sigma-\varepsilon} n^{\sigma-\varepsilon} |\log m/n|} \right). \end{aligned}$$

Vamos a estimar la última suma como lo hicimos en el lema 16 para una similar. La dividimos en dos sumas S_1 y S_2 con el mismo rango de sumación que aquellas. De esta forma

$$\begin{aligned} S_1 &= O \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\sigma+\varepsilon} e^{-\delta n} \right)^2 = O(\delta^{2\sigma-2-\varepsilon}) \quad y \\ S_2 &= O \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{1-2\sigma-2\varepsilon} e^{-\delta n} \sum_{r \leq \frac{n}{2}} \frac{1}{r} \right) = O \left(\delta^{2\sigma-2-\varepsilon} \log \frac{1}{\delta} \right). \end{aligned}$$

¹³Tendremos oportunidad de ver que la función $\mu_k(\sigma)$ tiene las mismas propiedades generales que la función $\mu(\sigma)$.

Por tanto

$$\int_{\frac{T}{2}}^T |Z_1|^2 dt = O(T) + O(\delta^{2\sigma-2-\varepsilon}).$$

Además, si $\omega = \alpha + iv$ se tiene la siguiente cota para Z_2

$$\begin{aligned} |Z_2| &\leq \frac{\delta^{\sigma-\alpha}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\omega - s)| |\zeta^k(\omega)| dv \\ &\leq \frac{\delta^{\sigma-\alpha}}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\omega - s)| dv \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\omega - s)| |\zeta^{2k}(\omega)| dv \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

La primera integral es $O(1)$, mientras que para $|t| \leq T$ queda

$$\begin{aligned} \left(\int_{-\infty}^{-2T} + \int_{2T}^{\infty} \right) |\Gamma(\omega - s)| |\zeta^{2k}(\omega)| dv &= O \left\{ \left(\int_{-\infty}^{-2T} + \int_{2T}^{\infty} \right) e^{-A|v-t|} |v|^{Ak} dv \right\} \\ &= O(e^{-AT}). \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} \int_{\frac{T}{2}}^T |Z_2|^2 dt &= O \left(\delta^{2\sigma-2\alpha} \int_{-2T}^{2T} |\zeta(\omega)|^{2k} dv \int_{\frac{T}{2}}^T |\Gamma(\omega - s)| dt \right) + O(\delta^{2\sigma-2\alpha}) \\ &= O \left(\delta^{2\sigma-2\alpha} \int_{-2T}^{2T} |\zeta(\omega)|^{2k} dv \right) + O(\delta^{2\sigma-2\alpha}) \\ &= O(\delta^{2\sigma-2\alpha} T^{1+\mu_k(\alpha)+\varepsilon}). \end{aligned}$$

Reuniendo los resultados para Z_1 y Z_2 obtenemos

$$\int_{\frac{T}{2}}^T |\zeta(\sigma + it)|^2 dt = O(T) + O(\delta^{2\sigma-2-\varepsilon}) + O(\delta^{2\sigma-2\alpha} T^{1+\mu_k(\alpha)+\varepsilon})$$

Si escogemos $\delta = T^{-\frac{1}{2}\{1+\mu_k(\alpha)\}/(1-\alpha)}$ de forma que los dos últimos términos sean del mismo orden, éstos serán $o(T)$ si

$$\sigma > 1 - \frac{1-\alpha}{1+\mu_k(\alpha)}.$$

Por tanto para los σ dentro de esa región, reemplazando T por $\frac{T}{2}$, $\frac{T}{4}$..., y sumando, se obtiene (2.35) y con ello el resultado.

En realidad podemos demostrar algo más, ya que se puede calcular cuál es el término $O(T)$ en el anterior razonamiento con sólo observar que

$$\frac{T}{2} \sum \frac{d_k^2(n)}{n^{2\sigma}} e^{-\delta n} = \frac{T}{2} \sum \frac{d_k^2(n)}{n^{2\sigma}} + o(T).$$

Por tanto

$$\frac{1}{T} \int_1^T |\zeta(\sigma + it)|^{2k} dt \sim \sum \frac{d_k^2(n)}{n^{2\sigma}} \quad (\sigma > \sigma_k).$$

COROLARIO. Si definimos σ'_k como el ínfimo de los σ tal que

→ $\frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^T |\zeta(\sigma + it)|^2 dt = O(T^\epsilon),$

entonces $\sigma_k = \sigma'_k$

Claramente $\sigma'_k \leq \sigma_k$. Por otra parte si en el razonamiento del teorema consideramos $\sigma > \alpha > \sigma'_k$ entonces

$$\int_{\frac{T}{2}}^T |\zeta(\sigma + it)|^2 dt = O(T) + O(\delta^{2\sigma-2}) + O(\delta^{2\sigma-2\alpha} T^{1+\epsilon})$$

y escogiendo $\delta = T^{-\lambda}$ con $0 < \lambda < \frac{1}{2-2\sigma}$ la parte derecha queda $O(T)$, y por tanto $\sigma_k \leq \alpha$, de donde $\sigma_k \leq \sigma'_k$.

Otra forma de obtener este tipo de relaciones acerca de la función $\mu_k(\sigma)$ se puede conseguir gracias a un teorema general de convexidad para los momentos de funciones analíticas. En particular vamos a demostrar que como función de σ , es continua, no creciente y convexa. Además podremos decir que es no negativa pues $\mu_k(\sigma) = 0$ para $\sigma > 1$.

TEOREMA 34. Sea $f(s)$ regular en $\sigma \geq \alpha$, excepto quizás con un polo en $s = s_0$, real para s real y $O(e^{\epsilon|t|})$ cuando $t \rightarrow \infty$ en $\sigma \geq \alpha$ para todo ϵ . Sea $\alpha < \beta$, y supongamos que para todo $T > 0$

$$\int_0^T |f(\alpha + it)|^2 dt \leq C(T^a + 1)$$

$$\int_0^T |f(\beta + it)|^2 dt \leq C'(T^b + 1),$$

con $a \geq 0$, $b \geq 0$ y C, C' dependiendo de $f(s)$. Entonces, para $\alpha < \sigma < \beta$, $T \geq 2$, se cumple

$$\int_{\frac{T}{2}}^T |f(\sigma + it)|^2 dt \leq A (CT^a)^{\frac{\beta-\sigma}{\beta-\alpha}} (C'T^b)^{\frac{\sigma-\alpha}{\beta-\alpha}},$$

donde A depende de a, b, α, β y está acotada si éstas lo están.

DEMOSTRACIÓN:

La idea es ver que, en algún sentido calcular la media de orden dos en una recta $\sigma = \alpha = \text{constante}$, es como calcular un momento de la transformada de Mellin de la función, donde el orden del momento depende de α . Una vez hecha esta observación, se utiliza la desigualdad de Hölder para interpolar entre las rectas de las hipótesis y obtener información en una recta intermedia. Por problemas de convergencia se utiliza una función como peso, en este caso la función Gamma, que nos permite controlar el comportamiento de la función en el infinito. Por último se utiliza una función de corte para centrar la información en un cierto intervalo. En particular se puede suponer $\alpha \geq \frac{1}{2}$, pues en otro caso se considera la función $f(s + \frac{1}{2} - \alpha)$. Supongamos para empezar que $f(s)$ es regular en $\sigma \geq \alpha$. Sea

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma(s) f(s) e^{-i(\frac{\pi}{2}-\delta)s} x^{-s} ds = \phi(x)$$

con $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$. Entonces las funciones

$$g(\sigma + it) = \Gamma(\sigma + it) f(\sigma + it) e^{-i(\frac{\pi}{2}-\delta)(\sigma+it)}, \quad \phi(x)$$

son un par de Mellin. Sea

$$I(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\sigma + it)|^2 |f(\sigma + it)|^2 e^{(\pi-2\delta)t} dt.$$

Entonces, por la fórmula de Parseval y la desigualdad de Hölder obtenemos

$$\begin{aligned} I(\sigma) &= 2\pi \int_0^\infty |\phi|^2 x^{2\sigma-1} dx \\ &\leq 2\pi \left(\int_0^\infty |\phi|^2 x^{2\alpha-1} dx \right)^{\frac{\beta-\sigma}{\beta-\alpha}} \left(\int_0^\infty |\phi|^2 x^{2\beta-1} dx \right)^{\frac{\sigma-\alpha}{\beta-\alpha}} \\ &= 2\pi (I(\alpha))^{\frac{\beta-\sigma}{\beta-\alpha}} (I(\beta))^{\frac{\sigma-\alpha}{\beta-\alpha}}. \end{aligned}$$

Sea ahora

$$F(T) = \int_0^T |f(\alpha + it)|^2 dt \leq C(T^a + 1).$$

Por la fórmula de Stirling se tiene (con diferentes A)

$$\begin{aligned} I(\alpha) &< A \int_0^\infty (t^{2\alpha+1}) |f(\alpha + it)|^2 e^{-2\delta t} dt \\ &= A \int_0^\infty F(t) \{2\delta (t^{2\alpha-1}) - (2\alpha - 1)t^{2\alpha-2}\} e^{-2\delta t} dt \\ &< AC \int_0^\infty \delta (t^{2\alpha+a-1} + 1) e^{-2\delta t} dt \\ &= AC \int_0^\infty \left[\left(\frac{t}{\delta}\right)^{2\alpha+a-1} + 1 \right] e^{-2t} dt < AC\delta^{1-2\alpha-a}. \end{aligned}$$

De la misma forma mayoramos $I(\beta)$ y juntando ambas estimaciones obtenemos

$$\begin{aligned} I(\sigma) &< A (C\delta^{1-2\alpha-a})^{\frac{\beta-\sigma}{\beta-\alpha}} (C'\delta^{1-2\beta-b})^{\frac{\sigma-\alpha}{\beta-\alpha}} \\ &= A\delta^{1-2\sigma} (C\delta^{-a})^{\frac{\beta-\sigma}{\beta-\alpha}} (C'\delta^{-b})^{\frac{\sigma-\alpha}{\beta-\alpha}}. \end{aligned}$$

Por otra parte

$$I(\sigma) > A \int_{\frac{1}{2\delta}}^{\frac{1}{\delta}} |f(\sigma + it)|^2 t^{2\sigma-1} dt > A\delta^{1-2\sigma} \int_{\frac{1}{2\delta}}^{\frac{1}{\delta}} |f(\sigma + it)|^2 dt.$$

La elección de $\delta = \frac{1}{T}$ termina la demostración.

Si $f(s)$ tuviera un polo de orden k en $s = s_0$ consideraríamos la función $(s - s_0)^k f(s)$ lo que introduciría un factor T^{2k} en cada lado, sin variar la consecución del resultado.

COROLARIO 1. En las condiciones del teorema anterior se obtiene

$$\int_0^T |f(\sigma + it)|^2 dt = O\left(T^{a\frac{\beta-\sigma}{\beta-\alpha} + b\frac{\sigma-\alpha}{\beta-\alpha}}\right).$$

Sólo hay que reemplazar T por $\frac{T}{2}, \frac{T}{4}, \dots$ y sumar.

COROLARIO 2. $\mu_k(\sigma)$ es convexa.

Considerar $f(s) = \zeta^k(s)$.

Como ya hemos observado, los teoremas en media de la función zeta aparecen en otras partes de la teoría. Nuestro siguiente objetivo es relacionarlos con los ceros de $\zeta(s)$.

ESTIMACIONES DE DENSIDAD DE CEROS

Definimos la función

$$N(\sigma, T) = \#\{\rho = \beta + i\gamma / \zeta(\rho) = 0, \sigma \leq \beta \leq 1, 0 < \gamma \leq T\}.$$

Observar que, si queremos contar todos los ceros de $\zeta(s)$ a la derecha de σ , y con $|\Im s| \leq T$, no hay más que multiplicar por 2 la anterior función por la simetría de los ceros respecto del eje real.

Para cada T , $N(\sigma, T)$ es una función no creciente y que vale cero si $\sigma \geq 1$. Además por la simetría de los ceros, el interés de dicha función se restringe a $\frac{1}{2} \leq \sigma < 1$. Si $\sigma = \frac{1}{2}$ entonces $N(\sigma, T) = N(T) < AT \log T$. El estudio de esta función se centra en mejorar esta desigualdad para $\frac{1}{2} < \sigma < 1$. En particular se espera que la mayoría de los ceros estén "cerca" de la recta crítica¹⁴ $\sigma = \frac{1}{2}$. Nuestro primer resultado va en esa dirección. En él demostraremos que $N(\sigma, T) \ll_{\sigma} T$, es decir en el sentido de densidad casi todos los ceros están en una banda de ancho δ , donde $\delta > 0$ puede ser tan pequeño como se quiera, alrededor de la recta crítica.

Para establecerlo probaremos antes un lema que nos relacione de forma explícita $N(\sigma, T)$ con $\zeta(s)$.

LEMA 18. Sea $\frac{1}{2} \leq \sigma_0 \leq 1$. Se cumple

$$2\pi \int_{\sigma_0}^1 N(\sigma, T) d\sigma = \int_0^T \log |\zeta(\sigma_0 + it)| dt + O(\log T)$$

cuando $T \rightarrow \infty$.

DEMOSTRACIÓN:

Si en el lema 5 hacemos $\phi(s) = \zeta(s)$, $\alpha = \sigma_0$, y tomamos partes imaginarias, como

$$\nu(\sigma, T) = \begin{cases} N(\sigma, T) & \frac{1}{2} \leq \sigma < 1 \\ 0 & \sigma \geq 1 \end{cases}$$

¹⁴Si la hipótesis de Riemann es cierta $N(\sigma, T) = 0$ para todo $\sigma > \frac{1}{2}$.

obtenemos

$$2\pi \int_{\sigma_0}^1 N(\sigma, T) d\sigma = \int_0^T \log |\zeta(\sigma_0 + it)| dt + 2\pi \int_{\sigma_0}^2 \arg \zeta(\sigma + iT) d\sigma \\ - \int_0^T \log |\zeta(2 + it)| dt + K(\sigma_0)$$

donde $K(\sigma_0)$ es independiente de T . Además

$$\int_0^T \log |\zeta(2 + it)| dt = \Re \left(\sum \frac{\Lambda_1(n)}{n^2} \frac{n^{-iT} - 1}{-i \log n} \right) = O(1),$$

donde $\Lambda_1(n) = \frac{\Lambda(n)}{\log n}$ y $\Lambda(n)$ es la función de von Mangoldt definida en (1.8). Por otra parte, del lema 3 deducimos

$$\int_{\sigma_0}^2 \arg \zeta(\sigma + iT) d\sigma = O(\log T).$$

Juntando ambas estimaciones obtenemos el resultado cuando T no es la ordenada de un cero, y por continuidad en el caso general.

TEOREMA 35. Para $\frac{1}{2} < \sigma < 1$ fija se cumple

$$N(\sigma, T) = O(T).$$

DEMOSTRACIÓN:

Por la desigualdad de Jensen se obtiene

$$\int_0^T \log |\zeta(\sigma + it)| dt = \frac{T}{2} \left(\frac{1}{T} \int_0^T \log |\zeta(\sigma + it)|^2 dt \right) \\ \leq \frac{T}{2} \log \left(\frac{1}{T} \int_0^T |\zeta(\sigma + it)|^2 dt \right) = O(T).$$

Hemos utilizado (2.33) para la última igualdad. Así, del anterior lema se deduce

$$\int_{\sigma_0}^1 N(\sigma, T) d\sigma = O(T).$$

Sea $\sigma_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\sigma_0 - \frac{1}{2})$, entonces

$$N(\sigma_0, T) \leq \frac{1}{\sigma_0 - \sigma_1} \int_{\sigma_1}^{\sigma_0} N(\sigma, T) d\sigma \leq \frac{2}{\sigma_0 - \frac{1}{2}} \int_{\sigma_1}^1 N(\sigma, T) d\sigma = O(T).$$

Claramente este no va a ser el verdadero orden de magnitud de $N(\sigma, T)$, y así lo demuestran gran cantidad de teoremas en los que se consigue $N(\sigma, T) = O(T^\theta)$ para algún $\theta < 1$. Uno de los posibles caminos a seguir, yá clásico, para mejorar el exponente empieza con la misma idea que aparecía en el anterior teorema. Sin embargo, en este caso no relacionaremos $N(\sigma, T)$ con la función zeta en sí, sino con el producto de ella misma por una función que compense las "peculiaridades" de $\zeta(s)$, manteniendo sus propios ceros. Dicha función será en nuestro caso $M_X(s) = \sum_{n \leq X} \frac{\mu(n)}{n^s}$. La elección de esta función se basa en que, como ya vimos, cuando $\sigma \geq 1$, $M_X(s)$ son las sumas parciales de la función $\frac{1}{\zeta(s)}$,¹⁵. Por tanto, cuando X es grande, (en la práctica no se puede elegir X muy grande pues la serie no es absolutamente convergente en $\sigma < 1$), se espera que ese producto esté próximo 1. De esta forma la función $f_X(s) = 1 - \zeta(s)M_X(s)$ será cercana a cero, excepto en los ceros de la función $\zeta(s)$ donde valdrá 1. De alguna manera $f_X(s)$ va a ser un contador de los ceros de $\zeta(s)$ en el dominio que consideremos. Nuestro objetivo consistirá en comparar dicha función con $N(\sigma, T)$.

TEOREMA 36. Si para algún $X = X(\sigma, T)$ tal que $T^{1-l(\sigma)} \leq X < T^A$ se cumple

$$\int_{\frac{T}{2}}^T |f_X(s)|^2 dt = O\left(T^{l(\sigma)} \log^m T\right) \quad (T \rightarrow \infty)$$

uniformemente en $\sigma \geq \alpha \geq 1/2$, con $l(\sigma)$ positiva, no creciente y con derivada acotada, y donde $m \geq 0$ es una constante, entonces

$$N(\sigma, T) = O\left(T^{l(\sigma)} \log^{m+1} T\right)$$

uniformemente en $\sigma \geq \alpha + \frac{1}{\log T}$.

DEMOSTRACIÓN:

¹⁵Este hecho sería cierto para $\sigma > \frac{1}{2}$ si la hipótesis de Riemann fuese cierta.

Para $\sigma > 1$ se cumple

$$f_X(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \sum_{n \leq x} \frac{\mu(n)}{n^s} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(X)}{n^s},$$

donde $a_1(X) = 0$ y

$$a_n(X) = \sum_{d|n} \mu(d) = 0 \quad (n \leq X)$$

$$|a_n(X)| = \left| \sum_{\substack{d|n \\ d \leq X}} \mu(d) \right| < d(n)$$

para todo n y X .

Sea

$$h(s) = 1 - f_X(s)^2 = (\zeta(s)M_X(s))(2 - \zeta(s)M_X(s)) = \zeta(s)g(s),$$

donde $h(s) = h_X(s)$ y $g(s) = g_X(s)$ son regulares excepto en $s = 1$. Como en $\sigma \geq 2$,

$$|f_X(s)|^2 \leq \left(\sum_{n > X} \frac{d(n)}{n^2} \right)^2 \leq \frac{1}{2} X^{2\epsilon-2} < \frac{1}{2}$$

entonces $h(s)$ no se anula en esa región. Si aplicamos el lema 5 con $f(s) = h(s)$ y consideramos la función

$$\nu(\sigma, T_1, T_2) = \nu(\sigma, T_1) - \nu(\sigma, T_2),$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{\sigma_0}^2 \nu(\sigma, \frac{T}{2}, T) d\sigma &= \int_{\frac{T}{2}}^T \{ \log |h(\sigma_0 + it)| - \log |h(2 + it)| \} dt \\ &\quad + \int_{\sigma_0}^2 \{ \arg h(\sigma + iT) - \arg h(\sigma + iT/2) \} d\sigma \end{aligned}$$

Como

$$\log |h(\sigma_0 + it)| = \log |1 - f_X(\sigma_0 + it)^2| \leq \log (1 + |f_X(\sigma_0 + it)|^2) \leq |f_X(\sigma_0 + it)|^2$$

y

$$-\log |h(2+it)| \leq -\log (1 - |f_X(2+it)|^2) \leq |f_X(2+it)|^2 < \frac{1}{X},$$

si $\sigma_0 \geq \alpha$ tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\frac{T}{2}}^T \{\log |h(\sigma_0 + it)| - \log |h(2+it)|\} dt &\leq \int_{\frac{T}{2}}^T |f_X(\sigma_0 + it)|^2 dt + \frac{T}{2X} \\ &= O\left(T^{l(\sigma_0)} \log^m T\right). \end{aligned}$$

Por otra parte, aplicando el lema 3 a $h(s)$, $\alpha = 0$, $\beta \geq \frac{1}{2}$, $m \geq \frac{1}{2}$ y $M_{(\sigma,T)} = O(X^A T^A)$ obtenemos, en $\sigma \geq \frac{1}{2}$,

$$\arg h(s) = O(\log X + \log t).$$

Por tanto

$$\int_{\sigma_0}^2 \{\arg h(\sigma + iT) - \arg h(\sigma + iT/2)\} d\sigma = O(\log X + \log T) = O(\log T),$$

de donde se deduce

$$\int_{\sigma_0}^2 \nu(\sigma, \frac{T}{2}, T) d\sigma = O\left(T^{l(\sigma_0)} \log^m T\right)$$

Además si elegimos $\sigma_1 = \sigma_0 + \frac{1}{\log T}$ entonces

$$T^{l(\sigma_0)} = T^{l(\sigma_1) + O(\sigma_1 - \sigma_0)} = T^{l(\sigma_1)}$$

y

$$\int_{\sigma_0}^2 \nu(\sigma, \frac{T}{2}, T) d\sigma \geq \int_{\sigma_0}^1 N(\sigma, \frac{T}{2}, T) d\sigma \geq (\sigma_1 - \sigma_0) N(\sigma_1, \frac{T}{2}, T),$$

de donde

$$N(\sigma_1, \frac{T}{2}, T) = O\left(T^{l(\sigma_1)} \log^{m+1} T\right).$$

Reemplazando T por $\frac{T}{2}, \frac{T}{4}, \dots$ y sumando obtenemos el resultado.

La primera y más simple aplicación del teorema es la siguiente

TEOREMA 37. Para $\frac{1}{2} < \sigma < 1$ fija, se cumple

$$N(\sigma, T) = O\left(T^{4\sigma(1-\sigma)+\varepsilon}\right).$$

DEMOSTRACIÓN:

Si en (2.32) hacemos $x = T$ tenemos

$$\zeta(s) = \sum_{n \leq T} \frac{1}{n^s} + O(T^{-\sigma})$$

y por tanto

$$(2.36) \quad f_X(s) = \sum_n \frac{b_n}{n^s} + O(T^{-\sigma}|M_X(s)|) = \sum_n \frac{b_n}{n^s} + O(T^{-\sigma}X^{1-\sigma})$$

con $b_n = 0$ si $n \leq X$ ó $n > XT$, y $|b_n| \leq d(n)$ para cualquier n . Así,

$$\begin{aligned} \int_{\frac{T}{2}}^T \left| \sum_n \frac{b_n}{n^s} \right|^2 dt &= \frac{T}{2} \sum_{X < n \leq XT} \frac{|b_n|^2}{n^{2\sigma}} + \sum_{n \neq m} \sum \frac{b_n b_m}{n^\sigma m^\sigma} \int_{\frac{T}{2}}^T \left(\frac{m}{n}\right)^{it} dt \\ &= O\left(T \sum_{n > X} \frac{1}{n^{2\sigma-\varepsilon}}\right) + O\left(\sum_{0 < n < m \leq XT} \frac{1}{n^{\sigma-\varepsilon} m^{\sigma-\varepsilon} \log \frac{m}{n}}\right) \\ &= O(TX^{1-2\sigma+\varepsilon}) + O\{(XT)^{2-2\sigma+\varepsilon}\}. \end{aligned}$$

Hemos utilizado el lema 16 para la última igualdad. Los dos términos serán del mismo orden, aparte los ε , si $X = T^{2\sigma-1}$, quedando

$$\int_{\frac{T}{2}}^T \left| \sum_n \frac{b_n}{n^s} \right|^2 dt = O\left(T^{4\sigma(1-\sigma)+\varepsilon}\right).$$

El término de error en (2.36) resulta

$$O(T^{1-2\sigma}X^{2-2\sigma}) = O(1),$$

lo que nos da el resultado, en vista del anterior teorema.

A resultados del tipo del teorema 37 se les suele denominar estimaciones de densidad de ceros.

Nota: Sólo con la media de orden 4 en $\sigma = \frac{1}{2}$, y un teorema de convexidad para integrales, (que mejora nuestro teorema 34), se puede conseguir el mejor resultado que se conoce hasta el momento de $N(\sigma, T)$ en $\sigma \leq \frac{3}{4}$, mientras que la media de orden 12 le sirve a Heath-Brown para mejorar la cota en el rango $\frac{25}{28} \leq \sigma \leq 1$.

Ya podemos decir que casi todos los ceros están muy cerca de $\sigma = \frac{1}{2}$. Sin embargo, de los anteriores teoremas no es posible deducir nada de lo que en realidad ocurre en dicha recta. Excepto por algunos datos numéricos, el primer resultado acerca de los ceros en la recta crítica se debe a Hardy, quien demostró la existencia de infinitos ceros sobre $\sigma = \frac{1}{2}$.

TEOREMA 38. La función $\zeta(s)$ tiene infinitos ceros en la recta $\sigma = \frac{1}{2}$

Actualmente existen diferentes pruebas de este hecho. La que daremos a continuación se basa en la fórmula de inversión de Fourier aplicada a la función $\xi(\frac{1}{2} + it)$ que, como ya sabemos, sus ceros con t real son los de $\zeta(s)$ en la recta crítica.

Si en la primera integral de (2.3) hacemos el cambio $t \rightarrow t^2$ tenemos

$$\frac{2\xi(s)}{s(s-1)} = \int_0^\infty v^{s-1}(G(v) - 1)dv \quad (\Re s > 1)$$

donde $G(v) = \theta(v^2)$, y $\theta(v)$ es la función allí definida. Esto nos dice que en $\sigma > 1$ las funciones

$$\frac{2\xi(s)}{s(s-1)} \quad \text{y} \quad (G(v) - 1)$$

son un par de Mellin. Si queremos extender esta fórmula a $0 < \sigma < 1$, tendremos que quitar la singularidad de la función $(G(v) - 1)$ en el cero. Esto lo podemos hacer de manera formal si tenemos en cuenta la siguiente "fórmula" de Euler

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^n = (1 + x + x^2 + \dots) + (x^{-1} + x^{-2} + \dots) = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{x-1} = 0$$

cuyo análogo en el caso continuo sería

$$\int_0^\infty x^{s-2}dx = \int_0^1 x^{s-2}dx + \int_1^\infty x^{s-2}dx = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s-1} = 0.$$

Claramente esta fórmula, como en el caso discreto, carece de sentido ya que cada integral converge en los semiplanos disjuntos $\Re(s) > 1$, y $\Re(s) < 1$ respectivamente, pero nos dice que formalmente la trasformada de Mellin de la función $\frac{1}{x}$ es idénticamente 0. Por ello esperamos que la igualdad

$$\frac{2\xi(s)}{s(s-1)} = \int_0^\infty v^{s-1} \left(G(v) - 1 - \frac{1}{v} \right) dv$$

sea cierta en $0 < \sigma < 1$, ya que en este caso la integral es absolutamente convergente en dicha región. Para ver la certeza de dicha igualdad consideramos la función

$$\int_1^\infty v^{s-1} (G(v) - 1) dv + \int_0^1 v^{s-1} \left(G(v) - 1 - \frac{1}{v} \right) dv - \frac{1}{1-s},$$

que es analítica en $\Re(s) > 0$, y coincide con

$$\begin{aligned} & \int_1^\infty v^{s-1} (G(v) - 1) dv \quad \text{en } \Re(s) > 1, \text{ y con} \\ & \int_0^1 v^{s-1} \left(G(v) - 1 - \frac{1}{v} \right) dv \end{aligned}$$

en $0 < \Re(s) < 1$. Por lo que ambas funciones son continuación analítica una de otra, y

$$\frac{2\xi(s)}{s(s-1)} \quad \text{y} \quad (G(v) - 1)$$

son un par de Mellin en $\sigma > 0$. De aquí se deduce que la identidad

(2.37)

$$G(x) - 1 - \frac{1}{x} = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{2\xi(s)}{s(s-1)} x^{-s} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{2\xi(s)}{s(s-1)} x^{s-1} ds,$$

donde para la última igualdad hemos utilizado la ecuación funcional de la función $\xi(s)$, es cierta para $0 < a < 1$.

Dicha fórmula nos servirá para obtener información sobre el integrando, a partir de la que ya sabemos de la función $G(x)$. La función $G(x)$ está definida no sólo para valores reales de x , sino en todo el sector $\{-\frac{\pi}{4} < \Im \log x < \frac{\pi}{4}\}$, en donde es una función analítica. Sin embargo este hecho no es extensible a la frontera, donde la función tiene singularidades. Dichas singularidades son lo que se utiliza en la prueba. En particular;

LEMA 19. La función $G(x)$ y todas sus derivadas tienden a cero cuando $x \rightarrow i^{\frac{1}{2}} (= e^{i\frac{\pi}{4}})$.

DEMOSTRACIÓN:

$$\begin{aligned}
 G(x) &= \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 x^2} = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 i} e^{-\pi n^2 (x^2 - i)} = \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^n e^{-\pi n^2 (x^2 - i)} \\
 &= -G((x^2 - i)^{\frac{1}{2}}) + 2G(2(x^2 - i)^{\frac{1}{2}}) \\
 &= -\frac{1}{(x^2 - i)^{\frac{1}{2}}} G((x^2 - i)^{-\frac{1}{2}}) + \frac{1}{(x^2 - i)^{\frac{1}{2}}} G\left(\frac{1}{2}(x^2 - i)^{-\frac{1}{2}}\right) \\
 &= \frac{1}{(x^2 - i)^{\frac{1}{2}}} \left(\sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi \frac{n^2}{4} (x^2 - i)^{-1}} - \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 (x^2 - i)^{-1}} \right) \\
 &= \frac{1}{(x^2 - i)^{\frac{1}{2}}} \sum_{n=\text{impar}} e^{-\pi \frac{n^2}{4} (x^2 - i)^{-1}},
 \end{aligned}$$

de donde se deduce el resultado.

Ahora bien, la integral en (2.37) podemos considerarla para valores complejos de x . En el sector $\{-\frac{\pi}{4} < \Im \log x < \frac{\pi}{4}\}$ el integrando podemos acotarlo de la siguiente forma: por una parte, por la fórmula de Stirling

$$\frac{2\xi(s)}{s(s-1)} = O\left(|t|^A e^{-\frac{\pi}{4}|t|}\right),$$

lo mismo que la función $\xi(s)$, mientras que $x^{s-1} = x^{a-1} x^{it} = K \exp(\pm |t| \Im \log x)$. Así, la integral define una función analítica, y por continuación analítica, la igualdad (2.37) seguira siendo cierta en el sector mencionado. En dicha igualdad, podemos quitar el denominador si aplicamos a ambos lados el operador $x \frac{d^2}{dx^2} x$, con lo que obtenemos

$$H(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} 2\xi(s) x^{s-1} ds.$$

Claramente $H(x)$ cumple el lema 19. Llamando $\log x = u$, y tomando $a = \frac{1}{2}$

queda

$$H(e^u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi(1/2 + it) e^{-\frac{u}{2}} e^{itu} dt \quad \text{o bien}$$

$$e^{\frac{u}{2}} H(e^u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi(1/2 + it) \sum_0^{\infty} \frac{(itu)^n}{n!} dt$$

La anterior estimación del integrando nos permite integrar término a término para dar

$$e^{\frac{u}{2}} H(e^u) = \sum_0^{\infty} c_n (iu)^n$$

donde

$$c_n = \frac{1}{\pi n!} \int_{-\infty}^{\infty} \xi(1/2 + it) t^n dt.$$

$c_{2n+1} = 0$ para todo n por la simetría de la función $\xi(\frac{1}{2} + it)$. Ahora bien, si $\xi(\frac{1}{2} + it)$ sólo tuviera un número finito de ceros, a partir de un cierto T sería de signo constante, supongamos positivo. Entonces

$$\begin{aligned} \pi(2n)!c_{2n} &= 2 \int_0^{\infty} \xi(1/2 + it) t^{2n} dt \\ &\geq 2 \int_{T+1}^{T+2} \xi(1/2 + it) t^{2n} dt - 2 \int_0^T \xi(1/2 + it) t^{2n} dt \\ &\geq K(T+1)^{2n} - K'T^{2n} \end{aligned}$$

y c_{2n} sería positivo para $n \geq n_0$ con n_0 suficientemente grande. De esta forma las derivadas de $e^{\frac{u}{2}} H(e^u)$ tienden a cero cuando $u \rightarrow i\frac{\pi}{4}$ a lo largo del eje imaginario, mientras que por otra esto no puede ser pues es suma de cosas positivas. Esto termina la demostración del teorema de Hardy.

REGIONES LIBRES DE CEROS Y APLICACIONES

El intento por demostrar la hipótesis de Riemann, ha llevado a hacer un estudio profundo de los ceros de la función zeta. Hasta ahora hemos visto que no hay muchos ceros lejos de la recta crítica y que además hay infinitos ceros en $\sigma = \frac{1}{2}$. Aún nos queda otra dirección en la que trabajar para intentar

acercarnos a dicha conjetura. Se espera que no haya ceros en $\sigma > \frac{1}{2}$, sin embargo actualmente no se sabe ningún δ explícito tal que a la derecha de $\sigma = \delta$ no haya ceros de $\zeta(s)$. Sin embargo sí que existen algunos teoremas que nos proporcionan regiones libres de ceros que se aproximan asintóticamente a la recta $\sigma = 1$. Nosotros ya tenemos un ejemplo de este tipo de regiones al final del teorema 11. El hecho de que sean regiones asintóticas, es porque en general se utilizan argumentos de tamaño, con lo cual la información se va perdiendo según crece T .

Como tendremos oportunidad de ver más adelante, la existencia de regiones libres de ceros tiene una aplicación directa en la distribución de los números primos.

La primera región libre de ceros que veremos es la que le sirvió a de la Valle Poussin para construir su prueba del teorema del número primo.

TEOREMA 39. *Existe una constante C tal que la función $\zeta(s)$ no se anula en*

$$\sigma \geq 1 - \frac{C}{\log(|t| + 2)} \quad (t \geq 2)$$

DEMOSTRACIÓN:

De (1.8), y (1.33) se deduce para $\sigma > 1$

$$(2.38) \quad -3\Re \frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} - 4\Re \frac{\zeta'(\sigma + it)}{\zeta(\sigma + it)} - \Re \frac{\zeta'(\sigma + 2it)}{\zeta(\sigma + 2it)} \geq 0.$$

Además (2.13) y la fórmula de Stirling nos dan, en $1 < \sigma < 2$,

$$-\Re \frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} \leq \frac{1}{\sigma - 1} + a - \Re \sum_{\rho} \frac{1}{s - \rho} + \frac{1}{\rho},$$

donde la suma recorre los ceros en la banda crítica, y por tanto $\frac{1}{s - \rho} + \frac{1}{\rho} \geq 0$. De esta forma

$$(2.39) \quad -\Re \frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} \leq \frac{1}{\sigma - 1} + A_1$$

Igualmente obtenemos

$$(2.40) \quad -\Re \frac{\zeta'(\sigma + it)}{\zeta(\sigma + it)} \leq A_2 \log(|t| + 2) - \Re \sum_{\rho} \frac{1}{s - \rho} + \frac{1}{\rho}$$

$$(2.41) \quad -\Re \frac{\zeta'(\sigma + 2it)}{\zeta(\sigma + 2it)} \leq A_3 \log(|t| + 2).$$

Si en (2.40) nos quedamos sólo con un cero $\rho = \beta + i\gamma$, escogemos $s = \sigma + i\gamma$, y tenemos en cuenta que

$$\Re \frac{1}{s - \rho} + \frac{1}{\rho} \geq \frac{\sigma - \beta}{(\sigma - \beta)^2 + (\gamma - t)^2},$$

nos queda, sustituyendo (2.39), (2.40) y (2.41) en (2.38)

$$(2.42) \quad \frac{3}{\sigma - 1} + \log(|\gamma| + 2) \geq \frac{4}{\sigma - \beta}$$

en donde se observa que β no puede estar muy cerca de 1. La demostración la haremos en forma de lema.

LEMA 20. Sean $\beta > 0$, $a > b > 0$, $L > 0$ tal que

$$\frac{b}{\sigma - 1} + L \geq \frac{a}{\sigma - \beta}$$

entonces existe una constante $C = C_{a,b}$ tal que

$$\beta \leq 1 - \frac{C}{L}$$

DEMOSTRACIÓN:

Sea $\sigma = 1 + \frac{\varepsilon}{L}$, entonces

$$\beta \leq 1 - \frac{\left(\frac{a}{b+\varepsilon} - 1\right)\varepsilon}{L}.$$

Escogiendo ε de forma que $a/(b + \varepsilon) - 1 > 0$ se termina la demostración del lema.

Aplicando el lema a (2.42) tenemos

$$\beta \leq 1 - \frac{C}{\log(|\gamma| + 2)},$$

lo que termina la demostración del teorema.

Una manera alternativa de obtener regiones libres de ceros, en la que no es necesario el conocimiento de la analiticidad de $\zeta(s)$ en $\sigma \leq 0$, aunque siempre basandose en la desigualdad (1.33), se debe a Landau, el cual utiliza unos lemas generales de funciones analíticas para obtener sus resultados.

LEMA 21. Si $f(s)$ es regular, y

$$\left| \frac{f(s)}{f(s_0)} \right| < e^M \quad (M > 1)$$

en el círculo $|s - s_0| \leq r$, entonces

$$\left| \frac{f'(s)}{f(s)} - \sum_{\rho} \frac{1}{s - \rho} \right| < AM$$

para $|s - s_0| \leq \frac{r}{4}$, donde ρ recorre los ceros de $f(s)$ en $|\rho - s_0| \leq \frac{r}{2}$.

DEMOSTRACIÓN:

Sea $g(s) = \frac{f(s)}{f(s_0)} \prod_{\rho} (s - \rho)^{-1}$. Esta función es regular en $|s - s_0| \leq r$, y distinta de cero en $|s - s_0| \leq \frac{r}{2}$. Además, en $|s - s_0| = r$ se cumple $|s_0 - \rho| \leq \frac{r}{2} \leq |s - \rho|$, y por tanto

$$\left| \frac{g(s)}{g(s_0)} \right| = \left| \frac{f(s)}{f(s_0)} \prod_{\rho} \left(\frac{s_0 - \rho}{s - \rho} \right) \right| < e^M.$$

Por el principio del máximo, dicha desigualdad también se cumple en el interior del círculo. Así, la función $h(s) = \log \frac{g(s)}{g(s_0)}$ es regular en $|s - s_0| \leq \frac{r}{2}$, y cumple $h(s_0) = 0$, $\Re h(s) < M$ en $|s - s_0| = r/2$, así por el teorema de Borel-Caratheodory (A.7) se deduce que $|h(s)| < AM$ en $|s - s_0| \leq \frac{r}{4}$, luego

$$|h'(s)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-s_0|=\frac{r}{4}} \frac{h(z)}{(z-s_0)^2} dz \right| < AM$$

como queríamos ver.

LEMA 22. Si $f(s)$ esta en las condiciones del lema anterior, y no tiene ceros en la mitad derecha de $|s - s_0| \leq r$, entonces

$$-\Re \left(\frac{f'(s_0)}{f(s_0)} \right) < \frac{AM}{r};$$

y si tiene un cero entre s_0 y $s_0 - \frac{r}{2}$,

$$-\Re \left(\frac{f'(s_0)}{f(s_0)} \right) < \frac{AM}{r} - \frac{1}{s_0 - \rho_0}.$$

DEMOSTRACIÓN:

Por el lema anterior

$$-\Re \left(\frac{f'(s_0)}{f(s_0)} \right) < \frac{AM}{r} - \sum_{\rho} \Re \frac{1}{s_0 - \rho}.$$

Ambos resultados se deducen de observar que $\Re \frac{1}{s_0 - \rho} \geq 0$ para todo ρ .

TEOREMA 40. Sea

$$\zeta(s) = O \left(e^{\phi(t)} \right)$$

cuando $t \rightarrow \infty$ en la región $1 - \theta(t) \leq \sigma \leq 2$, $t > 0$, con $\phi(t)$ y $1/\theta(t)$ positivas no decrecientes para $t \geq 0$ y tales que $\theta(t) \leq 1$, $\phi(t) \rightarrow \infty$ con t y

$$(2.43) \quad \frac{\phi(t)}{\theta(t)} = o \left(e^{\phi(t)} \right).$$

Entonces, existe una constante K tal que la región

$$\sigma \geq 1 - A \frac{\theta(2t+1)}{\phi(2t+1)}$$

está libre de ceros.

DEMOSTRACIÓN:

Sea $\zeta(\rho) = 0$, $\rho = \beta + i\gamma$, $\gamma > 0$, y sea

$$1 + e^{-\phi(2\gamma+1)} \leq \sigma_0 \leq 2$$

$$s_1 = \sigma_0 + i\gamma, \quad s_2 = \sigma_0 + 2i\gamma, \quad r = \theta(2\gamma + 1).$$

Los círculos $|s - s_1| \leq r = C_1$ y $|s - s_2| \leq r = C_2$ están en la región $\sigma \geq 1 - \theta(t)$.

Además, como

$$\left| \frac{1}{\zeta(s_i)} \right| < \frac{A_1}{\sigma_0 - 1} < A_1 e^{\phi(2\gamma+1)},$$

en C_1 y C_2 se cumple

$$\left| \frac{\zeta(s)}{\zeta(s_i)} \right| < e^{A_2 \phi(2\gamma+1)}$$

$i = 1, 2$. Por tanto podemos aplicar el lema 22 obteniendo

$$-\Re \left(\frac{\zeta'(\sigma_0 + 2i\gamma)}{\zeta(\sigma_0 + 2i\gamma)} \right) < A_3 \frac{\phi(2\gamma + 1)}{\theta(2\gamma + 1)}.$$

Y si $\beta > \sigma_0 - \frac{t}{2}$, entonces

$$-\Re \left(\frac{\zeta'(\sigma_0 + i\gamma)}{\zeta(\sigma_0 + i\gamma)} \right) < A_3 \frac{\phi(2\gamma + 1)}{\theta(2\gamma + 1)} - \frac{1}{\sigma_0 - \beta}.$$

Por otra parte, cuando $\sigma_0 \rightarrow 1$

$$-\frac{\zeta'(\sigma_0)}{\zeta(\sigma_0)} \sim \frac{1}{\sigma_0 - 1}$$

luego podemos escoger un p tan cercano como queramos a 1 tal que

$$-\frac{\zeta'(\sigma_0)}{\zeta(\sigma_0)} < \frac{p}{\sigma_0 - 1}.$$

Teniendo en cuenta (2.38) con $\sigma = \sigma_0$, $t = 2\gamma + 1$ y las anteriores estimaciones, se obtiene

$$\frac{3p}{\sigma_0 - 1} + \frac{5A_3 \phi(2\gamma + 1)}{\theta(2\gamma + 1)} - \frac{4}{\sigma_0 - \beta} \geq 0.$$

Si pudiéramos aplicar el lema 20 con $a = 4$, $b = 3p$ $L = \frac{5A_3 \phi(2\gamma+1)}{\theta(2\gamma+1)}$ obtendríamos el resultado. Para ver que el lema se puede aplicar tenemos que comprobar que el ε que aparece en aquella demostración, que en este caso sería

$$\varepsilon = 5A_3 \frac{\phi(2\gamma + 1)}{\theta(2\gamma + 1)} e^{-\phi(2\gamma+1)}$$

es pequeño, lo cual nos lo garantiza la condición (2.43).

Si en el teorema tomamos $\theta = \frac{1}{2}$, $\phi = \log(t+2)$ obtenemos una nueva prueba del teorema 39.

A la vista de este teorema, podemos traducir directamente la información que tengamos acerca del orden de la función zeta para encontrar nuevas regiones libres de ceros. De esta forma del teorema 29 podemos deducir una región libre de ceros mayor.

TEOREMA 41. Si $t > A$ *AK*

$$(2.44) \quad \zeta(s) = O(\log^5 t) \quad \text{en } \sigma \geq 1 - \frac{(\log \log t)^2}{\log t}$$

y

$$(2.45) \quad \zeta(s) \neq 0 \quad \text{en } \sigma \geq 1 - \frac{A(\log \log t)}{\log t}$$

DEMOSTRACIÓN:

Primeramente observamos que la constante en (2.32) es independiente de l , y por Phragmén-Lindelöf la cota es uniforme en $\sigma \geq 1 - \frac{l}{2L-2}$. Por otra parte dado t suficientemente grande, sea

$$l = \left\lceil \frac{1}{\log 2} \log \left(\frac{\log t}{\log \log t} \right) \right\rceil$$

entonces

$$\frac{1}{4} \frac{\log t}{\log \log t} \leq L \leq \frac{1}{2} \frac{\log t}{\log \log t}.$$

Por tanto

$$\frac{l}{2L-2} \geq \frac{l}{2L} \geq \frac{\log \log t - \log \log \log t - \log 2}{\log 2} \frac{\log \log t}{\log t} \geq \frac{(\log \log t)^2}{\log t}.$$

Si tomamos t suficientemente grande y σ que cumpla (2.44) entonces $\sigma \geq 1 - \frac{l}{2L-2}$, y el teorema 29 nos da

$$\zeta(s) = O\left(t^{\frac{1}{2L-2}} \log t\right) = O\left(t^{\frac{1}{2L}} \log t\right) = O(\log^5 t).$$

Ahora (2.45) se obtiene aplicando el anterior teorema con

$$\theta(t) = \frac{(\log \log t)^2}{\log t}, \quad \phi(t) = 5 \log \log t.$$

Como ya hemos observado, de las regiones libres de ceros se pueden obtener resultados relativos a la distribución de los números primos. La primera aplicación directa de encontrar una región libre de ceros tiene que ver con el orden de $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$, que aparecía en el teorema de los números primos.

COROLARIO. En la región $2 \leq |t| \leq T$, $\sigma \geq 1 - A \log \log T / 2 \log T$ se cumple

$$\left| \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right| = O \left(\frac{\log^2 T}{\log \log T} \right)$$

DEMOSTRACIÓN:

Teniendo en cuenta (2.24)

$$\left| \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right| \leq \sum_{|\gamma-t| \leq 1} \frac{1}{|s-\rho|} + O(\log T).$$

Ahora bien, el teorema nos dice

$$\frac{1}{|s-\rho|} \leq \frac{1}{|\sigma-\beta|} \leq \frac{2 \log T}{A \log \log T},$$

luego

$$\left| \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right| \leq \frac{2 \log T}{A \log \log T} \sum_{|\gamma-t| \leq 1} 1 + O(\log T) = O \left(\frac{\log^2 T}{\log \log T} \right),$$

donde hemos tenido en cuenta (2.22).

Dicha cota nos permite, en el teorema del número primo cambiar el camino de integración hasta la curva $\sigma = 1 - A \log \log t / \log t$, con lo que disminuirémos x^σ y podremos mejorar el error que se comete al aproximar $\psi(x)$ por x . Para llevarlo a cabo, vamos a establecer antes dos lemas. El primero es una fórmula tipo Perron aproximada que nos de la integral hasta altura T . Esto nos será necesario si queremos cambiar la línea de integración $\sigma = c > 1$ a un camino que depende de T .

LEMA 23. Sea para $c > 0$

$$I(y, T) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \frac{y^s}{s} ds.$$

Entonces

$$I(y, T) = \begin{cases} O \left\{ y^c \min \left(1, \frac{1}{T|\log y|} \right) \right\} & 0 < y < 1 \\ \frac{1}{2} + O \left(\frac{c}{T} \right) & y = 1 \\ 1 + O \left\{ y^c \min \left(1, \frac{1}{T|\log y|} \right) \right\} & y > 1. \end{cases}$$

En particular

$$I(y, \infty) = \begin{cases} 0 & 0 < y < 1 \\ \frac{1}{2} & y = 1 \\ 1 & y > 1. \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN:

Supongamos $0 < y < 1$, entonces $y^\sigma \rightarrow 0$ cuando $\sigma \rightarrow \infty$, y podemos cambiar el camino de integración por las rectas horizontales $L_1 = (c+iT, \infty+iT)$, $L_2 = (\infty - iT, c - iT)$. Además

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c+iT}^{\infty+iT} \frac{y^s}{s} ds = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_c^\infty \frac{y^{x+iT}}{x+iT} dx \right| \leq \frac{1}{2\pi T} \int_c^\infty y^x dx = \frac{y^c}{2\pi T |\log y|}.$$

Similarmente se hace en L_2 , lo que prueba la primera desigualdad. Para la segunda se considera el círculo de radio $R = \sqrt{c^2 + T^2}$ y centro el origen, y se cambia la línea de integración por el arco de círculo que está a su derecha. De esta forma

$$\left| \frac{y^s}{s} \right| \leq \frac{y^c}{R} \quad y$$

$$|I(y, T)| < \frac{y^c}{2\pi R} \int_0^{2\pi} |ds| = y^c.$$

La demostración para el caso $y > 1$ es similar, pero usando la banda, o el arco de circunferencia que quedan a la izquierda en cada caso. El contorno ahora incluye el polo en $s = 0$ que tiene como residuo 1.

Sólo queda entonces el caso $y = 1$, que se calcula directamente.

$$\begin{aligned} I(1, T) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{1}{c + it} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{c}{c^2 + t^2} dt - \frac{i}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{t}{c^2 + t^2} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^T \frac{c}{c^2 + t^2} dt = \frac{1}{2} - \int_{T/c}^{\infty} \frac{1}{1 + u^2} du. \end{aligned}$$

Por tanto

$$|I(1, T) - \frac{1}{2}| \leq \int_{T/c}^{\infty} \frac{1}{u^2} du = \frac{c}{T},$$

lo que termina la demostración.

El segundo lema es un resultado general de series de Dirichlet que se basa en el anterior.

LEMA 24. Sea $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ absolutamente convergente en $\sigma > 1$, donde $a_n = O(h(n))$ con $h(x)$ no decreciente y

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^{\sigma}} = O\left\{\frac{1}{(\sigma-1)^{\alpha}}\right\}$$

cuando $\sigma \rightarrow 1$. Entonces si $c > 0$, $\sigma + c > 1$, se cumple

$$\begin{aligned} \sum'_{n \leq x} \frac{a_n}{n^s} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} f(s+\omega) \frac{x^{\omega}}{\omega} d\omega + O\left\{\frac{x^c}{T(\sigma+c-1)^{\alpha}}\right\} + \\ &+ O\left\{\frac{h(2x)x^{1-\sigma} \log x}{T}\right\} + O\left\{h(x)x^{-\sigma} \min\left(1, \frac{x}{T||x||}\right)\right\} \end{aligned}$$

donde

$$||x|| = \begin{cases} x & \text{si es un entero} \\ |x - N| & \text{en el resto} \end{cases}$$

siendo N el entero mas cercano a x , y $\sum'_{n \leq x} a_n = \sum_{n < x} a_n + \frac{1}{2}a_x$ cuando x es un entero.

DEMOSTRACIÓN:

Supongamos que x no es un entero. Multiplicando $I(x/n, T)$ por $a_n n^{-s}$ y sumando queda

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} f(s+\omega) \frac{x^{\omega}}{\omega} d\omega = \sum_{n < x} \frac{a_n}{n^s} + O\left\{\frac{x^c}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^{\sigma+c} |\log x/n|}\right\}.$$

No este
demostrado
lo del
en n m
Hay que
utilizar la
aproximación
con el primer
el
que
antes N

Si $n < \frac{x}{2}$ o $n > 2x$, $|\log x/n| > A$, y por tanto esos términos contribuyen como

$$O\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^{\sigma+c}}\right) = O\left(\frac{1}{(\sigma+c-1)^{\alpha}}\right).$$

Si $N < n \leq 2x$, sea $n = N + r$, entonces

$$\log \frac{n}{x} \geq \log \frac{N+r}{N+\frac{1}{2}} > \frac{Ar}{N} > \frac{A'r}{x},$$

con lo que esa parte de la suma es como

$$O\left\{h(2x)x^{1-\sigma-c} \sum_{1 \leq n \leq x} \frac{1}{r}\right\} = O\{h(2x)x^{1-\sigma-c} \log x\}.$$

De manera similar acotamos los términos $\frac{x}{2} \leq n < N$, obteniendo el mismo resultado. Por último, como $|\log x/N| \geq ||x||/N$, tenemos

$$\frac{|a_N|}{N^{\sigma+c} |\log x/N|} \leq \frac{Ah(N)x^{1-\sigma-c}}{||x||},$$

lo que nos da el resultado en el caso en que x no es entero,

Si x es entero todo es igual que en el caso anterior, excepto que ahora aparece un término

$$O\left(\frac{a_x}{x^{\sigma} T}\right).$$

Observar que en ese caso $\min\left(1, \frac{x}{T||x||}\right) = 1$.

Antes de seguir con la mejora enunciada en el teorema del número primo, veamos una aplicación directa del anterior lema.

TEOREMA 42. Se tiene

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$$

en toda la región $\sigma \geq 1$.

DEMOSTRACIÓN:

Ya lo hemos visto en $\sigma > 1$, y considerando en el lema $a_n = \mu(n)$, $\sigma = 1$, x la mitad de un número entero, obtenemos

$$(2.46) \quad \sum_{n < x} \frac{\mu(n)}{n^s} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \frac{1}{\zeta(s+\omega)} \frac{x^\omega}{\omega} d\omega + O\left(\frac{x^c}{T^c}\right) + O\left(\frac{\log x}{T}\right).$$

Por el teorema de los residuos,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \frac{1}{\zeta(s+\omega)} \frac{x^\omega}{\omega} d\omega &= \\ &= \frac{1}{\zeta(s)} + \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{c-iT}^{-\delta-iT} + \int_{-\delta-iT}^{-\delta+iT} + \int_{-\delta+iT}^{c+iT} \right) \frac{1}{\zeta(s+\omega)} \frac{x^\omega}{\omega} d\omega \\ &= I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

Con δ suficientemente pequeño para evitar que $\zeta(s+\omega)$ tenga ceros en $\Re \omega \geq -\delta$, $\Im(s+\omega) \leq |t| + T$, lo cual es posible tomando la peor región libre de ceros que sabemos, que se deduce de (1.36), con $\delta = \frac{A}{\log^9 T}$. Además, con esa elección se cumple

$$I_2 = O\left(x^{-\delta} \log^7 T \int_{-T}^T \frac{1}{\sqrt{\delta^2 + u^2}} du\right) = O\left(\frac{\log^8 T}{x^\delta}\right).$$

Mientras que

$$I_1 = \left(\frac{\log^7 T}{T} \int_{-\delta}^c x^u du\right) = O\left(\frac{\log^7 T}{T} x^c\right),$$

y lo mismo para I_3 . Sustituyendo las anteriores acotaciones en (2.46) queda

$$\sum_{n < x} \frac{\mu(n)}{n^s} - \frac{1}{\zeta(s)} = O\left(\frac{x^c}{T^c}\right) + O\left(\frac{\log x}{T}\right) + O\left(\frac{\log^8 T}{x^\delta}\right) + O\left(\frac{\log^7 T}{T} x^c\right).$$

Escogiendo $c = \frac{1}{\log x}$, $T = \exp(c(\log x)^{\frac{1}{10}})$ de modo que $x^c = e$, $x^\delta = T^A$, la parte derecha tiende a cero y se obtiene el resultado.

En particular

$$\sum_1^\infty \frac{\mu(n)}{n} = 0.$$

Se puede demostrar, por métodos elementales, que esta identidad es equivalente al teorema del número primo (ver [Sh]).

Volviendo a la distribución de los números primos, si consideramos ahora la función

$$\psi_0(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) = \begin{cases} \psi(x) & \text{si } x \notin Z \\ \psi(x) - \frac{1}{2}\Lambda(x) & \text{si } x \in Z, \end{cases}$$

gracias al lema 24 podemos escribir, con $c = 1 + \frac{1}{\log x}$ de forma que $x^c = ex$,

$$\begin{aligned} \psi_0(x) &= \int_{c-iT}^{c+iT} \frac{x^s}{s} \left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) ds + O \left\{ \frac{x \log x}{T} \right\} + \\ (2.47) \quad &+ O \left\{ \frac{x \log^2 x}{T} \right\} + O \left\{ \log x \min \left(1, \frac{x}{T||x||} \right) \right\} \end{aligned}$$

A partir de esta fórmula, como ya dijimos, podríamos cambiar la línea de integración a $\sigma = 1 - \log \log T / 2 \log T$ y utilizando el corolario a la región libre de ceros (2.45), mejorar el teorema del número primo. Sin embargo aprovecharemos que la integral se puede calcular de forma explícita para dar una fórmula de la función $\psi_0(x)$ en función de los ceros de $\zeta(s)$.

TEOREMA 43. Para $x > 1$

$$(2.48) \quad \psi_0(x) = x - \frac{1}{2} \log(1 - x^{-2}) - \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{|\gamma| < T} \frac{x^\rho}{\rho} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}.$$

DEMOSTRACIÓN:

Para ello consideramos el rectángulo con vértices $c - iT$, $c + iT$, $-N + iT$, $-N - iT$, donde N es un entero impar grande. La suma de los residuos de los polos del integrando en (2.47) dentro del rectángulo es

$$x + \sum_{0 < 2n < N} \frac{x^{-2n}}{-2n} - \sum_{|\gamma| < T} \frac{x^\rho}{\rho} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)},$$

siendo $\rho = \beta + i\gamma$, como habitualmente, los ceros de la función zeta en la banda crítica.

Para calcular las integrales a lo largo de las líneas horizontales, observamos que por (2.22) se puede escoger T de manera que $|T - \gamma| \gg \frac{1}{\log T}$ para cualquier

ρ . De esta forma, por (2.24) tenemos

$$\left| \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right| = \left| \sum_{|T-\gamma| \leq 1} \frac{1}{s-\rho} \right| + O(\log T) = O(\log^2 T).$$

Por tanto en dicha región la integral sobre las líneas horizontales resulta

$$\begin{aligned} \int_{-1+iT}^{c+iT} \frac{x^s}{s} \left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) ds &\ll \log^2 T \int_{-1}^c \left| \frac{x^s}{s} \right| d\sigma \ll \frac{\log^2 T}{T} \int_{-\infty}^c x^\sigma d\sigma \\ &\ll \frac{x \log^2 T}{T \log x}, \end{aligned}$$

y la misma estimación tenemos en el segmento $(-1-iT, c-iT)$. Si $\sigma \leq -1$

, excluyendo bolas de radio $\frac{1}{2}$ alrededor de los enteros negativos impares, se cumple

$$(2.49) \quad \left| \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right| \ll \log(2|s|),$$

como probaremos un poco más adelante. Entonces

$$\int_{-1+iT}^{-N+it} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) \frac{x^s}{s} ds \ll \frac{\log T}{T} \int_{-N}^{-1} x^\sigma d\sigma \ll \frac{\log T}{Tx \log x}$$

Por último la contribución de la última integral es por (2.49)

$$O\left(\frac{\log N}{N} \int_{-T}^T x^{-N} dt \right) \ll \frac{\log NT}{Nx^N},$$

que tiende a cero cuando $N \rightarrow \infty$. Sumando todas las estimaciones, y haciendo $N \rightarrow \infty$ nos queda

$$(2.50) \quad \psi_0(x) = x - \frac{1}{2} \log(1-x^{-2}) - \sum_{|\gamma| < T} \frac{x^\rho}{\rho} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} + R(x, T),$$

con

$$R(x, T) \ll \frac{x \log^2(Tx)}{T} + (\log x) \min\left(1, \frac{x}{T\|x\|}\right) = o(1)$$

cuando $T \rightarrow \infty$. Veamos la estimación (2.49). Consideramos $\Re(1-s) \leq -1$. De la ecuación funcional (2.5) se deduce, por diferenciación logarítmica

$$\left| \frac{\zeta'(1-s)}{\zeta(1-s)} \right| \ll \left| \frac{\pi}{2} \tan\left(\frac{\pi s}{2}\right) \right| + \left| \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} \right| + \left| \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right|,$$

donde las funciones a la derecha sólo se consideran en $\sigma \geq 2$. Entonces, si $|s - 2m + 1| \geq \frac{1}{2}$, el primer término está acotado. El segundo término es, por la fórmula de Stirling $\ll \log |s|$, y por tanto $\ll \log 2|1-s|$ en $\sigma \geq 2$. El último término está acotado, y por tanto obtenemos la estimación.

El argumento en la demostración del teorema estaba basado en una elección particular de T . Sin embargo, si en (2.50) cambiamos T por otro alejado de éste una constante, el factor $\sum_{|\gamma| < T} \frac{x^\rho}{\rho}$ varía en $O(\log T)$ sumandos, cada uno de ellos del orden $O(xT^{-1})$, con lo que en total cometemos un error de $O(x \log T/T)$, que está dentro del mismo error $R(x, T)$.

La fórmula (2.50) en realidad constituye una forma más precisa de enunciar (2.48).

Observación: Existen fórmulas explícitas de $\psi_k(x)$ donde

$$\psi_k(x) = \frac{1}{k!} \sum_{n \leq x} (x-n)^k \Lambda(n) = \frac{1}{(k-1)!} \int_0^x (x-u)^{(k-1)} \psi(u) du$$

para cualquier entero positivo k (ver [I1]). La demostración es similar, sólo que en este caso se utiliza la forma general de la fórmula de Perron (lema 2). En el caso en que $k \geq 1$ el resultado sale más directo, ya que el denominador asegura la convergencia absoluta de la integral. Un ejemplo de estas fórmulas para $k > 0$ es

$$(2.51) \quad \psi_1(x) = \frac{x^2}{2} - \sum_{\rho} \frac{x^{\rho+1}}{\rho(\rho+1)} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} x + \frac{\zeta'(-1)}{\zeta(-1)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{1-2n}}{2n(2n-1)}.$$

Si en (2.50) tomamos $T \ll x$ obtenemos

$$(2.52) \quad \psi(x) = x - \sum_{|\gamma| < T} \frac{x^\rho}{\rho} + O\left(\frac{x \log^2 x}{T}\right),$$

que junto con (2.45), y (2.18) nos da

$$\begin{aligned}\psi(x) - x &= O\left(x^{1-A_1 \frac{\log \log T}{\log T}} \sum_{|\gamma| < T} \frac{1}{|\rho|}\right) + O\left(\frac{x \log^2 x}{T}\right) \\ &= O\left(x^{1-A_1 \frac{\log \log T}{\log T}} \log^2 T\right) + O\left(\frac{x \log^2 x}{T}\right).\end{aligned}$$

Escogiendo T tal que $\log^2 T = \log \log x \log x$ de forma que

$$T^{-1} = \exp\left(-\log^{\frac{1}{2}} \log x \log^{\frac{1}{2}} x\right),$$

nos queda

$$\psi(x) - x = O\left\{x \exp\left(-A \log^{\frac{1}{2}} \log x \log^{\frac{1}{2}} x\right)\right\}$$

lo que mejora el teorema del número primo. El paso de la función $\psi(x)$ a la función $\pi(x)$ se obtiene a través de la función intermedia

$$\pi_1(x) = \sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{\log n} = \sum_{p^m \leq x} \frac{1}{m}.$$

*(cambio el orden
para el log
de $\pi_1(x)$)*

TEOREMA 44.

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t} + O\left\{x \exp\left(-B \log^{\frac{1}{2}} \log x \log^{\frac{1}{2}} x\right)\right\}.$$

DEMOSTRACIÓN:

Observamos que

$$\pi_1(x) = \pi(x) + \frac{1}{2}\pi(x^{\frac{1}{2}}) + \dots + \frac{1}{k}(\pi(x^{\frac{1}{k}})) + \dots$$

Como $\pi(x^{\frac{1}{k}}) = O(x^{\frac{1}{k}})$, la diferencia entre $\pi_1(x)$ y $\pi(x)$ es $O(x^{\frac{1}{2}})$, y es suficiente establecer la fórmula para $\pi_1(x)$. La relación entre $\pi_1(x)$ y $\psi(x)$ se obtiene por sumación por partes.

$$\pi_1(x) = \frac{\psi(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{\psi(t)}{t \log^2 t} dt$$

Integrando por partes resulta

$$\begin{aligned}
\int_2^x \frac{\psi(t)}{t \log^2 t} dt &= - \int_2^x \psi(t) d\left(\frac{1}{\log t}\right) \\
&= - \int_2^x t d\left(\frac{1}{\log t}\right) - \int_2^x (\psi(t) - t) d\left(\frac{1}{\log t}\right) \\
&= -\frac{x}{\log x} + \frac{2}{\log 2} + \int_2^x \frac{1}{\log t} dt + O \left\{ \int_2^x \frac{\exp\left(-A \log^{\frac{1}{2}} \log t \log^{\frac{1}{2}} t\right)}{\log^2 t} dt \right\},
\end{aligned}$$

de donde se obtiene la fórmula, más un error del orden

$$O \left\{ x \exp\left(-A \log^{\frac{1}{2}} \log x \log^{\frac{1}{2}} x\right) \right\} + O \left\{ \int_2^x \exp\left(-A \log^{\frac{1}{2}} \log t \log^{\frac{1}{2}} t\right) dt \right\}.$$

La contribución de la integral en el rango $t \leq x^{\frac{1}{4}}$ es trivialmente $O(x^{\frac{1}{4}})$, mientras que en el resto

$$\log^{\frac{1}{2}} \log t \log^{\frac{1}{2}} t > \frac{1}{2} \log^{\frac{1}{2}} \log x \log^{\frac{1}{2}} x,$$

terminando la prueba.

Conjeturas

4 La hipótesis de Riemann, (**HR**), es actualmente uno de los problemas más importantes de las matemáticas, y aunque se ha intentado en muchas ocasiones, todavía no se ha conseguido dar una respuesta ni a favor, ni en contra de su enunciado. Este hecho ha llevado a formular nuevas hipótesis, en general más débiles que **HR**, pero cuyas demostraciones traerían importantes consecuencias en teoría de números en general, y en particular en la teoría de los números primos. Vamos a dar una visión de las más importantes, analizando la relación que existe entre ellas. El orden en el que irán apareciendo dependerá de sus consecuencias; es decir, las últimas serán las más débiles.

LA HIPÓTESIS DE MERTENS

En 1897 Mertens publicó un artículo de 50 páginas con una tabla en la que se recogían los valores de la función de Möbius $\mu(n)$, y de

$$M(n) = \sum_{m \leq n} \mu(m)$$

para n entre 1 y 10.000. En base a la evidencia de los resultados, concluyó que la desigualdad

$$(3.1) \quad |M(x)| < x^{\frac{1}{2}} \quad (x > 1)$$

era bastante plausible.

En la actualidad a (3.1) se le conoce como "Hipótesis de Mertens" (**HM**), sin embargo no fue Mertens el primero en formular algo parecido, ya que en 1885, T.J.Stieltjes en una carta a Hermite afirmaba tener una prueba de que $M(x)x^{-\frac{1}{2}}$ permanecía entre dos cotas cualquiera que fuese el x , y que probablemente uno podría tomar 1 y -1 como dichas cotas. Por otra parte von Sterneck en base a los resultados de una tabla, esta vez hasta $n \leq 5 \cdot 10^6$ conjeturó

$$|M(x)| < \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} \quad (x > 200).$$

En 1984 A. Odlyzko y H.J.J. te Riele, establecen la falsedad de (3.1), y afirman que de su prueba se sigue alguna evidencia de que Stieltjes estaba equivocado, en particular dicen que es muy probable que se cumpla

$$\limsup |M(x)|x^{-\frac{1}{2}} = \infty$$

Esta conjetura sin embargo permanece sin probar hasta la fecha.

No veremos los detalles de la demostración, que por otra parte se basa en el uso del ordenador con un algoritmo de reducción de bases del retículo; pero sin embargo sí que dedicaremos alguna atención a cómo aparece el uso del ordenador en la prueba.

La certeza de **HM** implicaría que **HR** es cierta, y que todos los ceros de $\zeta(s)$ son simples. En estas condiciones se puede demostrar (ver [T1]) que existe una fórmula exacta para $M(x)$,

$$(3.2) \quad M_0(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{|\gamma| < T_k} \frac{x^\rho}{\rho \zeta'(\rho)} - 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \left(\frac{2\pi}{x}\right)^{2n}}{(2n)! n \zeta(2n+1)}$$

para ciertos T_k , donde $M_0(x) - M(x) = \frac{1}{2}\mu(x)$ si x es un entero, y 0 en los otros casos.

Ahora bien, en la fórmula (3.2) la serie de la derecha converge muy rápidamente. Por tanto, al ser la función discontinua en los enteros libres de cuadrados, se debe tener

$$\sum_{\rho} \frac{1}{|\rho \zeta'(\rho)|} = \infty.$$

Si llamamos $x = e^y$, $-\infty < y < \infty$, entonces cuando $y \rightarrow \infty$

$$m(y) = M(e^y)e^{-\frac{y}{2}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{|\gamma| < T_k} \frac{e^{i\gamma y}}{\rho \zeta'(\rho)} + O\left(\min(1, e^{-\frac{y}{2}})\right).$$

Por tanto el problema queda reducido a estudiar una serie que es similar a una serie harmónica general. Así es suficiente ver que para

$$h(y) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{|\gamma| < T_k} \frac{e^{i\gamma y}}{\rho \zeta'(\rho)}$$

se cumple $\limsup h(y) = \infty$. $h(y)$ tiene la dificultad de ser una serie infinita de la que no se conoce casi nada de sus coeficientes. Para solucionar este problema A.E.Ingham eliminó algunas frecuencias de la serie original convolviendo con una nueva función $K(y)$. En particular, si llamamos $k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(y)e^{-iyt}dy$, entonces, sin tener en cuenta cuestiones de convergencia, obtenemos

$$(3.3) \quad \begin{aligned} h_k(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(y-t)K(t)dt = \sum_{\rho} \frac{e^{i\gamma y}}{\rho\zeta'(\rho)} \int_{-\infty}^{\infty} K(t)e^{-i\gamma t}dt \\ &= \sum_{\rho} k(\gamma) \frac{e^{i\gamma y}}{\rho\zeta'(\rho)}. \end{aligned}$$

Si elegimos $K(y)$ de modo que $k(t)$ sea de soporte compacto, entonces la suma (3.3) es finita. De la anterior suma no recuperamos la función $h(y)$, sino $h_k(y)$, una media con peso de ésta. Sin embargo si $h_k(y)$ es grande también debe serlo $h(y)$ para algun valor de y .

$$|h_k(y_0)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |K(t)|dt \sup_y |h(y)|.$$

De hecho, si tomamos $K(y) \geq 0$ y tal que $k(\gamma) = k(-\gamma)$ sea real, entonces $h_k(y)$ es real y se obtiene

$$\begin{aligned} h_k(y_0) &\leq \int_{-\infty}^{\infty} K(t)dt \sup_y h(y) \\ h_k(y_0) &\geq \int_{-\infty}^{\infty} K(t)dt \inf_y h(y). \end{aligned}$$

En realidad se pueden obtener conclusiones más fuertes. La función $h_k(y)$ es casi periódica; es decir, dado un y_0 , y un $\varepsilon > 0$ existe una sucesión no acotada de valores de y tal que

$$|h_k(y) - h_k(y_0)| < \varepsilon.$$

En nuestro caso la suma (3.3) es finita, y el teorema se deduce fácilmente del teorema de Dirichlet sobre aproximación diofántica simultánea, ya que de él se deduce que para cualquier $\delta > 0$ existen y^* arbitrariamente grandes, tal que

$|\gamma y^* - 2\pi m_\gamma| < \delta$ para algunos m_γ enteros y todo γ con $k(\gamma) \neq 0$. De esta forma

$$\begin{aligned} h_k(y_0) &\leq \int_{-\infty}^{\infty} K(t) dt \limsup_{y \rightarrow \infty} h(y) \\ h_k(y_0) &\geq \int_{-\infty}^{\infty} K(t) dt \liminf_{y \rightarrow \infty} h(y) \end{aligned}$$

Así, si conseguimos algún valor de y_0 tal que $h_k(y_0)$ sea grande, tendremos la contradicción con la hipótesis.

En su trabajo Ingham utiliza el núcleo de Fejer

$$k(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{T} & |t| \leq T \\ 0 & |t| > T. \end{cases}$$

Con esta elección

$$h_k(y) = \sum_{|\gamma| < T} \left(1 - \frac{|\gamma|}{T}\right) \frac{e^{i\gamma y}}{\rho\zeta'(\rho)} = 2 \sum_{0 < \gamma < T} \left(1 - \frac{\gamma}{T}\right) \frac{\cos(\gamma y - \Psi_\gamma)}{|\rho\zeta'(\rho)|}$$

donde $\Psi_\gamma = \arg \rho\zeta'(\rho)$. Como $\sum |\rho\zeta'(\rho)|^{-1}$ diverge, si encontramos un y tal que los $|\gamma y - \Psi_\gamma|$, $|\gamma| < T$ estén próximos a un múltiplo entero de 2π podemos hacer $h_k(y)$ tan grande como queramos, y así contradecir **HM**. Ahora bien si los γ fueran linealmente independientes sobre los racionales, esto se deduciría del teorema de Kronecker (A.29). Es más, es fácil ver (ver [I2]) que si solo existiera un número finito de combinaciones lineales $\sum c_\gamma \gamma = 0$ con c_γ enteros y solo un número finito de ellos distintos de cero, entonces $h_k(y)$ no estaría acotada.

Como no parece haber ninguna explicación razonable para que los γ sean linealmente dependientes, ya desde el trabajo de Ingham en 1942, no sólo parecía improbable la certeza de **HM**, sino que además nos proporcionó una forma de refutarla.

Otra forma de intentar llegar a una contradicción, es a través de la serie que aparece a la derecha de (3.2). Por ejemplo el estudio de dicha serie cerca del 1 sirve para refutar la conjetura de Sterneck, ya que cuando x esta cerca de

1, dicha serie es continua, y como $M_0(x)$ es discontinua allí se deduce que $h(y)$ tiene un salto de 1 en $y = 0$, por lo que a algún lado del 1 es mayor que $1/2$ en valor absoluto. Con esto y la casi periodicidad de la función $h_k(y)$ obtenemos la contradicción.

En su artículo Odlyzko y te Riele, encontrando valores de y para los que $h_k(y)$ es grande en valor absoluto, consiguen demostrar

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} M(x)x^{-\frac{1}{2}} > 1.06$$

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} M(x)x^{-\frac{1}{2}} < -1.009$$

Dicha prueba no es efectiva; es decir, no encuentran ningún x para el que se cumpla la desigualdad inversa a (3.1). Un año más tarde J. Pintz demuestra que para $x = \exp(3, 21 \cdot 10^{64})$ se cumple que $|M(x)| > x^{\frac{1}{2}}$

Anteriormente hemos dado de manera heurística una forma de probar la falsedad de **HM**, sin embargo todo se basaba en la fórmula (3.2), la cual obviamente, necesitaria ser modificada si los ceros de la función zeta no fueran simples. No hemos tenido en cuenta dichas modificaciones diciendo que **HM** implicaba **HR** y que los ceros de $\zeta(s)$ eran simples. Veámoslo

TEOREMA 45. **HM** $\Rightarrow$ **HR** y que los ceros de $\zeta(s)$ son simples.

DEMOSTRACIÓN:

Para $\Re(s) > 1$ el lema 1 nos da junto con (1.6)

$$\frac{1}{\zeta(s)} = s \int_1^\infty \frac{M(t)}{t^{1+s}} dt \quad (3.5)$$

Ahora bien, bajo **HM** la integral es absolutamente convergente en $\Re(s) > \frac{1}{2}$, y por tanto representa una función analítica en dicha región. Esto contradice que $\zeta(s)$ pudiera tener algún cero con parte real mayor que $\frac{1}{2}$, y por simetría en el otro semiplano; es decir, **HR** sería cierta. Además de (3.4) se obtiene

$$\left| \frac{1}{\zeta(s)} \right| \leq |s| \int_1^\infty \frac{|M(t)|}{t^{1+\sigma}} dt < |s| \int_1^\infty \frac{1}{t^{\frac{1}{2}+\sigma}} dt = \left(\frac{|s|}{\sigma - \frac{1}{2}} \right).$$

Sea ρ un cero de $\zeta(s)$, y $s = \rho + h$ con $h > 0$, de manera que $\sigma = \frac{1}{2} + h$ entonces

$$\frac{1}{|\zeta(\rho + h)|} < \frac{|\rho + h|}{h}.$$

Esto sería falso si ρ fuese un cero múltiple de $\zeta(s)$, y terminamos la demostración. En realidad se puede demostrar algo un poco más fuerte en el sentido de que aún teniendo una cota superior de $M(x)$ un poco mayor, seguiría implicando la hipótesis de Riemann. En particular si permitimos en el enunciado de la hipótesis de Mertens sumar un ε en el exponente, es decir

$$|M(x)| < x^{\frac{1}{2} + \varepsilon}, \quad (x > 1)$$

para todo $\varepsilon > 0$, a lo que llamaremos desde ahora **HM**, entonces obtenemos un resultado equivalente a la hipótesis de Riemann. La parte "suficiente" de este hecho es simplemente observar que la primera parte del anterior teorema no varía si sumamos ε al exponente. Dejaremos la parte "necesaria" sin demostrar hasta un poco más adelante.

En el otro sentido, el siguiente resultado nos revela que la hipótesis de Mertens es además lo mejor que se puede pedir

TEOREMA 46.

$$M(x) = \Omega\left(x^{\frac{1}{2}}\right)$$

*Si la hipótesis de Riemann es falsa, entonces el anterior teorema con la nueva formulación de **HM** claramente implicaría el resultado.*

Supongamos entonces que **HR** es cierta, y que $|M(x)| < \delta x^{\frac{1}{2}}$ si $x \geq x_0$ y $|M(x)| < M$ si $x < x_0$. Entonces de (3.4) para $\sigma > \frac{1}{2}$ tenemos

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\zeta(s)} \right| &\leq |s| \int_1^{x_0} \frac{M}{t^{\frac{3}{2}}} dt + \delta |s| \int_{x_0}^{\infty} \frac{1}{t^{\frac{1}{2} + \sigma}} dt \\ &< |s| M \int_1^{\infty} \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} dt + \delta |s| \int_1^{\infty} \frac{1}{t^{\frac{1}{2} + \sigma}} dt = 2|s|M + \frac{|s|\delta}{\sigma - 1/2}. \end{aligned}$$

Si escogemos $\rho = \frac{1}{2} + i\gamma$ un cero simple de $\zeta(s)$ ¹⁶, entonces cuando $\sigma \rightarrow \frac{1}{2}$ con $s = \sigma + i\gamma$ tenemos

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \frac{1}{\zeta(s) - \zeta(\rho)} \sim \frac{1}{(\sigma - 1/2)\zeta'(\rho)},$$

con lo que obtenemos una contradicción si

$$\delta < \frac{1}{|\rho\zeta'(\rho)|}.$$

LA HIPÓTESIS DE RIEMANN.

→ (.) Todos los ceros de $\zeta(s)$ están en la recta $\sigma = \frac{1}{2}$.

La segunda de las hipótesis que vamos a considerar es la más importante de todas ellas en el sentido de que a partir de los numerosos intentos que se han hecho por solucionarla, hasta ahora en vano, han ido apareciendo el resto de las hipótesis.

Tales esfuerzos por solucionar el problema no han sido sin embargo para nada infructuosos, y gracias al estudio de **HR** se ha producido un gran avance en la teoría de los números y en las matemáticas en general. Además también han servido para producir diferentes acercamientos a su solución. De esta forma, como ya dijimos, J. van de Lune y H.J.J te Riele han verificado la hipótesis para los primeros $1,5 \cdot 10^9$ ceros de la función zeta. Por otra parte hemos tenido oportunidad de ver que existen infinitos ceros de $\zeta(s)$ en la recta crítica, resultado que obtuvo Hardy en 1914. Más tarde, en 1921 Hardy y Littlewood demostraron que, si llamamos $N_0(T)$ al número de ceros que hay en el segmento $\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + it$ entonces

$$N_0(T) > KT$$

para alguna constante positiva K , y T suficientemente grande. Este resultado lo mejoró Selberg en 1942, demostrando la existencia de una constante positiva

¹⁶Se sabe que los primeros $1,5 \cdot 10^9$ ceros están en la recta crítica y son simples, siendo la primera ordenada aproximadamente 14.13

C tal que

$$N_0(T) > CN(T)$$

Es decir, una fracción positiva de los ceros de $\zeta(s)$ están en la recta crítica. Levinson en 1974 prueba que esta fracción es mayor que $\frac{1}{3}$, resultado que el mismo mejora a $C = 0.3474$. Afinando sobre el mismo método Lou-Shi-Tou en 1981 lo demuestra para $C = \frac{7}{20}$.

Ahora daremos un argumento probabilístico, que puede parecer un poco frívolo, que avala la hipótesis de Riemann. Dicho argumento aparece en términos de la función $M(x)$, y se puede pasar a **HR** con ayuda del teorema 45.

Supongamos que tiramos $N \gg 0$ veces una moneda, (y suponemos que la probabilidad de que salga cara es $\frac{1}{2}$). Por el teorema del límite de Moivre-Laplace, la probabilidad de que el número de caras se desvíe del valor esperado en menos de $KN^{\frac{1}{2}}$ es aproximadamente

$$(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-K}^K \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx,$$

en el sentido de que el límite de esas probabilidades cuando $N \rightarrow \infty$ es igual a la integral. Así, restando el número de caras y el número de cruces, la probabilidad de que el resultado sea en valor absoluto menor que $2KN^{\frac{1}{2}}$ es

$$(2/\pi)^{\frac{1}{2}} \int_0^K e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Haciendo $K = N^\epsilon$ se deduce que la probabilidad de que sea menor que $N^{\frac{1}{2}+\epsilon}$ tiende a 1 cuando $N \rightarrow \infty$. Es decir, el número de caras menos el número de cruces crece menos rápido que $N^{\frac{1}{2}+\epsilon}$ con probabilidad 1. Consideremos ahora un n suficientemente grande y libre de cuadrados, de forma que $\mu(n) \neq 0$; entonces se puede decir que $\mu(n)$ será 1 o -1 con igual probabilidad ya que n tendrá un número grande de factores, (la densidad de los números primos es $\frac{1}{\log x}$), y no hay razón para decir que predomine un número par o impar de ellos. Además es admisible decir que diferentes evaluaciones de $\mu(n)$ son independientes; es decir,

el valor de un n no determina otros,¹⁷. Por tanto podemos tomar $M(x)$ como el resultado de tirar una moneda tantas veces como números libres de cuadrados haya menores que x ,¹⁸ y restar el número de caras menos el número de cruces. El anterior razonamiento ahora nos dice que $M(x)$ será menor que el número de tiradas elevado a $1/2 + \varepsilon$, y por tanto

$$|M(x)| < x^{\frac{1}{2} + \varepsilon}.$$

Luego por el teorema 45 la hipótesis de Riemann es cierta con probabilidad 1.

La hipótesis de Riemann ha sido atacada desde muy diversos lugares, y así lo demuestra la cantidad de resultados que se han conseguido, que son equivalentes a **HR**. En la actualidad existen gran cantidad de formas de intentar acercarse al problema. Veamos algunas de ellas.

El primer resultado que veremos no es una equivalencia, sino una consecuencia de la hipótesis de Riemann, y está centrado dentro de la teoría de $\zeta(s)$.

TEOREMA 47. Si **HR** es cierta entonces

$$\log \zeta(s) = O \{ (\log T)^{2-2\sigma+\varepsilon} \}$$

uniformemente en $\frac{1}{2} < \sigma_0 \leq \sigma \leq 1$ y para todo $\varepsilon > 0$.

DEMOSTRACIÓN:

La demostración se basa en observar que una vez que sabemos que la función no tiene ceros en una región, entonces su logaritmo es analítico allí, y se le puede aplicar un teorema de convexidad. Si **HR** es cierta, la función

¹⁷Como excepción esta el hecho de que dado p $\mu(pn)$ es 0 o $-\mu(n)$, pero como esto solo se aplica una vez para cada primo, ya que $\mu(p^2n) = 0$ en realidad dice poco de que $\mu(n)$ este determinado y no sea una variable aleatoria.

¹⁸Según crece x crece el número de enteros libres de cuadrados y por tanto crece el número de tiradas.

$\log \zeta(s)$ es analítica en $\sigma > \frac{1}{2}$ y por tanto podemos aplicar el teorema de Borel-Caratheodory a la función en los círculos de centro $2 + it$ y radios $\frac{3}{2} - \frac{\delta}{2}$ y $\frac{3}{2} - \delta$ ($0 < \delta < \frac{1}{2}$). En el círculo mayor se tiene

$$\log |\zeta(s)| \leq A \log t.$$

Por tanto

$$(3.5) \quad |\log \zeta(s)| \leq \frac{3-2\delta}{\delta/2} A \log t + \frac{3-\frac{3}{2}\delta}{\delta/2 |\log \zeta(\sigma + it)|} < A\delta^{-1} \log t.$$

Si ahora aplicamos el teorema de los tres círculos de Hadamard (A.6) a C_1 , C_2 , C_3 cuyo común centro es $\sigma_0 + it$ ($1 < \sigma_0 \leq t$) y que pasan por $\frac{1}{2} - \delta + it$, $1 + \eta + it$, $\sigma + it$, de forma que sus radios son $r_1 = \sigma_0 - 1 - \eta$, $r_2 = \sigma_0 - \sigma$, $r_3 = \sigma_0 - \frac{1}{2} - \delta$ y llamando M_1 , M_2 , M_3 al máximo de $|\log \zeta(s)|$ en los respectivos círculos, obtenemos

$$M_2 \leq M_1^{1-a} M_3^a,$$

donde

$$\begin{aligned} a &= \frac{\log r_2/r_1}{\log r_3/r_1} = \log \left(1 + \frac{1+\eta-\sigma}{\sigma_0-1-\eta} \right) / \log \left(1 + \frac{1/2+\eta-\delta}{\sigma_0-1-\eta} \right) \\ &= \frac{1+\eta-\sigma}{1/2+\eta-\delta} + O\left(\frac{1}{\sigma_0}\right) \\ &= 2 - 2\sigma + O(\delta) + O(\eta) + O\left(\frac{1}{\sigma_0}\right). \end{aligned}$$

Por (3.5), $M_3 < A\delta^{-1} \log t$, y como para $\sigma > 1$

$$\log \zeta(s) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda_1(n)}{n^s} \quad (\Lambda_1(n) \leq 1),$$

se tiene

$$M_1 = \max_{\sigma \geq 1+\eta} |\log \zeta(s)| \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\eta}} \leq \frac{A}{\eta}.$$

Por tanto

$$M_2 \leq \left(\frac{A}{\eta}\right)^{1-a} (A\delta^{-1} \log t)^a < \frac{A}{\eta^{1-a} \delta^a} (\log t)^{2-2\sigma+O(\delta)+O(\eta)+O(\frac{1}{\sigma_0})}.$$

Tomando $\frac{1}{\sigma_1} = \frac{1}{\eta} = \frac{1}{\delta} = \log \log t$ se cumple

$$\log t^{O(\eta)} = O(1)$$

y por tanto

$$\log \zeta(s) = O \left\{ \log \log t (\log t)^{2-2\sigma} \right\} \quad \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\log \log t} \leq \sigma \leq 1 \right).$$

El exponente que hemos obtenido para $\log \zeta(s)$ es menor que 1 con tal de elegir ε suficientemente pequeño. Por tanto se tiene, con un distinto ε

$$-\varepsilon \log t < \log |\zeta(s)| < \varepsilon \log t \quad (t > t_0(\varepsilon)),$$

de donde se deduce

$$(3.6) \quad \zeta(s) = O(t^\varepsilon)$$

$$(3.7) \quad \frac{1}{\zeta(s)} = O(t^\varepsilon)$$

para cualquier $\sigma > \frac{1}{2}$.

Vamos a utilizar el anterior teorema para establecer la primera de nuestras equivalencias, que será la que ya anunciamos con **HM**. Para establecerla, solo nos falta la condición necesaria, es decir

TEOREMA 48. Si **HR** es cierta

$$M(x) = O \left(x^{\frac{1}{2} + \varepsilon} \right) \quad \text{para todo } \varepsilon > 0.$$

Por el lema 24 se obtiene, para $s = 0$ y x la mitad de un entero, $c = 2$,

$$T \gg x$$

$$M(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{2-iT}^{2+iT} f(\omega) d\omega + O \left(\frac{x^2}{T} \right),$$

donde $f(s) = \frac{1}{\zeta(s)} \frac{x^s}{s}$. Asumiendo **HR**, $f(s)$ es analítica en $\sigma > \frac{1}{2}$ y por el teorema de los residuos obtenemos

$$I(2, T) = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{2-iT}^{\frac{1}{2} + \delta - iT} + \int_{\frac{1}{2} + \delta - iT}^{\frac{1}{2} + \delta + iT} + \int_{\frac{1}{2} + \delta + iT}^{2+iT} \right) f(\omega) d\omega + O \left(\frac{x^2}{T} \right) = I_1 + I_2 + I_3.$$

I_1 (y lo mismo ocurre para I_3) queda por (3.7)

$$I_1 = O(T^{\varepsilon-1}x^2),$$

mientras que de nuevo utilizando (3.7) obtenemos

$$I_2 = O\left(x^{\frac{1}{2}+\delta} \int_{-T}^T (1+|u|)^{\varepsilon-1} du\right) = O\left(x^{\frac{1}{2}+\delta} T^{\varepsilon}\right)$$

Tomando $T = x^2$ se obtiene el resultado cuando x es la mitad de un entero, lo que no supone ninguna pérdida de generalidad.

La anterior equivalencia nos proporciona otra manera de relacionar la hipótesis de Riemann con la aritmética. Dicha relación nos permitirá establecer una equivalencia en principio sorprendente con cierta propiedad de las fracciones de Farey.

Dichas fracciones se definen en base a un cierto $x > 0$, que por comodidad lo tomaremos distinto de un entero, como las fracciones irreducibles $\frac{p}{q}$ con $q \leq x$ y tal que $0 < \frac{p}{q} < 1$. Por ejemplo, si $x = 5.5$ la sucesión sería $\frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}$. Si llamamos $F = F(x)$ al número de fracciones de Farey en base a x , entonces tiene sentido considerar

$$\delta_\nu = r_\nu - \frac{\nu}{F}$$

donde r_ν es la ν -ésima fracción de Farey, ya que estas no están igualmente distribuidas en el intervalo $(0,1)$. Los δ_ν medirán la equidistribución de las fracciones de Farey.

TEOREMA 49. **HR** es equivalente a

$$\sum_{\nu=1}^F |\delta_\nu| = O\left(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right) \quad \text{para todo } \varepsilon > 0.$$

A primera vista, lo que más difícil parece es relacionar ambas partes del enunciado. Esta relación se consigue gracias a la siguiente fórmula; sea $f(x)$

una función definida en el intervalo $[0, 1]$, entonces

$$(3.8) \quad \sum_{\nu=1}^F f(r_\nu) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^k f\left(\frac{j}{k}\right) M\left(\frac{x}{k}\right).$$

Esta expresión nos proporciona una forma de evaluar una suma bastante irregular sobre las fracciones de Farey por medio de la función $M(x)$.

Para su demostración utilizaremos la fórmula de inversión de Möebius de la siguiente forma:

$$f(x) = \sum g(x/n) \Leftrightarrow g(x) = \sum \mu(n) f(x/n).$$

Sea $f(x) = \sum_m g(x/m)$ y consideremos $h(x) = \sum_n \mu(n) f(x/n)$, entonces

$$\begin{aligned} h(x) &= \sum_n \mu(n) \sum_m g(x/mn) = \sum_n \sum_m \mu(n) g(x/mn) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{n|k} \mu(n) \right) g(x/k) = g(x), \end{aligned}$$

donde hemos utilizado (A.3). Los pasos estarán justificados si la suma doble es absolutamente convergente, en particular si es finita. La implicación inversa se hace de la misma manera.¹⁹ Consideremos la función

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 1 \\ 0 & \text{si } x < 1. \end{cases}$$

Entonces por la definición de $M(x)$ se tiene $M(x) = \sum_n \mu(n) D(x/n)$, y aplicando la fórmula de inversión de Möebius se obtiene $D(x) = \sum_n M(x/n)$. Ahora bien, cualquier fracción $\frac{p}{q} = \frac{2p}{2q} = \frac{3p}{3q} = \dots$ con $(p, q) = 1$, $0 < p/q < 1$ aparecerá a la izquierda en (3.8) con coeficiente

$$M(x/q) + M(x/2q) + M(x/3q) + \dots = D(x/q).$$

¹⁹La fórmula de inversión de Möebius se puede ver como una consecuencia de que $\zeta(s) \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) = 1$ (ver [E]).

y por la definición de $D(x)$ se obtiene la fórmula.

Sea ahora la función $f(x) = e(x)$ con $e(x) = e^{2\pi i x}$. Entonces

$$\sum_{\nu=1}^F e(r_\nu) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^k e\left(\frac{j}{k}\right) M\left(\frac{x}{k}\right),$$

pero

$$\sum_{j=1}^k e\left(\frac{j}{k}\right) = 0 \quad \text{para } k > 1.$$

De donde

$$\sum_{\nu=1}^F e(r_\nu) = M(x).$$

Luego,

$$M(x) = \sum_{\nu=1}^F e\left(\frac{\nu}{F}\right) (e^{2\pi i \delta_\nu} - 1) + \sum_{\nu=1}^F e\left(\frac{\nu}{F}\right) = 2i \sum_{\nu=1}^F e\left(\frac{\nu}{F} + \frac{\delta_\nu}{2}\right) \sin \pi \delta_\nu.$$

Tomando valores absolutos, y teniendo en cuenta que $|\sin \pi \delta_\nu| \leq \pi |\delta_\nu|$ tenemos

$$|M(x)| \leq 2\pi \sum |\delta_\nu|,$$

y con ello la primera parte del teorema. Es decir, si $\sum |\delta_\nu| = O\left(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)$ entonces **HR** es cierta.

Para la segunda parte consideramos la función $\overline{B}_1(x)$, es decir hacemos periodico de periodo 1 el primer polinomio de Bernoulli. Metiendo esta función en (3.8) resulta

$$\sum_{\nu=1}^F \overline{B}_1(u + r_\nu) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^k \overline{B}_1\left(u + \frac{j}{k}\right) M\left(\frac{x}{k}\right).$$

Como

$$(3.9) \quad \overline{B}_1(ku) = \sum_{j=1}^k \overline{B}_1\left(u + \frac{j}{k}\right),$$

lo cual es consecuencia de (A.23), entonces

$$(3.10) \quad \sum_{\nu=1}^F \bar{B}_1(u + r_\nu) = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{B}_1(ku) M\left(\frac{x}{k}\right) = G(u).$$

Vamos a estudiar

$$I = \int_0^1 (G(u))^2 du$$

de dos formas segun las dos definiciones que aparecen en (3.10). En primer lugar

$$G(u) = \sum_{\nu=1}^F \bar{B}_1(u + r_\nu)$$

es una función que crece como Fu entre las fracciones de Farey, y tiene saltos de longitud 1 en estas. Además, como las fracciones de Farey son simétricas respecto de $1/2$ excluyendo el 1, se tiene

$$\sum_{\nu=1}^{F-1} \bar{B}_1(r_\nu) = 0$$

y por tanto

$$G(0^+) = \lim_{u \downarrow 0} \bar{B}_1(u + 1) = \bar{B}_1(0^+) = -\frac{1}{2}.$$

Así, entre r_ν y $r_{\nu+1}$ $G(u) = Fu - \frac{1}{2} - \nu$. Por tanto, definiendo $r_0 = 0$ tenemos

$$I = \sum_{\nu=1}^F \int_{r_{\nu-1}}^{r_\nu} (Fu - \frac{1}{2} - \nu + 1)^2 du = \frac{1}{3F} \sum_{\nu=1}^F (Fu - \nu + \frac{1}{2})^3 \Big|_{r_{\nu-1}}^{r_\nu},$$

y teniendo en cuenta que $Fr_\nu = F\delta_\nu + \nu$ queda

$$I = \frac{1}{3F} \sum_{\nu=1}^F (F\delta_\nu + \frac{1}{2})^3 - (F\delta_{\nu-1} - \frac{1}{2})^3.$$

Como $F\delta_F - 1/2 = F\delta_0 - 1/2$ resulta finalmente

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{3F} \sum_{\nu=1}^F (F\delta_\nu + \frac{1}{2})^3 - (F\delta_\nu - \frac{1}{2})^3 \\ &= \frac{1}{3F} \sum_{\nu=1}^F (F\delta_\nu + \frac{1}{2})^2 + (F\delta_\nu - \frac{1}{2})^2 + (F\delta_\nu)^2 - (\frac{1}{2})^2 \\ &= \frac{1}{3F} \sum_{\nu=1}^F 3(F\delta_\nu)^2 + (\frac{1}{2})^2 = F \sum_{\nu=1}^F \delta_\nu^2 + \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Por otra parte, considerando que la suma en

$$G(u) = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{B}_1(ku) M\left(\frac{x}{k}\right)$$

es finita obtenemos

$$I = \sum_{a=1}^{\infty} \sum_{b=1}^{\infty} M\left(\frac{x}{a}\right) M\left(\frac{x}{b}\right) \int_0^1 \overline{B}_1(au) \overline{B}_1(bu) du.$$

Los coeficientes

$$I_{a,b} = \int_0^1 \overline{B}_1(au) \overline{B}_1(bu) du$$

se pueden evaluar explícitamente considerando los diferentes casos.

Si $b = 1$, entonces

$$\begin{aligned} I_{a,1} &= \frac{1}{a} \int_0^a \overline{B}_1(u) \overline{B}_1\left(\frac{u}{a}\right) du = \frac{1}{a} \sum_{k=0}^{a-1} \int_0^1 \overline{B}_1(u+k) \overline{B}_1\left(\frac{u}{a} + \frac{k}{a}\right) du \\ &= \frac{1}{a} \int_0^1 \overline{B}_1(u) \overline{B}_1\left(\frac{u}{a}\right) du = \frac{1}{a} \int_0^1 \left|u - \frac{1}{2}\right|^2 du = \frac{1}{12a}. \end{aligned}$$

en donde hemos usado (3.9), y la periodicidad de $\overline{B}_1$.

Si $(a, b) = 1$, siguiendo los mismos pasos, y teniendo en cuenta que las fracciones bk/a , $k = 0, \dots, a-1$, coinciden, modulo 1, con las fracciones j/a $j = 0, \dots, a-1$ ordenadas adecuadamente, obtenemos finalmente

$$I_{a,b} = \frac{1}{a} \int_0^1 \overline{B}_1(u) \overline{B}_1\left(\frac{bu}{a}\right) du = \frac{1}{a} I_{b,1} = \frac{1}{12ab}$$

Por último, si $(a, b) = c$, entonces $a = \alpha c$, $b = \beta c$ con $(\alpha, \beta) = 1$ y entonces

$$\begin{aligned} I_{a,b} &= \int_0^1 \overline{B}_1(c\alpha u) \overline{B}_1(c\beta u) du = \frac{1}{c} \int_0^c \overline{B}_1(\alpha u) \overline{B}_1(\beta u) du = \\ &= I_{\alpha,\beta} = \frac{1}{12\alpha\beta} = \frac{c^2}{12ab}. \end{aligned}$$

Sustituyendo en I queda finalmente

$$I = \sum_{a=1}^{\infty} \sum_{b=1}^{\infty} M\left(\frac{x}{a}\right) M\left(\frac{x}{b}\right) \frac{c^2}{12ab}.$$

Si **HR** fuese cierta, entonces

$$\begin{aligned}
 I &\ll \sum_{a=1}^{\infty} \sum_{b=1}^{\infty} \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \left(\frac{x}{b}\right)^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \frac{c^2}{12ab} \\
 &= \frac{x^{1+2\varepsilon}}{12} \sum_{a=1}^{\infty} \sum_{b=1}^{\infty} \frac{c^2}{(\alpha c \beta c)^{\frac{3}{2}+\varepsilon}} \\
 &\ll x^{1+2\varepsilon} \sum_{\alpha=1}^{\infty} \sum_{\beta=1}^{\infty} \sum_{c=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^{\frac{3}{2}} \beta^{\frac{3}{2}} c^{1+2\varepsilon}}
 \end{aligned}$$

y por tanto $I = O(x^{1+2\varepsilon})$. Si ahora tomamos la otra expresión que tenemos de I obtenemos

$$F \sum_{\nu=1}^F \delta_{\nu}^2 < K x^{1+2\varepsilon},$$

donde K es una constante que depende de ε . Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwartz resulta

$$\sum_{\nu=1}^F |\delta_{\nu}| \leq \left(F \left(\sum_{\nu=1}^F \delta_{\nu}^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} < K^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}+\varepsilon},$$

como queríamos ver.

En 1955 A.Beurling demostró un teorema que establecía una nueva equivalencia de la hipótesis de Riemann, esta vez en el marco de la variable real, y más concretamente en el espacio B de las funciones de Beurling. Estas funciones se definen por expresiones del tipo

$$f(x) = \sum_{k=1}^n a_k \left\{ \frac{\theta_k}{x} \right\}$$

bajo las condiciones

$$(3.11) \quad 0 < \theta_k \leq 1$$

$$(3.12) \quad \sum_{k=1}^n a_k \theta_k = 0.$$

Sea $p \in (1, \infty)$. Definimos B_p como la clausura de B en $L_p(0, 1)$. El enunciado del teorema es el siguiente

TEOREMA 50. Sea $1 < p < \infty$. $\zeta(s)$ no se anula en $\sigma > 1/p$ si y solo si $B_p = L_p(0, 1)$.

En realidad, de la prueba se desprende que la condición $B_p = L_p(0, 1)$ se puede relajar hasta $-1 \in B_p$.

DEMOSTRACIÓN:

Sólo probaremos la parte "suficiente", ya que la otra escapa a los propósitos del capítulo.

La primera observación es que de (3.12) se sigue que cualquier función de Beurling se puede escribir como

$$f(x) = \sum_{k=1}^n a_k \left[\frac{\theta_k}{x} \right], \quad \text{falta el menos}$$

lo que nos dice que $f(x)$ es constante en los intervalos generados por los puntos $\theta_k m^{-1}$, $k = 1, 2, \dots$, $m = 1, 2, \dots$, que tienen en el cero un punto de acumulación, y que

$$(3.13) \quad f(x) = 0 \quad (x \geq \max_k \theta_k).$$

Si en (1.27) tenemos en cuenta que

$$\frac{1}{s-1} = \int_0^1 x^{-s} dx = - \int_0^1 \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx \quad (\sigma < 1)$$

queda

$$\zeta(s) = -s \int_0^\infty \{x\} x^{-s-1} dx \quad (0 < \sigma < 1).$$

Haciendo el cambio $x = \theta_k/x$, multiplicando por a_k , sumando en k y teniendo en cuenta (3.11) y (3.13), se obtiene

$$-\zeta(s) \sum_{k=1}^n a_k \theta_k^s = s \int_0^1 f(x) x^{s-1} dx \quad (\sigma > 0).$$

Sumando 1 a ambos lados queda en $\sigma > 0$

$$(3.14) \quad 1 - \zeta(s) \sum_{k=1}^n a_k \theta_k^s = s \int_0^1 f(x) x^{s-1} dx + s \int_0^1 x^{s-1} dx = s \int_0^1 (1 + f(x)) x^{s-1} dx.$$

Vamos a aplicar la desigualdad de Hölder teniendo en cuenta que x^{s-1} pertenece a L_q sólo si $\sigma > 1/p$ donde $1/p + 1/q = 1$, y que en ese caso

$$\|x^{s-1}\|_q^q = \frac{1}{q \left(\sigma - \frac{1}{p}\right)}.$$

Asumiendo que $-1 \in B_p$; es decir, que para todo $\varepsilon > 0$ existe una función de Beurling f tal que $\|1 + f\|_p = \varepsilon$, tenemos

$$\left| 1 - \zeta(s) \sum_{k=1}^n a_k \theta_k^s \right|^q \leq \frac{|s|^q \varepsilon^q}{q \left(\sigma - \frac{1}{p}\right)}$$

Por tanto, si hacemos la parte de la derecha estrictamente menor que 1 para algún s_0 , entonces $\zeta(s_0) \neq 0$. Ahora bien, se sabe que si $|t| \leq 1$ la función zeta no tiene ceros a la derecha de $\sigma = 0$. Además, si $|t| > 1$ y s esta en la banda crítica, claramente $|s| < 2|t|$. Por tanto en la región encerrada por la curva $2\sigma t = [q(\sigma - 1/p)]^{1/q}$, el eje de abscisas, y la recta $\sigma = 1$, la función zeta no se anula. Dicha curva corta a el eje de abscisas en $\sigma = 1/p$, y a la recta $\sigma = 1$ en $t = 1/2\varepsilon$. Haciendo ε tender a 0 obtenemos el resultado.

Observación: Siguiendo a Luis Báez-Duarte (ver [B]) podemos interpretar el anterior razonamiento diciendo que siempre que f esté cerca de -1 en el intervalo $(0, 1)$, entonces $\sum_{k \leq n} a_k \theta_k^s$ es aproximadamente la inversa de la función zeta. Parece razonable entonces intentar extender dicha suma a la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k^s} = \frac{1}{\zeta(s)}.$$

Formalmente, si tomamos $a_k = \mu(k)$, $\theta_k = 1/k$ tenemos que la parte izquierda de (3.14) es cero al menos si $\sigma > 1$, y la parte derecha lo es para todo σ cuando hacemos

$$(3.15) \quad f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(k) \left\{ \frac{1}{kx} \right\} \equiv -1 \quad (0 < x < 1)$$

Así de manera aparentemente trivial tendríamos $\|1 + f\|_p = 0$. Que la función en (3.15) converge a -1 se sigue del teorema 42, y de la fórmula de inversión de

Möebius aplicada a $[y] = \sum D(y/k)$ con la $D(x)$ definida en el teorema 49. Para sacar partido a la anterior "prueba" de la hipótesis de Riemann se consideran funciones de Beurling que aproximen a la $f(x)$ de (3.15). Por ejemplo está la llamada aproximación natural

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^n \mu(k) \left\{ \frac{1}{kx} \right\} - n \left\{ \frac{1}{nx} \right\} \sum_{k=1}^n \frac{\mu(k)}{k}.$$

Un cierto atractivo ofrecen los siguientes resultados equivalentes a **HR**, debido a que sólo dependen de valores de $\zeta(s)$ con $\sigma > 1$.

TEOREMA 51. Sea

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{(k-1)! \zeta(2k)}.$$

Entonces

$$F(x) = O\left(x^{\frac{1}{4}+\varepsilon}\right) \Leftrightarrow \mathbf{HR}$$

DEMOSTRACIÓN:

Una simple aplicación del teorema de los residuos nos da

$$F(x) = \frac{i}{2} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{x^s}{\Gamma(s)\zeta(2s)\sin\pi s} ds = \frac{i}{2\pi} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\Gamma(1-s)x^s}{\zeta(2s)} ds$$

donde $1/2 < a < 1$. Tomando $a = 1/2 + \varepsilon$ se obtiene

$$F(x) = O\left(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right).$$

Asumiendo **HR** y teniendo en cuenta (3.7), se puede mover la línea de integración a $a = 1/4 + \varepsilon$ lo que nos da

$$(3.16) \quad F(x) = O\left(x^{\frac{1}{4}+\varepsilon}\right).$$

La otra implicación se deduce aplicando la fórmula de inversión de Mellin, con lo que

$$\frac{\Gamma(1-s)}{\zeta(2s)} = - \int_0^\infty F(x) x^{-1-s} dx.$$

Si (3.16) es cierto, la integral converge absoluta y uniformemente en $\sigma \geq \sigma_0 > 1/4$, y representa una función regular en $\sigma > 1/4$, de donde se sigue que **HR** es cierta.

Como ya observamos en el capítulo anterior las regiones libres de ceros tenían una aplicación directa en la distribución de los números primos. Veremos que también se da en la dirección contraria estableciendo un resultado sobre el orden de $\psi(x) - x$ equivalente a **HR**.

TEOREMA 52. Sea $1/2 < \alpha < 1$, si $\zeta(s)$ no se anula en $\sigma > \alpha$, entonces

$$\psi(x) - x = O(x^\alpha \log^2 x).$$

Recíprocamente si

$$\psi(x) - x = O(x^{\alpha+\epsilon})$$

entonces $\zeta(s)$ no se anula en $\sigma > \alpha$.

DEMOSTRACIÓN:

La primera parte se demuestra como lo hicimos para la región libre de ceros (2.45). Así (2.52) nos da

$$|\psi(x) - x| = O(x^\alpha \log^2 T) + O\left(\frac{x \log^2 x}{T}\right)$$

y escogiendo $T = x^{1-\alpha}$ obtenemos el resultado.

El recíproco se obtiene gracias a (1.11), que se puede escribir como

$$(3.17) \quad -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \frac{s}{s-1} + s \int_1^\infty \frac{\psi(t) - t}{t^{s+1}} dt \quad (\sigma > 1).$$

Si $\psi(x) - x = O(x^{\alpha+\varepsilon})$ entonces la última integral representa una función analítica en $\sigma > \alpha$, y por tanto $\zeta(s)$ no puede tener ceros en ese semiplano.

Una curiosa conclusión a este teorema es que si

$$\psi(x) - x = O(x^{\alpha+\varepsilon})$$

entonces necesariamente

$$\psi(x) - x = O(x^{\alpha} \log^2 x).$$

Sin embargo aún suponiendo cierta la hipótesis de Riemann no podemos decir cual es el exacto orden que se comete al aproximar la función $\psi(x)$ por x . En el otro sentido, el mejor Ω resultado que se conoce es el teorema que estableció Littlewood en 1914, en el que se conseguía

$$\psi(x) - x = \Omega_{\pm} \left(x^{\frac{1}{2}} \log \log \log x \right),$$

con lo que suponiendo cierta la hipótesis de Riemann queda una laguna entre el O y el Ω resultado. Por otra parte esta laguna desaparece cuando se consideran medias. Así se puede demostrar (ver [I1]) que asumiendo **HR** se cumple

$$\psi_1(x) - \frac{1}{2}x^2 = O\left(x^{\frac{3}{2}}\right),$$

(lo que es consecuencia de (2.51)), mientras que también se cumple

$$\psi_1(x) - \frac{1}{2}x^2 = \Omega\left(x^{\frac{3}{2}}\right).$$

Debemos decir que este hecho no se debe a la cancelación que pueda tener $\psi(x) - x$, sino a la rareza de los valores grandes, ya que Cramer ha demostrado que si **HR** es cierta

$$\frac{1}{x} \int_0^x |\psi(u) - u| du = O\left(x^{\frac{1}{2}}\right).$$

Sin embargo los números primos no están distribuidos de una forma regular así, por ejemplo del resultado de Littlewood se deduce que $\psi(x) - x$ cambia infinitas veces de signo.

El siguiente teorema nos proporcionará un Ω resultado para la diferencia $\psi(x) - x$ de manera no demasiado complicada.

TEOREMA 53.

$$(3.18) \quad \psi(x) - x = O\left(x^{\frac{1}{2}}\right)$$

DEMOSTRACIÓN:

Si la hipótesis de Riemann es falsa, entonces el anterior teorema nos da el resultado. De esta forma sólo puede ser falsa si **HR** es cierta.

Consideremos en $\sigma > 1$ la función

$$f(s) = \int_1^{\infty} c(x)x^{-s-1}dx$$

donde $c(x) = \psi(x) - x + cx^{1/2}$ para un c adecuado que elegiremos posteriormente.

De (3.17) deducimos que

$$f(s) = -\frac{\zeta'(s)}{s\zeta(s)} - \frac{1}{s-1} - \frac{c}{\frac{1}{2}-s}$$

Supongamos que (3.18) no es cierto, entonces la integral es absolutamente convergente en $\sigma > \frac{1}{2}$ además $c(x) \geq 0$ a partir de un cierto x_0 por tanto para todo $\sigma > \frac{1}{2}$

$$(3.19) \quad \begin{aligned} |f(\sigma + it)| &\leq \int_1^{x_0} |c(x)|x^{-\sigma-1}dx + \int_{x_0}^{\infty} c(x)x^{-\sigma-1}dx \\ &= \int_1^{x_0} (|c(x)| - c(x))x^{-\sigma-1}dx + f(\sigma) = K + f(\sigma) \end{aligned}$$

Sea $\rho = \frac{1}{2} + i\gamma$ un cero de la función zeta, entonces tomando en (3.19) $s = \sigma + i\gamma$, multiplicando por $\sigma - \frac{1}{2}$, y haciendo tender σ a $1/2$ obtenemos

$$\lim_{\sigma \rightarrow \frac{1}{2}} \left| \frac{\zeta'(\sigma + i\gamma)(\sigma - \frac{1}{2})}{(\sigma + i\gamma)\zeta(\sigma + i\gamma)} + \frac{\sigma - \frac{1}{2}}{s-1} + \frac{c(\sigma - \frac{1}{2})}{s - \frac{1}{2}} \right| = \frac{m}{|\frac{1}{2} + i\gamma|},$$

donde m es la multiplicidad del cero. Por tanto

$$\frac{m}{|\frac{1}{2} + i\gamma|} \leq c.$$

Escogiendo $c = (1 - \varepsilon) \frac{m}{|\frac{1}{2} + i\gamma|}$ llegamos a una contradicción. Así, (3.18) es cierto en cualquier caso.

LA HIPÓTESIS DE LINDELÖF

Hemos visto en el teorema 47, y particularmente en (3.6) que **HR** implicaba

$$\zeta(\sigma + it) = O(t^\epsilon)$$

para todo $\sigma > 1/2$ y para todo $\epsilon > 0$; o lo que es equivalente, por las propiedades de la función $\mu(\sigma)$ (definida después del teorema 26),

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) = O(t^\epsilon).$$

Este es el enunciado de la tercera hipótesis que vamos a ver, la hipótesis de Lindelöf, **HL**²⁰. De esta forma tenemos demostrado el siguiente teorema

TEOREMA 54. **HR** $\Rightarrow$ **HL**

En el otro sentido veremos que **HL** es equivalente a una hipótesis sobre la distribución de los ceros mucho menos fuerte que **HR**. Vamos a dejar la relación que existe entre **HL** y los ceros de $\zeta(s)$ para más adelante, y ahora veremos un teorema que nos refleja la posibilidad de estudiar el orden de la función zeta, como límite de sus medias L_p

TEOREMA 55. *Las siguientes condiciones son equivalentes a **HL***

- i) $\frac{1}{T} \int_1^T |\zeta(\frac{1}{2} + it)|^{2k} dt = O(T^\epsilon) \quad (k = 1, 2, \dots)$
- ii) $\frac{1}{T} \int_1^T |\zeta(\sigma + it)|^{2k} dt = O(T^\epsilon) \quad (\sigma > \frac{1}{2}, k = 1, 2, \dots)$
- iii) $\frac{1}{T} \int_1^T |\zeta(\sigma + it)|^{2k} dt \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_k^2(n)}{n^{2\sigma}} \quad (\sigma > \frac{1}{2}, k = 1, 2, \dots)$

DEMOSTRACIÓN:

²⁰En realidad Lindelöf conjeturó que $|\zeta(s)|$ estaba acotado para $\sigma > 1/2$, lo cual ya hemos visto que no es cierto.

La equivalencia entre *i*) y *ii*) se deduce de las propiedades de la función $\mu_k(\sigma)$, mientras que *ii*) $\Leftrightarrow$ *iii*) es consecuencia del teorema 33 y de su corolario. Por tanto es suficiente ver la equivalencia entre **HL** y *i*).

Claramente la condición *i*) es necesaria para la certeza de **HL**. En la otra dirección vemos que por ser la derivada de $\zeta(s)$ no demasiado grande, si ésta tiene un valor grande para algún t , éste influye en todo un intervalo cerca de t , y por tanto la integral también se hace grande. Supongamos que **HL** no es cierta. Entonces existe un $\lambda > 0$, y unos $t_\nu \rightarrow \infty$ cuando $\nu \rightarrow \infty$ tales que

$$|\zeta(\frac{1}{2} + it_\nu)| > Ct_\nu^\lambda \quad (\nu \gg \nu_0).$$

Además, derivando en (1.27) obtenemos, para $t \geq 1$,

$$|\zeta'(\frac{1}{2} + it)| < C't.$$

Por tanto

$$|\zeta(\frac{1}{2} + it_\nu) - \zeta(\frac{1}{2} + it)| = \left| \int_{t_\nu}^t \zeta'(\frac{1}{2} + iu) du \right| < \frac{1}{2} C' |t - t_\nu| (t + t_\nu) < \frac{3}{2} C' \leq \frac{1}{2} Ct_\nu^\lambda,$$

si $|t - t_\nu| \leq t_\nu^{-1}$ y ν suficientemente grande. De esta forma

$$|\zeta(\frac{1}{2} + it)| > \frac{1}{2} Ct_\nu^\lambda \quad \text{si} \quad |t - t_\nu| \leq t_\nu^{-1}.$$

Tomando $T = \frac{3}{4}t_\nu$, $\nu \gg \nu_0$, el intervalo $(t_\nu - t_\nu^{-1}, t_\nu + t_\nu^{-1})$ está incluido en el intervalo $(T/2, T)$ y por tanto

$$\int_{\frac{T}{2}}^T |\zeta(\frac{1}{2} + it)|^{2k} dt > \int_{t_\nu - t_\nu^{-1}}^{t_\nu + t_\nu^{-1}} |\zeta(\frac{1}{2} + it)|^{2k} dt > 2 \left(\frac{1}{2} C \right)^{2k} t_\nu^{2k\lambda - 1},$$

lo que contradice nuestra hipótesis si k es suficientemente grande, y prueba el teorema.

Nuestros siguientes resultados se dedicarán a estudiar la relación entre el orden de la función zeta, en concreto **HL**, y sus ceros.

TEOREMA 56. La condición

$$N(\sigma, T+1) - N(\sigma, T) = o(\log T)$$

es cierta para todo $\sigma > \frac{1}{2}$ si y solo si **HL** es cierta.

DEMOSTRACIÓN:

La condición es necesaria. ^{en especial} No hay mas que aplicar la formula de Jensen (A.10), (teniendo en cuenta la discusión que hacemos despues de dicha fórmula), a $f(s) = \zeta(s)$, y los circulos C_1 y C_2 ambos con centro en $2+it$ y radios $R = \frac{3}{2} - \frac{\delta}{4}$ y $r = \frac{3}{2} - \frac{\delta}{2}$ respectivamente. Así, si llamamos N al número de ceros en C_2 , obtenemos

$$N \log \left\{ \frac{3}{2} - \frac{\delta}{4} / \frac{3}{2} - \frac{\delta}{2} \right\} \leq \log (M/|f(0)|).$$

Como por hipótesis $M = O(t^\epsilon)$, la parte derecha queda $o(\log t)$, y por tanto $N = o(\log t)$. Escogiendo diferentes t , y superponiendo sus correspondientes círculos obtenemos el resultado para $\sigma = 1/2 + \delta$, ya que el número de círculos solo depende de δ .

La condición es suficiente: Sea el círculo C_1 de centro $2+iT$ y radio $3/2 - \delta$, y C_2 el círculo concéntrico de radio $3/2 - 2\delta$, entonces para todo $s \in C_2$ se cumple

$$\Phi(s) = \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \sum_1 \frac{1}{s - \rho} = O\left(\frac{\log T}{\delta}\right),$$

donde $\sum_1$ recorre los ceros que hay en el círculo C_1 . Esto se ve usando (2.24) y (2.22), ya que los ceros que estan en una sola de las sumas

$$\sum_1 \frac{1}{s - \rho}, \quad \sum_{|t-\gamma| < 1} \frac{1}{s - \rho}$$

cumplen $|s - \rho| > \delta$.

Sea C el círculo concéntrico a los anteriores, y de radio $1/2$. En ese círculo $\Phi(s) = o(\log T)$, ya que todos los términos que intervienen en la función son $O(1)$ y por hipótesis sólo hay $o(\log T)$ términos. Sea por último C_3 el círculo, de

nuevo con el mismo centro, y radio $3/2 - 3\delta$. Por el teorema de los tres círculos de Hadamard, para todo s en C_3 se cumple

$$\Phi(s) = \left\{ O\left(\frac{\log T}{\delta}\right) \right\}^{\alpha} \{o(\log T)\}^{\beta},$$

donde $\alpha + \beta = 1$, $0 < \beta < 1$, y α y β solo dependen de δ . Por tanto dado un $\delta > 0$, $\Phi(s) = o(\log T)$ en C_3 . Sea ahora $s = \sigma + iT$

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{2}+3\delta}^2 \Phi(s) d\sigma &= \log \zeta(2 + iT) - \log \zeta\left(\frac{1}{2} + 3\delta + iT\right) - \\ &\quad - \sum_1 \log(2 + iT - \rho) + \sum_1 \log\left(\frac{1}{2} + 3\delta + iT - \rho\right) \\ &= O(1) - \log \zeta\left(\frac{1}{2} + 3\delta + iT\right) + \sum_1 \log(2 + iT - \rho) + \\ &\quad + \sum_1 \log\left(\frac{1}{2} + 3\delta + iT - \rho\right). \end{aligned}$$

Tomando partes reales, teniendo en cuenta que la parte izquierda es $o(\log T)$ y que $\sum_1 \log(2 + iT - \rho)$ es del mismo orden, tenemos

$$\log \zeta\left(\frac{1}{2} + 3\delta + iT\right) = o(\log T) + \sum_1 \log \left| \frac{1}{2} + 3\delta + iT - \rho \right|.$$

Como $|\frac{1}{2} + 3\delta + iT - \rho| < A$ para ρ en C_1 , se sigue que

$$\log \zeta\left(\frac{1}{2} + 3\delta + iT\right) = o(\log T).$$

Es decir, se cumple la hipótesis de Lindelöf.

Ya vimos que el estudio de los ceros, en particular de la función $N(T)$, se reducía a estudiar $S(T)$. Asumiendo **HL** se puede mejorar su cota superior, así como la de $S_1(T)$.

TEOREMA 57. *Si **HL** es cierta*

$$S(T) = o(\log T).$$

DEMOSTRACIÓN:

La demostración es una copia de la de Backlund, (la primera que vimos), de que $S(T) = O(\log T)$, sin más que reemplazar $\zeta(1/2 + it) = O(t^\epsilon)$ donde se utilizaba $\zeta(1/2 + it) = O(t^A)$.

TEOREMA 58. Si **HL** es cierta

$$S_1(t) = o(\log t)$$

DEMOSTRACIÓN:

Integrando la parte real de (2.25) obtenemos

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+3\delta} \log |\zeta(s)| d\sigma = \sum_{|t-\gamma|<1} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+3\delta} \log |s - \rho| d\sigma + O(\delta \log t).$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} (3.20) \quad \frac{3\delta}{2} \log 2 &\geq \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+3\delta} \log (\sigma - \beta)^2 + (\gamma - t)^2 d\sigma = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+3\delta} \log |s - \rho| d\sigma \geq \\ &\geq \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+3\delta} \log |\sigma - \beta| d\sigma \geq \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+3\delta} \log \left| \sigma - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\delta \right| d\sigma = 3\delta \left\{ \log \left(\frac{3}{2}\delta \right) - 1 \right\}. \end{aligned}$$

Por tanto

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+3\delta} \log |\zeta(s)| d\sigma = \sum_{|t-\gamma|<1} O\left(\delta \log \frac{1}{\delta}\right) + O(\delta \log t) = O\left(\delta \log \frac{1}{\delta} \log t\right) + O(\delta \log t).$$

Además, razonando como en la prueba del teorema 55, lo cual es posible pues suponemos cierta **HL**, se tiene

$$\log \zeta(s) = \sum_1 \log (s - \rho) + o(\log t), \quad \left(\frac{1}{2} + 3\delta \leq \sigma \leq 2\right).$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{2}+3\delta}^2 \log |\zeta(s)| d\sigma &= \sum_1 \int_{\frac{1}{2}+3\delta}^2 \log |s - \rho| d\sigma + o(\log t) \\ &= \sum_1 O(1) + o(\log t) = o(\log t), \end{aligned}$$

donde la integral la hemos acotado de manera similar a (3.20). Finalmente

$$S_1(t) = \frac{1}{\pi} \int_{\frac{1}{2}}^2 \log |\zeta(s)| d\sigma + O(1) = O\left(\delta \log \frac{1}{\delta} \log t\right) + o(\log t)$$

y la demostración se concluye observando que δ se puede coger tan pequeño como se quiera.

LA HIPÓTESIS DE DENSIDAD

El teorema 55 nos mostraba que un mejor conocimiento del orden de $\zeta(s)$ nos permitía decir que localmente la función $N(\sigma, T)$ cuenta "pocos" ceros de la función zeta. Esto también es posible decirlo de manera global.

TEOREMA 59. Si **HL** es cierta entonces

$$N(\sigma, T) = O(T^{2-2\sigma+\varepsilon})$$

uniformemente en $1/2 \leq \sigma \leq 1$

Es decir, la hipótesis de Lindelöf implica la hipótesis de Densidad (**HD**).

Estableceremos el resultado como corolario a un teorema más general en el que se observa, según la cota que podamos establecer para el orden de la función zeta en la recta crítica, la conclusión que se obtiene para la función $N(\sigma, T)$.

TEOREMA 60. Si

$$\zeta(1/2 + it) = O(t^c \log^{c'} t)$$

con $c' \leq \frac{3}{2}$, entonces

$$N(\sigma, T) = O(T^{2(1+2c)(1-\sigma)} \log^4 T)$$

uniformemente en $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1$.

DEMOSTRACIÓN:

El camino para demostrar este tipo de teoremas es ya clásico. Primero se utiliza el lema de Littlewood, (lema 5) reduciendo el problema a acotar la media de orden 2 de una función que regulariza $\zeta(s)$. Hasta aquí es como el teorema 37. Una vez acotada dicha integral en la recta $\sigma = \frac{1}{2}$ por medio de las hipótesis de partida, y en una recta $\sigma = 1 + \delta$, $\delta > 0$ en donde la representación de $\zeta(s)$ por medio de una serie absolutamente convergente nos permite acotarlo de manera elemental, se utiliza un teorema de convexidad para integrales. En nuestro caso

utilizaremos el teorema 34 para obtener una cota en cualquier recta con parte real σ , $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1$ constante.

En primer lugar acotaremos la integral en $\sigma = 1 + \delta$. Para $f_X(s)$ se tiene, como en el teorema 37,

$$\begin{aligned}
 \int_0^T |f_X(1 + \delta + iT)|^2 dt &= T \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{n^{2+2\delta}} + \sum_{n \neq m} \sum \frac{a_n a_m}{n^{1+\delta} m^{1+\delta}} \int_0^T \left(\frac{n}{m}\right)^{it} dt \\
 &= T \sum_{n \geq X} \frac{a_n^2}{n^{2+2\delta}} + 2 \sum_{X \leq m < n} \sum \frac{a_n a_m}{n^{1+\delta} m^{1+\delta}} \frac{\sin(T \log n/m)}{\log n/m} \\
 (3.21) \quad &\ll T \sum_{n \geq X} \frac{d^2(n)}{n^{2+2\delta}} + \sum_{X \leq m < n} \sum \frac{d(n)d(m)}{n^{1+\delta} m^{1+\delta} \log n/m}.
 \end{aligned}$$

La estimación de las sumas que aparecen en la anterior acotación la haremos en base a estimar las siguientes sumas. Por una parte

$$\begin{aligned}
 \sum_{n \leq x} d^2(n) &= \sum_{n \leq x} \sum_{d|n} d(n) = \sum_{m \leq x} \sum_{km \leq x} d(km) \\
 &\leq \sum_{m \leq x} d(m) \sum_{k \leq \frac{x}{m}} d(k) \ll x \log x \sum_{m \leq x} \frac{d(m)}{m},
 \end{aligned}$$

en donde hemos utilizado $d(mn) \leq d(m)d(n)$ (A.4), y $\sum_{n \leq x} d(n) \ll x \log x$ (A.5). Aplicando el lema 1 con la función $f(x) = 1/x$ obtenemos

$$\sum_{n \leq x} d^2(n) = O(x \log^3 x).$$

La segunda suma que vamos acotar es

$$\sum_{X \leq m} \sum_{m < n} \frac{d(n)d(m)}{n^{\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}} \log n/m},$$

para lo que la dividimos de manera similar al lema 16. En este caso

$$S_1 = \sum_{n \leq x} \sum_{m \leq \frac{n}{2}} \frac{d(n)d(m)}{n^{\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}} \log n/m} \ll \left(\sum_{n \leq x} \frac{d(n)}{n^{\frac{1}{2}}} \right)^2.$$

De nuevo por el lema 1, $f(x) = x^{-1/2}$, se obtiene $S_1 \ll x \log^2 x$. Por otro lado

$$S_2 = \sum_{n \leq x} \sum_{\frac{n}{2} \leq m \leq n} \frac{d(n)d(m)}{n^{\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}} \log n/m} < \sum_{n \leq x} n^{\frac{1}{2}} \sum_{\frac{n}{2} \leq m \leq n} \frac{d(n)d(m)}{m^{\frac{1}{2}}(n-m)}$$

$$\sum_{n \leq x} \sum_{r \leq \frac{n}{2}} \frac{d(n-r)d(r)}{r} = \sum_{r \leq \frac{x}{2}} \frac{1}{r} \sum_{2r \leq n \leq x} d(n-r)d(r).$$

Estudiemos la última suma aparte:

$$\sum_{2r \leq n \leq x} d(n-r)d(r) < \sum_{n \leq x} \sum_{\substack{d_1 | n \\ d_2 | n-r}} 1 = \sum_{d_1, d_2 \leq x} \#\{n \equiv 0(d_1), n \equiv r(d_2)\}$$

$$= \sum_{d_1, d_2 \leq x} \#\{k \leq x/d_1, kd_1 = r + md_2\}.$$

La última suma la podemos dividir en dos, según $d_1 d_2 \leq x$ o $km \leq x$, y todos los términos de la suma pertenecen a uno de estos dos casos ya que $km d_1 d_2 = kd_1 m d_2 < (kd_1)^2 \leq x^2$. Además estas dos sumas serán iguales por simetría. Entonces nuestra expresión queda acotada por

$$\leq 2 \sum_{d_1 d_2 \leq x} \#\{k \leq x/d_1, kd_1 = r + md_2\}.$$

Ahora bien, sea $d = (d_1, d_2)$. Si $d \nmid r$ entonces $\#\{\} = 0$; en otro caso sea $d_1 = ad$, $d_2 = bd$, y la suma queda.

$$\sum_{d|r} \sum_{\substack{(a,b)=1 \\ b \leq x/d^2 a}} \#\{k \leq x/ad / ka = r/d + mb\}.$$

Dividiendo el intervalo $(1, x/da)$ en trozos de longitud b , habrá una solución en cada subintervalo, y quizá haya una más. Tenemos entonces

$$\sum_{d|r} \sum_{\substack{(a,b)=1 \\ b \leq x/d^2 a}} \left(\frac{x}{dab} + O(1) \right) = x \sum_{d|r} \frac{1}{d} \sum_{\substack{(a,b)=1 \\ b \leq x/d^2 a}} \frac{1}{ab} + O \left(\sum_{d|r} \frac{1}{d} \sum_{\substack{(a,b)=1 \\ b \leq x/d^2 a}} 1 \right)$$

$$= O \left(x \log^2 x \sum_{d|r} \frac{1}{d} \right) + O \left(x \log x \sum_{d|r} \frac{1}{d} \right).$$

Sustituyendo en S_2 ,

$$S_2 = O\left(x \log^2 x \sum_{r \leq \frac{x}{2}} \frac{1}{r} \sum_{d|r} \frac{1}{d}\right) = O\left(\sum_{d \leq x} \frac{1}{d^2} \sum_{k \leq x/d} \frac{1}{k}\right) = O(x \log^3 x).$$

Ahora bien, para cualquier $f(n)$ tal que $\sum_{n \leq x} f(n) = O(x \log^c x)$ se cumple

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq X} \frac{f(n)}{n^{1+\xi}} &= \sum_{n \geq X} f(n) \int_n^\infty \frac{(1+\xi)}{x^{2+\xi}} dx = \int_X^\infty \frac{(1+\xi)}{x^{2+\xi}} \sum_{X \leq n \leq x} f(n) dx \\ (3.22) \quad &< A \int_X^\infty \frac{(1+\xi) \log^c x}{x^{1+\xi}} dx = \frac{A}{\xi^{c+1} x^\xi} P_c(\xi \log X), \end{aligned}$$

donde $P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ y $a_0 \neq 0$. Ya podemos estimar las sumas que aparecen en (3.21). Por una parte

$$\sum_{n \geq X} \frac{d^2(n)}{n^{2+2\delta}} < \frac{A \log^3 X}{X^{1+2\delta}} < \frac{A}{X^{\delta^3}},$$

ya que $X^{2\delta} = \exp(2\delta \log X) < 1/6(2\delta \log X)^3$. La otra suma queda, teniendo en cuenta que para $\lambda > 1$ se tiene $1 < \log \lambda + \frac{1}{\lambda} < \log \lambda + \frac{1}{\lambda^{\frac{1}{2}}}$,

$$\begin{aligned} \sum_{X \leq m < n} \frac{d(n)d(m)}{n^{1+\delta} m^{1+\delta} \log n/m} &\ll \sum_{X \leq m < n} \frac{d(n)d(m)}{(nm)^{1+\delta}} + \\ &+ \sum_{X \leq m < n} \frac{d(n)d(m)}{n^{1+\delta} m^{\delta} m^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}} \log n/m} \\ &< \left(\sum_{n \geq X} \frac{d(n)}{n^{1+\delta}} \right)^2 + \sum_{X \leq m < n} \frac{d(n)d(m)}{m^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}} \log n/m} \int_n^\infty \frac{1+\delta}{x^{2+\delta}} dx \\ &< \frac{1}{\delta^4} + \int_1^\infty \frac{1+\delta}{x^{2+\delta}} \sum_{X \leq m < n \leq x} \frac{d(n)d(m)}{m^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}} \log n/m} dx \\ &< \frac{1}{\delta^4} + \int_1^\infty \frac{(1+\delta) \log^3 x}{x^{1+\delta}} dx < \frac{A}{\delta^4}. \end{aligned}$$

En donde hemos usado (3.22) con $f(n) = d(n)$. Por tanto

$$\int_0^T |f_X(1+\delta+it)|^2 dt \ll \frac{1}{\delta^3} \left(\frac{T}{X} + \frac{1}{\delta} \right) \ll \frac{1}{\delta^4} \left(\frac{T}{X} + 1 \right).$$

Para acotar la integral en la recta $\sigma = 1/2$ tenemos en cuenta la desigualdad

$$|f_X(s)| \leq 2 (|\zeta(s)|^2 |M_X(s)|^2 + 1).$$

Además

$$\begin{aligned} \int_0^T |M_X(\frac{1}{2} + it)|^2 dt &\leq T \sum_{n \leq X} \frac{\mu^2(n)}{n} + 2 \sum_m \sum_{\substack{n \leq x \\ mn \leq x}} \frac{|\mu(m)\mu(n)|}{(mn)^{\frac{1}{2}} \log n/m} \\ &\leq T \sum_{n \leq X} \frac{1}{n} + 2 \sum_m \sum_{\substack{n \leq x \\ mn \leq x}} \frac{1}{(mn)^{\frac{1}{2}} \log n/m} \\ &\ll (T + X) \log X, \end{aligned}$$

por el lema 16. De esta forma tenemos

$$\int_0^T |f_X(\frac{1}{2} + it)|^2 dt = O \left(T^{2c} (T + X) \log X \log^{2c'} (T + 2) \right).$$

Antes de aplicar el teorema 34 tenemos que hacer la observación de que cuando aparece un logaritmo a una cierta potencia entera en sus hipótesis, también aparece en el resultado, elevado a la misma potencia. En la prueba, lo único que cambia es que en vez de aparecer el término

$$\int_0^\infty \left(\frac{u}{\delta} \right)^{a+2\alpha-1} e^{-2u} du < \frac{K}{\delta^{a+2\alpha-1}},$$

aparece el término

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left(\frac{u}{\delta} \right)^{a+2\alpha-1} \log^n(u/\delta) e^{-2u} du &= \\ &= \int_0^\infty \left(\frac{u}{\delta} \right)^{a+2\alpha-1} \{ \log^n(1/\delta) + n \log^{n-1}(1/\delta) \log u + \dots \} e^{-2u} du \\ &< \frac{K}{\delta^{a+2\alpha-1}} \log^n 1/\delta. \end{aligned}$$

Por tanto, aplicando el teorema de convexidad, para $\frac{1}{2} < \sigma < 1 + \delta$, tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\frac{T}{2}}^T |f_X(\sigma + it)|^2 dt &= O \left\{ \frac{1}{\delta^4} \left(\frac{T}{X} + 1 \right) \right\}^{\frac{\sigma-1/2}{1/2+\delta}} \left\{ T^{2c} (T + X) \log X \log^{2c'} (T + 2) \right\}^{\frac{1+\delta-\sigma}{1/2+\delta}} \\ &= O \left\{ \frac{T + X}{\delta^4} \frac{T^{4c(1-\sigma)}}{X^{2\sigma-1}} (XT^{2c})^{\frac{2\sigma-1}{1/2+\delta}} (\delta^4 \log^3 (T + 2) \log X)^{\frac{1+\delta-\sigma}{1/2+\delta}} \right\} \end{aligned}$$

Escogiendo $\delta = 1/\log(T + X)$, $T = X$ obtenemos el resultado.

En particular, el teorema 28 nos proporciona la estimación

$$N(\sigma, T) = O\left(T^{\frac{8}{3}(1-\sigma)} \log^4 T\right)$$

COROLARIO. HL $\Rightarrow$ HD

Esto no es lo más fuerte que se puede conseguir asumiendo **HL**. Halasz y Turan demostraron que

$$N(\sigma, T) < T^\varepsilon \quad (\varepsilon = \varepsilon(\sigma))$$

para $\sigma > \frac{3}{4}$, y Montgomery lo mejoró para $\sigma \geq 3/4$. Anteriormente Turan había conjeturado que se podría obtener el mismo resultado para todo $\sigma > \frac{1}{2}$.

Se han conseguido muchos teoremas que nos acercan a **HD**. Si la enunciarnos como

$$N(\sigma, T) = O\left(T^{A(\sigma)(1-\sigma)+\varepsilon}\right)$$

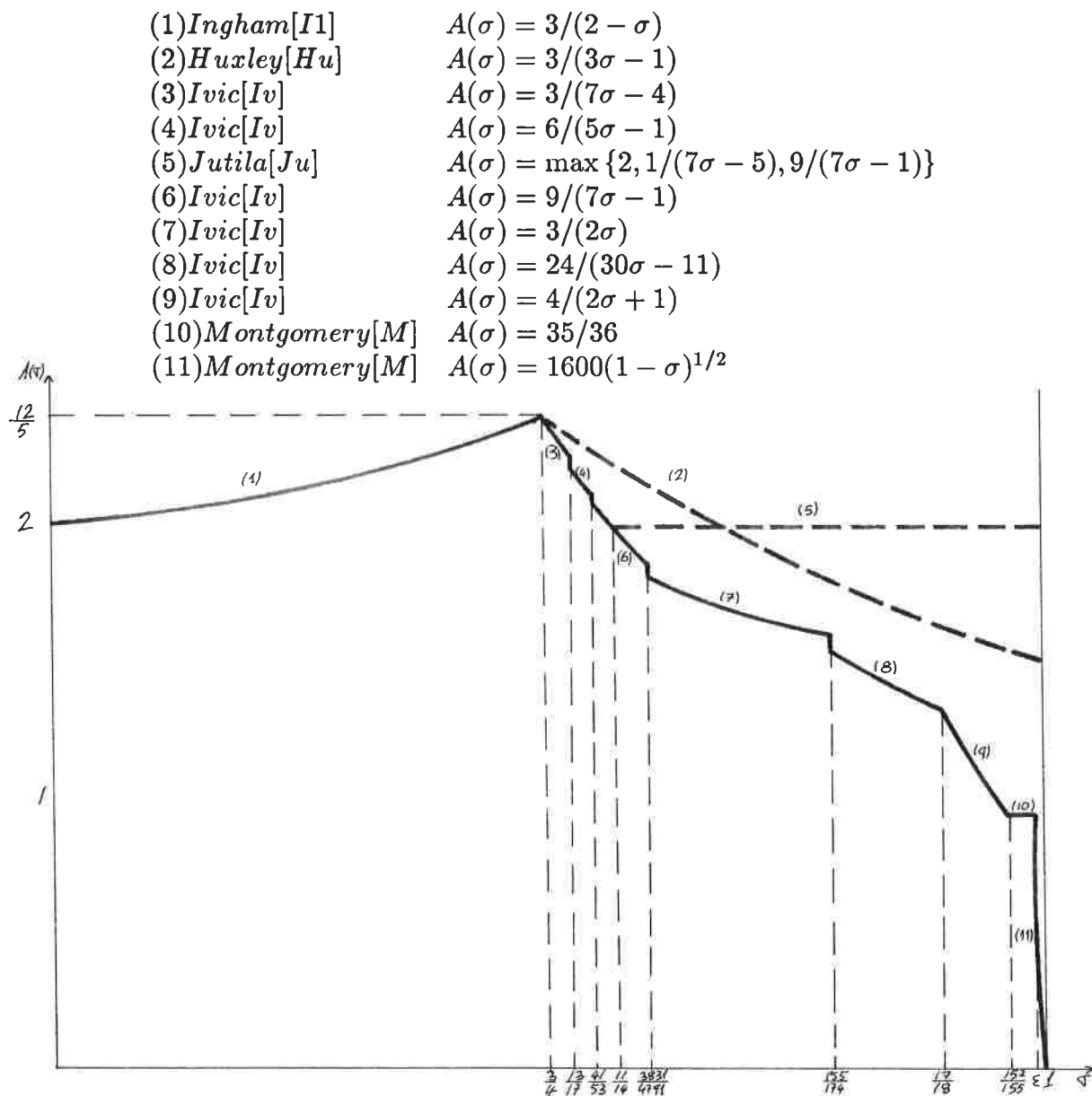
con $A(\sigma) = 2$ para todo $1/2 \leq \sigma \leq 1$, la mejor cota para $A(\sigma)$ en la región $1/2 \leq \sigma \leq 3/4$ la consiguió Ingham en 1940²¹ obteniendo $A(\sigma) \leq 3/(2 - \sigma)$. A este hecho hay que hacerle una excepción cerca de la línea crítica, en donde Jutila tiene un resultado que mejora la anterior cota; en particular

$$N(\sigma, T) \ll_\delta T^{1-(1-\delta)(\sigma-\frac{1}{2})} \log T.$$

Es en la región $\sigma > 3/4$ donde se han realizado mayores progresos. Estos progresos en su mayoría se deben a una desigualdad general que mide la casi-ortogonalidad de un sistema, desigualdad de Halasz-Montgomery, que fue llevada al problema por Huxley [Hu2] consiguiendo $A(\sigma) \leq 3/(3\sigma - 1)$ uniformemente en $3/4 \leq \sigma \leq 1$, que junto con la cota de Ingham nos da $A(\sigma) \leq 12/5$ para todo $1/2 \leq \sigma \leq 1$, siendo este el mejor resultado que se tiene de este estilo, que por

²¹ver [T1]-236

otra parte tienen gran importancia por sus consecuencias aritméticas. Concretamente **HD** implica $p_{n+1} - p_n = O(p_n^{\frac{1}{2}+\epsilon})$, hecho que veremos seguidamente, y hasta la fecha nada mejor se obtiene asumiendo **HR**, mucho más fuerte que **HD**. Por otra parte Jutila, combinando la desigualdad de Halasz-Montgomery, con otro método ha conseguido $A(\sigma) \leq 2$ en $\sigma \geq 11/14$, que es el mayor rango donde se conoce la certeza de **HD**. Otras cotas de $A(\sigma)$ se pueden observar en la figura ~~A~~.



LA HIPÓTESIS DE LOS PRIMOS CONSECUTIVOS

Ya hemos observado que la aparición de la hipótesis de densidad se debe a sus consecuencias en la aritmética. En este caso veremos su aplicación en un problema que atañe a los números primos en particular. Es decir, sea p_n el n -ésimo primo. El problema de los primos consecutivos consiste en determinar los mejores θ y θ' tal que se cumpla la desigualdad

$$(3.23) \quad p_{n+1} - p_n \ll p_n^\theta \log^{\theta'} p_n.$$

O de otra manera, se busca el menor $h = h(x)$ tal que para x suficientemente grande, el intervalo $[x, x+h]$ contenga al menos un primo.

Formulado de esta manera, el problema se reduce al estudio de la función $\pi(x)$, importándonos en este caso el menor h para el que

$$\pi(x+h) - \pi(x) > 0$$

o, en términos de la función $\psi(x)$, más natural dentro de la teoría de $\zeta(s)$,

$$\psi(x+h) - \psi(x) > 0.$$

Si h es grande (por ejemplo como x), entonces en vista de que

$$\psi(x) - x = o(x)$$

se tendrá

$$(3.24) \quad \psi(x+h) - \psi(x) = h(1 + o(1)).$$

Nos interesa encontrar el h más pequeño posible tal que se siga cumpliendo la misma relación asintótica, y de ahí poder deducir desigualdades del tipo (3.23).

El estudio de la diferencia $\psi(x+h) - \psi(x)$ en principio parece muy complicado, ya que en vista de la fórmula explícita de $\psi(x)$, de alguna manera es como estudiar la derivada de una serie que esta a punto de no converger. Sin embargo, en dicha fórmula explícita, (más concretamente se usará (2.52)), de nuevo podemos observar que un mejor estudio de los ceros de $\zeta(s)$, en particular si vemos que los ceros no están muy cerca de $\sigma = 1$, podrá darnos resultados no triviales en el problema de los primos consecutivos. Más concretamente

TEOREMA 61. Si HD es cierta entonces

$$p_{n+1} - p_n \ll p_n^{\frac{1}{2} + \varepsilon}$$

Es decir, la hipótesis de densidad implica la hipótesis de los primos consecutivos, (HPC).

En este caso, como en el teorema 58, también deduciremos el resultado como corolario a un teorema más general.

TEOREMA 62. Si²²

$$N(\sigma, T) = O\left(T^{b(1-\sigma)+\varepsilon}\right)$$

uniformemente en $1/2 \leq \sigma \leq 1$ con $b > 0$, entonces (3.23) es cierto para cualquier θ fijo, $\theta > 1 - \frac{1}{b}$

DEMOSTRACIÓN:

Si para $h \gg x^\theta$ se cumple (3.24), y suponemos que en el intervalo $(x, x+h)$ no hay primos, entonces por una parte

$$\begin{aligned} \psi(x+h) - \psi(x) &= \sum_{x < p^m \leq x+h} \log p = \sum_{m \geq 2} \frac{1}{m} \sum_{x^{1/m} < p \leq (x+h)^{1/m}} \log p \\ &\ll \log x \sum_{m \geq 2} \frac{1}{m} \sum_{x^{1/m} < p \leq (x+h)^{1/m}} 1 \\ &\ll \log x \sum_{m \geq 2} \frac{1}{m} \left\{ (x+h)^{1/m} - x^{1/m} + 1 \right\} \\ &\ll \log^2 x \left\{ 1 + (x+h)^{1/2} - x^{1/2} \right\} \\ (3.25) \quad &\ll \log^2 x \left(1 + hx^{-1/2} \right) = o(h), \end{aligned}$$

mientras que de (3.24) sabemos que

$$\psi(x+h) - \psi(x) > \frac{h}{2}$$

²²El resultado original de Ingham pedía $N(\sigma, T) = O\left(T^{b(1-\sigma)} \log^B T\right)$, obteniendo $\theta > 1 - 1/(b + A^{-1}B)$, donde A es la constante que aparece en la región libre de ceros $\sigma > 1 - A \log \log T / \log T$.

con lo que obtenemos una contradicción. Entonces con demostrar que (3.24) se cumple para $h \gg x^{1-1/b+\epsilon}$ habremos terminado.

De (2.52) se tiene

$$(3.26) \quad \psi(x+h) - \psi(x) = h - \sum_{|\gamma| < T} \frac{(x+h)^\rho - x^\rho}{\rho} + O\left(\frac{x \log^2 x}{T}\right).$$

Sea

$$S = \sum_{|\gamma| < T} \frac{(x+h)^\rho - x^\rho}{\rho}$$

Cada sumando se puede acotar de la siguiente forma:

$$\left| \frac{(x+h)^\rho - x^\rho}{\rho} \right| = \left| \int_x^{x+h} y^{\rho-1} dy \right| \leq h x^{\beta-1}.$$

Para aprovechar la información que tenemos sobre los ceros, "dividimos" la suma segun su parte real. De esta forma y teniendo en cuenta la anterior acotación

$$\begin{aligned} \frac{x}{h} |S| &\leq \sum_{|\gamma| < T} x^\beta = \sum_{|\gamma| < T} \left(1 + \log x \int_0^\beta x^u du \right) \\ &= N(T) + \log x \sum_{|\gamma| < T} \int_0^1 x^u \chi_{(0,\beta)} u du, \end{aligned}$$

donde $\chi_{(a,b)} u$ es la función característica del intervalo (a, b) . Metiendo la suma dentro de la integral y teniendo en cuenta que

$$\sum_{|\gamma| \leq T} \chi_{(0,\beta)} u = N(u, T)$$

tenemos

$$\frac{x}{h} |S| \leq N(T) + \log x \int_0^1 x^u N(u, T) du.$$

Ahora bien, la función zeta no tiene ceros en $\sigma \geq 1 - A \log \log T / \log T$ (2.45).

Llamando $\eta(T) = A \log \log T / \log T$ tenemos

$$N(u, T) = \begin{cases} 0 & u \geq 1 - \eta(T) \\ O(T^{b(1-u)+\epsilon}) & u < 1 - \eta(T) \end{cases}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}\frac{x}{h}|S| &\leq N(T) + O\left(\log x T^{b+\varepsilon} \left(\frac{x}{T^b}\right)^{1-\eta(T)}\right) \\ &= O(T \log T) + O\left(\log x T^{b+\varepsilon} \left(\frac{x}{T^b}\right)^{1-\eta(T)}\right),\end{aligned}$$

donde hemos tenido en cuenta la fórmula de Riemann-von Mangoldt. Sustituyendo en (3.26) resulta

$$\psi(x+h) - \psi(x) = h + O\left(\frac{hT \log T}{x}\right) + O\left\{h \log x \left(\frac{T^b}{x}\right)^{\eta(T)}\right\} + O\left(\frac{x \log^2 x}{T}\right).$$

Eligiendo $T = x^\alpha$ con $\alpha < 1/b$, los dos primeros términos son $o(1)$, y por tanto

$$\psi(x+h) - \psi(x) = h + o(h)$$

si $h = x^\theta$ con $\theta > 1 - \alpha$.

COROLARIO. HD $\Rightarrow$ HPC

A parte de **HPC**, existe otra conjetura relativa al problema, mucho más fuerte que esta que dice $\theta = 0$, $\theta' = 2$. Esta conjetura fue hecha por Cramer basandose en argumentos probabilísticos.

Esta conjetura está muy lejos de ser conseguida a través de la información que podamos conseguir sobre los ceros de $\zeta(s)$, ya que **HR** no parece implicar más de $\theta = 1/2$, $\theta' = 1$, resultado que probó el mismo Cramer.

Observación: La hipótesis de Riemann implica, por el teorema 52 $\theta = 1/2$, $\theta' = 2 + \varepsilon$. El resultado de Cramer dice un poco más.

TEOREMA 63. HR $\Rightarrow \theta = \frac{1}{2}$, $\theta' = 1$.

DEMOSTRACIÓN:

Supongamos que no hay primos en el intervalo $(x, x+2h)$, entonces (3.25) y (3.26) nos dan, para $T = x$,

$$(3.27) \quad o(h^2) = \int_x^{x+h} \psi(y+h) - \psi(y) dy = h^2 - \sum_{|\gamma| \leq x} G(\rho) + O(h \log^2 x),$$

donde

$$G(\rho) = \int_x^{x+h} \frac{(y+h)^\rho - y^\rho}{\rho} dy \quad \rho = 1/2 + i\gamma.$$

Dividamos la suma en dos partes. En $|\gamma| < u \leq x$ se tiene

$$\sum_{|\gamma| \leq u} G(\rho) = \int_x^{x+h} \int_y^{y+h} v^{-\frac{1}{2}} \sum_{|\gamma| \leq u} v^{i\gamma} dv \ll x^{-\frac{1}{2}} h^2 u \log u.$$

De nuevo hemos utilizado Riemann-von Mangoldt para la última desigualdad.

Por otra parte, en $|\gamma| > u$ calculamos directamente la integral

$$\sum_{|\gamma| > u} G(\rho) = \sum_{|\gamma| > u} \frac{(x+2h)^{\rho+1} - 2(x+h)^{\rho+1} + x^{\rho+1}}{\rho(\rho+1)} \ll \frac{x^{\frac{3}{2}} \log u}{u},$$

cota que hemos obtenido gracias a (2.19). Sustituyendo las anteriores estimaciones en (3.27) obtenemos

$$o(h^2) + h^2 = O\left(x^{-\frac{1}{2}} h^2 u \log u\right) + O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}} \log u}{u}\right) + O(h \log^2 x).$$

Los dos primeros términos son del mismo orden si $u = xh^{-1}$, luego

$$o(h^2) + h^2 = O\left(x^{\frac{1}{2}} h \log x\right).$$

Esto es imposible si $h = Cx^{1/2} \log x$ con C suficientemente grande y por tanto al menos hay un primo en $(x, x + 2Cx^{1/2} \log x)$.

En este sentido, Selberg obtuvo un resultado que parcialmente mejora el anterior teorema. En particular demuestra que si **HR** es cierta, entonces para casi todo x , el intervalo $(x, x + f(x) \log^2 x)$ contiene al menos un primo, donde $f(x)$ es cualquier función que tiende a infinito con X .

El primero en obtener algún θ , para el cual (3.23) era cierto, fue Hoheisel en 1930 quien obtuvo $\theta > 1 - 1/3300$. Tres años más tarde Heilbronn consiguió rebajarlo a $\theta > 1 - 1/250$. Gracias a los teoremas 59 y 61, se obtiene que si $\zeta(1/2 + it) = O(t^c \log t)$ entonces $\theta > (1 + 4c)/(2 + 4c) = 1/2 + c/(1 + 2c)$, lo que nos da mejores estimaciones de θ según se va rebajando el orden de la

función zeta en la recta crítica. Así, de la mejor estimación que se conoce para $\zeta(1/2 + it)$, $c = 89/570$, se obtiene $\theta > 1/2 + 89/746$.

Combinando métodos analíticos con el método de la criba Iwaniec y Jutila consiguen llegar a $\theta = 13/23$, resultado que mejoran Iwaniec y Pintz a $\theta = 23/42$, y refinando un poco el método Mozzochi en 1986 obtiene $\theta = 1051/1920$, siendo éste el mejor resultado que se conoce hasta la fecha.

Como hemos podido comprobar el estudio de la distribución de los números primos está íntimamente relacionado con la teoría de la función zeta. Esta, podríamos englobarla en tres diferentes áreas, localización de ceros, orden de magnitud y estimaciones de densidad de ceros. En cada una de ellas han ido apareciendo problemas que debido a su gran complejidad no han podido resolverse totalmente hasta la fecha. Sin embargo el gran conocimiento que existe sobre la función ha permitido a los expertos formular conjeturas que expresan los resultados que se pueden esperar en cada uno de esos problemas. Dichas conjeturas por tanto nos resumen de alguna manera la teoría de la función zeta, y con ella parte del conocimiento de los números primos. Todas ellas aparecieron en el intento de obtener resultados sobre la hipótesis de Riemann, y así, a medida que se complicaba su demostración iban formulándose hipótesis más débiles. Los resultados que hemos ido obteniendo a lo largo del último capítulo, en particular los teoremas 45, 48, 53, 58, 60, nos permiten ver cual es la relación que existe entre dichas hipótesis

TEOREMA 64. $HM \Leftrightarrow HR \Rightarrow HL \Rightarrow HD \Rightarrow HPC$.

Apéndice

Este apéndice incluye varios resultados que se han ido utilizando a lo largo del texto, para así conseguir algo más de continuidad en la lectura y sin tener que recurrir a la bibliografía. Dichos resultados fueron por tanto incluidos por necesidad de los anteriores capítulos, y por ello en algún caso solo comentaremos su existencia o daremos una prueba sin parar en los detalles.

Funciones Aritméticas Multiplicativas.

Una función f definida sobre $\mathbb{N}$ se llama una función aritmética. Si además cumple

$$f(nm) = f(n)f(m) \quad \text{para} \quad (m, n) = 1$$

entonces se dice que es multiplicativa. Claramente dichas funciones están determinadas por su valor en las potencias de los primos. Si lo cumple sin restricción sobre el m.c.d. entonces decimos que es completamente multiplicativa, y se determinan por su valor en los primos.

PROPOSICIÓN. Si $f(n)$ y $j(n)$ son multiplicativas, entonces

$$g(n) = \sum_{d|n} f(d) \quad h(n) = \sum_{d|n} j(d)f\left(\frac{n}{d}\right)$$

también lo son.

Estamos suponiendo $(n, m) = 1$. Así, si $d | nm$ entonces existen d_1, d_2 únicos tales que $d = d_1 d_2$ y $d_1 | n, d_2 | m$. Además cada par d_1, d_2 que dividen a n, m respectivamente dan un divisor del producto. Por tanto

$$g(nm) = \sum_{d|nm} f(d) = \sum_{d_1|n} \sum_{d_2|m} f(d_1 d_2) = \sum_{d_1|n} f(d_1) \sum_{d_2|m} f(d_2) = g(n)g(m).$$

La demostración para $h(n)$ es similar.

PROPOSICIÓN. La función $\mu(n)$ de Möbius que vale 1 en el 1 y

$$(A.1) \quad \mu(n) = \begin{cases} (-1)^r & \text{si } n = p_1 \cdots p_r \\ 0 & \text{si } n \text{ no es libre de cuadrados} \end{cases}$$

→ es multiplicativa.

→ La demostración es inmediata.

De las dos anteriores proposiciones deducimos que

$$\sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d}$$

es multiplicativa.

PROPOSICIÓN.

$$(A.2) \quad \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d} = \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Sabemos que $\sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d}$ es multiplicativa y por tanto es suficiente comprobar la igualdad para las potencias de primos. Así

$$p^\alpha \sum_{d|p^\alpha} \frac{\mu(d)}{d} = p^\alpha \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Dividiendo por p^α obtenemos el resultado.

PROPOSICIÓN.

$$(A.3) \quad g(n) = \sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq 1 \\ 1 & \text{si } n = 1 \end{cases}$$

Como en el caso anterior, es suficiente verlo para $n = p^\alpha$. En este caso $g(n) = g(p)$ por la definición de $\mu(n)$. Así

$$g(p^\alpha) = g(p) = \sum_{d|p} \mu(d) = 1 - 1 = 0.$$

Dedicaremos ahora nuestra atención a la función divisor $d(n) = \sum_{d|n} 1$, claramente multiplicativa en vista de la proposición anterior. Dicha función además cumple para cualesquiera n y m

$$(A.4) \quad d(nm) \leq d(n)d(m).$$

Por ser multiplicativa, es suficiente comprobar que $d(p^{\alpha+\beta}) \leq d(p^{\alpha})d(p^{\beta})$, pero esto es inmediato ya que los divisores de p^n son $1, p, p^2 \dots, p^n$, es decir

$$d(p^n) = n + 1.$$

Como de cualquier función aritmética, es de gran interés controlar su promedio, lo que es posible ya que es mucho más regular que la función en sí.

PROPOSICIÓN.

$$(A.5) \quad \sum_{n \leq x} d(n) \ll x \log x.$$

La demostración no consiste más que en invertir el orden de sumación en la anterior suma doble

$$\sum_{n \leq x} d(n) = \sum_{n \leq x} \sum_{d|n} 1 = \sum_{d \leq x} \sum_{kd \leq x} 1 \sum_{d \leq x} \left[\frac{x}{d} \right] \leq x \sum_{d \leq x} \frac{1}{d} \ll x \log x.$$

Funciones Analíticas

Incluimos aquí algunos resultados generales de funciones analíticas, que hemos ido utilizando a lo largo del texto.

Los siguientes 2 teoremas se derivan del principio del módulo máximo para funciones analíticas. Este principio recordamos que nos afirma que el máximo de una función regular en un dominio D se alcanza en la frontera de D , y sólo en el interior si la función es constante.

TEOREMA. (de los tres círculos de Hadamard) Sea $f(z)$ regular en el anillo $r_1 \leq z \leq r_2$, ($r_1 < r_2$). Sea $r_1 \leq r_3 \leq r_2$ y M_i los máximos de $|f(z)|$ en r_i , $i = 1, 2, 3$. Entonces

$$(A.6) \quad M_3 \leq M_1^\alpha M_2^{1-\alpha},$$

donde $\alpha = \log(r_2/r_3)/\log(r_2/r_1)$.

Consideramos la función $\varphi(z) = z^\lambda f(z)$ donde λ es un número real que luego determinaremos. Por el principio del máximo la función $|\varphi(z)|$ alcanza el máximo en la frontera, luego

$$|\varphi(z)| \leq \max(r_1^\lambda M_1, r_2^\lambda M_2).$$

Así, en $|z| = r_3$

$$|f(z)| \leq \max(r_1^\lambda r_3^{-\lambda} M_1, r_2^\lambda r_3^{-\lambda} M_2).$$

Escogiendo

$$\lambda = -\frac{\log \frac{M_1}{M_2}}{\log \frac{r_1}{r_2}}$$

las dos cantidades anteriores son iguales y se obtiene

$$M_3 \leq M_2 \left(\frac{r_1}{r_3} \right)^{-\frac{\log(M_1/M_2)}{\log(r_1/r_2)}} = M_2 \left(\frac{M_1}{M_2} \right)^{\frac{\log(r_2/r_3)}{\log(r_2/r_1)}},$$

como queríamos ver.

LEMA. (de Schwartz) Sea $f(z)$ regular en $D = |z| \leq R$, $|f(z)| \leq M$ en $|z| = R$, y $f(0) = 0$, entonces en $|z| = r \leq R$

$$|f(z)| \leq \frac{rM}{R}$$

Sea $\varphi(z) = f(z)/z$. $\varphi(z)$ es regular en D , y $|\varphi(z)| \leq M/r$, en $|z| = R$, desigualdad que también es cierta en el interior por el principio del máximo. Así en $|z| = r$ tenemos

$$|f(z)| \leq r \max_{|z|=r} \varphi(z) \leq \frac{rM}{R}.$$

TEOREMA. (de Borel-Caratheodory). Sea $f(z) = u + iv$ regular en $D = \{|z| \leq R\}$, y sea $A(r) = \max_{|z|=r} f(z)$ y $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$. Entonces para $0 < r < R$ se cumple

$$(A.7) \quad M \leq \frac{2rA(R)}{R-r} + \frac{R+r}{R-r}|f(0)|.$$

El resultado es obvio si $f(z)$ es constante. En otro caso, supongamos que $f(0) = 0$, entonces por el principio del máximo para funciones armónicas $A(R) > A(0) = 0$. Consideremos la función

$$g(z) = \frac{f(z)}{2A(R) - f(z)}.$$

Esta función es cociente de funciones regulares en D , y cuyo denominador no se anula, por lo que $g(z)$ es regular en C . Además $g(0) = 0$ y

$$|g(z)|^2 = \frac{u^2 + v^2}{(2A(R) - u)^2 + v^2} \leq 1,$$

ya que $-2A(R) + u \leq u \leq 2A(R) - u$. Por tanto podemos aplicar el lema de Schwartz para obtener

$$|g(z)| \leq \frac{r}{R}$$

y

$$|f(z)| = \left| \frac{2A(R)g(z)}{1 + g(z)} \right| \leq \frac{2rA(R)}{R-r}$$

como queríamos ver. Si $f(0) \neq 0$, aplicamos el resultado a la función $f(z) - f(0)$, con lo que

$$|f(z) - f(0)| \leq \frac{2r\{A(R) - \Re f(0)\}}{R-r} \leq \frac{2r}{R-r}\{A(R) + |f(0)|\},$$

que de nuevo nos da el resultado.

El teorema se puede extender al caso $r = 0$ de la siguiente forma; Sea $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$, en las condiciones del teorema, entonces para $n \geq 1$

$$|a_n| \leq \frac{2(A(R) - \Re a(0))}{R^n} \quad \mathcal{R}(g)$$

Sea la función $g(z) = A(R) - f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$ y $g(z) = u + iv$, entonces si $C = \{|z| = R\}$,

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{g(z)}{z^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} (u + iv) e^{-in\theta} d\theta.$$

Además si $n \geq 1$

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_C g(z) z^{n-1} dz = \frac{R^n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (u + iv) e^{in\theta} d\theta.$$

Por tanto

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (u - iv) e^{-in\theta} d\theta$$

y

$$|a_n| = |b_n| = \left| \frac{1}{\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} u e^{-in\theta} d\theta \right| \leq \frac{2u(0)}{R^n},$$

de donde se deduce el resultado por la definición de $g(z)$. Para la última desigualdad hemos utilizado que $u \geq 0$ es una función armónica.

TEOREMA. (Fórmula de Jensen) Sea $f(z)$ regular en D , sin ceros en $|z| = R$, y con $f(0) = 1$. Entonces

$$(A.8) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\theta})| d\theta = \int_0^R \frac{1}{r} n(r) dr,$$

donde $n(r)$ es el número de ceros de la función en $|z| \leq r$.

La parte izquierda es

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R \Re \left(\frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})} e^{i\theta} \right) dr = \Re \int_0^R \frac{1}{r} \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \int_0^R \frac{1}{r} n(r) dr.$$

Si $z_1, \dots, z_n$ son los ceros de $f(z)$ en D , $|z_i| = r_i$ entonces

$$(A.9) \quad \int_0^R \frac{n(r)}{r} dr = \log \frac{r_1}{r_2} + 2 \log \frac{r_2}{r_3} + \dots + \log \frac{R}{r_n} = \log \frac{R^n}{r_1 \dots r_n},$$

nos da otra forma de escribir la fórmula de Jensen.

COROLARIO. Si $M = \max_D |f(z)|$, $f(0) \neq 0$ y $|z_i| \leq r < R$ para todo i , entonces

$$(A.10) \quad \left(\frac{R}{r}\right)^n \leq \frac{M}{|f(0)|}.$$

En efecto, usando (A.9)

$$\log M/|f(0)| \geq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(z)/f(0)| d\theta = \log \frac{R^n}{r_1 \cdots r_n} \geq \log \left(\frac{R}{r}\right)^n.$$

En realidad esta desigualdad se cumple aunque la función tenga ceros a_k con $r < |a_k| < R$. Para demostrarlo consideramos la función

$$g(z) = f(z) / \prod \left(\frac{R(z - a_k)}{R^2 - \overline{a_k}z} \right) = f(z)/B(z),$$

donde los a_k son los ceros de $f(z)$ en $r < |z| < R$. Dicha función es regular en D y no se anula en $r < |z| < R$. Por tanto

$$\left(\frac{R}{r}\right)^n \leq \frac{\max_D |g(z)|}{|g(0)|}.$$

Ahora bien, $\max_D |g(z)| = \max_{|z|=R} |g(z)| = M$ ya que en $|z| = R$

$$|B(z)| = \prod \left| \frac{R(z - a_k)}{R^2 - \overline{a_k}z} \right| = 1.$$

Además

$$|B(0)| = \left| \prod \left(\frac{-a_k}{R} \right) \right| < 1,$$

luego $|f(0)| \leq |g(0)|$ y se obtiene el resultado.

Cuando una función $f(z)$ es analítica en todo el plano complejo, se dice que es entera. Si además cumple que para algunas constantes C y a

$$|f(z)| \leq C \exp(|z|^a)$$

entonces se dice que es de orden finito, y se llama orden de $f(z)$ a $\alpha = \inf a$ para los que se cumple la desigualdad.

TEOREMA. (de Factorización de Hadamard) Sea f una función entera de orden α finito. Entonces se puede escribir como producto infinito en función de sus ceros de la siguiente forma

(A.11)

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod \left\{ \left(1 - \frac{z}{a_n} \right) \exp \left(\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{a_n} \right)^2 + \cdots + \frac{1}{k} \left(\frac{z}{a_n} \right)^k \right) \right\},$$

donde $g(z)$ es un polinomio de grado menor o igual que $k = [\alpha]$, y a_n son los ceros de $f(z)$.

En la demostración supondremos, sin pérdida de generalidad, $f(0) = 1$, ya que en otro caso se considera la función $g(z) = f(z)/(f(0)z^m)$. En primer lugar veamos que el producto converge uniformemente sobre compactos. Si $z \in K$ un compacto, podemos coger n suficientemente grande tal que $|a_n| \geq 2|z|$, con lo que se cumple $|z/a_n| < 1/2$ excepto para un número finito de sumandos. De esta forma

$$\begin{aligned} \left| \sum_n \log \left(1 - \frac{z}{a_n} \right) + \left(\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{a_n} \right)^2 + \cdots + \frac{1}{k} \left(\frac{z}{a_n} \right)^k \right) \right| = \\ = \left| \sum_n \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{(z/a_n)^j}{j} \right| \leq 2 \sum_n \left| \frac{z}{a_n} \right|^k + 1. \end{aligned}$$

Ahora bien, para todo $l > \alpha$

$$\sum_n \frac{1}{|a_n|^l} = \sum_{|a_n| \leq 1} \frac{1}{|a_n|^l} + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{2^j < |a_n| \leq 2^{j+1}} \frac{1}{|a_n|^l}.$$

La suma interior queda, por la desigualdad de Jensen con $R = 2^{j+2}$, (con lo que $M \leq \exp(2^{(j+2)\alpha})$),

$$\sum_{2^j < |a_n| \leq 2^{j+1}} \frac{1}{|a_n|^l} < \frac{1}{2^{lj}} \sum_{2^j < |a_n| \leq 2^{j+1}} 1 \leq C \frac{2^{(j+2)\alpha}}{2^{lj}}.$$

Luego la serie $\sum \frac{1}{|a_n|^l}$ es convergente, y por tanto también lo es el producto considerado al principio

$$f_1(z) = \prod \left\{ \left(1 - \frac{z}{a_n} \right) \exp \left(\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{a_n} \right)^2 + \cdots + \frac{1}{k} \left(\frac{z}{a_n} \right)^k \right) \right\}.$$

Ahora la función $f(z)/f_1(z)$ es una función entera que no se anula nunca, luego existe una función $P(z)$ tal que $f(z)/f_1(z) = \exp P(z)$. La demostración del teorema se termina gracias a un lema de Littlewood que establece que si el cociente de funciones enteras de orden finito es entero, entonces es de orden finito. Lo demostraremos en particular para la función $\exp P(z)$.

LEMA. $f(z)/f_1(z)$ es de orden finito.

Consideramos la función

$$g_R(z) = \frac{f(z)}{\prod_{|a_n| < R} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right)}.$$

Entonces

$$\max_{|z|=R} |g_R(z)| \leq \max_{|z|=2R} |g_R(z)| \leq M = \max_{|z|=2R} |f(z)| \leq \exp(2R)^\alpha,$$

ya que en $|z| = 2R$ se tiene $\left|1 - \frac{z}{a_n}\right| < 1$. Además $g_R(z)$ no se anula en $|z| < R$ por lo que podemos escribir $g_R(z) = \exp h_R(z)$, tal que $\Re h_R(z) \leq \log M$ y $h_R(0) = 0$. Si escribimos $h_R(z) = \sum_n b_{n,R} z^n$ obtenemos, por el teorema de Borel-Caratheodory, en $|z| < R$

$$|b_{n,R}| \leq \frac{2 \log M}{R^n}.$$

Por otra parte

$$f(z) = \exp P(z) f_1(z).$$

Igualando ambas expresiones de $f(z)$, y teniendo en cuenta la definición de $f_1(z)$ queda

$$h_R(z) = P(z) + \sum_{|a_n| \geq R} \log \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) + \frac{z}{a_n} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{k} \left(\frac{z}{a_n}\right)^k + Q_R(z),$$

donde $Q_R(z)$ es un polinomio de grado menor o igual que k .

Sea $P(z) = \sum_l p_l z^l$, entonces, si $l > k = [\alpha]$ tenemos

$$|p_l| \leq |b_{l,R}| + \frac{1}{l} \sum_{|a_n| \geq R} \frac{1}{|a_n|^l};$$

pero ambos miembros de la suma en la parte derecha tienden a 0 cuando $R \rightarrow \infty$ si $l > k$, por tanto para esos l $p_l = 0$, y queda probado el lema, lo que termina la demostración del teorema de Hadamard.

Trasformada de Mellin

Sea $f(x)x^{\sigma-1} \in L^1(0, \infty)$ de variación acotada en todo intervalo finito de x . Se define la trasformada de Mellin de $f(x)$ a la función

$$(A.12) \quad F(s) = \int_0^\infty f(x)x^{s-1}dx.$$

Además en estas condiciones se puede invertir la anterior fórmula y poner $f(x)$ en función de $F(s)$ gracias a la fórmula de inversión de Mellin, obteniendo

$$\frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-)) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{\sigma-i\omega}^{\sigma+i\omega} F(s)x^{-s}ds.$$

Las dos expresiones anteriores son inversas en el sentido de que si $F(s) \in L^1(-\infty, \infty)$, es de variación acotada cerca de $u = t$, y

$$(A.13) \quad f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(s)x^{-s}ds,$$

entonces

$$\frac{1}{2}(F(\sigma + it^+) + F(\sigma + it^-)) = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{1/a}^a f(x)x^{s-1}dx,$$

y en muchas aplicaciones se reduce a la fórmula de arriba con $F(s)$.

Estas dos relaciones no son más que la trasformada de Fourier, en donde se ha hecho un cambio de variable, y las condiciones impuestas sobre f y F están requeridas para asegurar la validez de la fórmula de inversión.

La Función Gamma

La función Gamma se define como la trasformada de Mellin de la función exponencial negativa, esto es

$$(A.14) \quad \Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1} dx.$$

Dicha integral es absolutamente convergente en $\Re s > 0$, por lo que define una función analítica en esa región. Integrando por partes obtenemos la primera ecuación funcional de la función Gamma

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s).$$

Como primera aplicación de la anterior fórmula, obtendremos el valor de la función en los enteros positivos. Si $n > 0$ es un entero, entonces

$$\Gamma(n+1) = n!.$$

Además un simple cálculo nos permite deducir la que se llama fórmula de duplicación

$$\Gamma(2n)\Gamma(1/2) = 2^{2n-1}\Gamma(n)\Gamma(n+1/2).$$

En general, repitiendo la ecuación funcional k veces obtenemos

$$\Gamma(s+k+1) = (s+k)(s+k-1)\cdots s\Gamma(s)$$

lo que nos proporciona la continuación de la función al semiplano $\Re s > -k-1$ como una función meromorfa con polos simples en los puntos $s = -k$.

Una nueva ecuación funcional se puede obtener gracias a la igualdad

$$\int_0^{\infty} \frac{t^{s-1}}{t+1} dt = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi s},$$

que es una simple aplicación del teorema de los residuos. Así se cumple en $0 < \Re s < 1$

$$(A.15) \quad \Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi s}.$$

En particular $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. Veámoslo

$$\begin{aligned}\Gamma(s)\Gamma(1-s) &= \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx \int_0^\infty y^{-s} e^{-y} dy \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \left(\frac{x}{y}\right)^s x^{-1} e^{-(x+y)} dy dx.\end{aligned}$$

Haciendo el cambio $x/y = u$, $x + y = t$ queda

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{u^{s-1}}{1+u} e^{-t} du dt = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi s}.$$

Dicha igualdad es cierta en todo C por continuación analítica, entendiendo los ceros de $\operatorname{sen} \pi s$ como polos de $\Gamma(s)\Gamma(1-s)$. De esta forma

$$\Gamma(s) = \frac{\pi}{\Gamma(1-s)\operatorname{sen} \pi s}$$

no tiene ceros, pues los polos de $\Gamma(1-s)$ se cancelan con los ceros de $\operatorname{sen} \pi s$, y por tanto la función $1/\Gamma(s)$ es una función entera con ceros simples en $0, -1, -2, \dots$. Además es fácil ver por la representación integral, que en $\Re s < 0$ se cumple

$$\Gamma(1-s) \ll e^{|s|^{1+\varepsilon}}$$

para todo $\varepsilon > 0$. Como $\operatorname{sen} \pi s$ es de orden 1 se tiene en dicha región,

$$\frac{1}{\Gamma(s)} \ll e^{|s|^{1+\varepsilon}}$$

Dicha desigualdad se mantiene cierta en todo C por la primera ecuación funcional, ya que obtendríamos un factor extra del orden de $|s|^{|s|} \ll e^{|s|^{1+\varepsilon}}$. Por tanto $1/\Gamma(s)$ es una función entera de orden 1, y por el teorema de factorización de Hadamard (A.*) podemos escribirla como

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = s e^{as+b} \prod_n \left(1 + \frac{s}{n}\right) e^{-\frac{s}{n}}.$$

Podemos calcular a y b sustituyendo s por cero y teniendo en cuenta que $s\Gamma(s) = \Gamma(s+1)$. Así obtenemos $e^b = 1$; es decir, $b = 0$. Si ahora hacemos $s = 1$, y tomamos logaritmos resulta finalmente

$$\begin{aligned} a &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n} - \log \left(1 + \frac{1}{n} \right) \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n} - \log \prod_{n=1}^{N-1} \frac{n+1}{n} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n} - \log N = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \log N - \frac{1}{N} \\ &= \gamma. \end{aligned}$$

Por diferenciación logarítmica, sustituyendo en $s = 1$ obtenemos $\Gamma'(1) = -\gamma$, lo que nos permite, derivando en la representación integral, obtener la siguiente fórmula para la constante de Euler;

$$\Gamma'(s) = \int_0^{\infty} e^{-x} \log x x^{s-1} dx$$

sustituyendo en $s = 1$

$$(A.16) \quad -\gamma = \int_0^{\infty} e^{-x} \log x dx.$$

Fórmula de Stirling

Así se llama a la siguiente fórmula asintótica que daremos de la función Gamma. En primer lugar la veremos para $s = n$, un número natural.

PROPOSICIÓN. Se cumple

$$(A.17) \quad \Gamma(n) = \left(n - \frac{1}{2} \right) \log n - n + \log \sqrt{2\pi} + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Se tiene

$$\log \Gamma(n) = \log (n-1)! = \sum_{k=1}^{n-1} \log k.$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} \int_{k-1/2}^{k+1/2} \log t dt &= \int_0^{1/2} \log(k+t) dt + \int_0^{1/2} \log(k-t) dt \\ &= \int_0^{1/2} \log(k^2 - t^2) dt = \log k + \int_0^{1/2} \log \left\{ 1 - \left(\frac{t}{k} \right)^2 \right\} dt \\ &= \log k + c_k, \end{aligned}$$

donde $|c_k| \leq 1/k^2$. De esta forma

$$\begin{aligned}\log \Gamma(n) &= \sum_{k=1}^{n-1} \log k = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k-1/2}^{k+1/2} \log t dt - \sum_{k=1}^{n-1} c_k \\ &= \int_{1/2}^{n-1/2} \log t dt - \sum_1^{\infty} c_k + O\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= (n-1/2) \log(n-1/2) - (n-1/2) - \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + c + O\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= (n-1/2) \log n - n + C + O\left(\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

Dejaremos la obtención del verdadero valor de la constante $C = \frac{1}{2} \log 2\pi$ para más adelante. Ahora vamos a obtener la fórmula de Stirling en el caso general

PROPOSICIÓN. Si $\delta > 0$ fijo, entonces en $-\pi + \delta \leq \arg s \leq \pi - \delta$ se cumple

$$(A.18) \quad \log \Gamma(s) = \left(s - \frac{1}{2}\right) \log s - s + \log \sqrt{2\pi} + O\left(\frac{1}{|s|}\right).$$

Tomando logaritmos en la fórmula para $1/\Gamma(s)$ como producto infinito queda

$$\log \Gamma(s) = -\log s - \gamma s + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s}{n} - \log \left(1 + \frac{s}{n}\right).$$

Por otra parte

$$\begin{aligned}\int_0^N \frac{[u] - u + \frac{1}{2}}{u+s} du &= \sum_0^{N-1} \int_n^{n+1} \left(\frac{1/2}{u+s} + \frac{n+s}{u+s} - 1 \right) du \quad (=) \\ \frac{1}{2} \sum_0^{N-1} \log(n+1+s) - \log(n+s) &+ \sum_0^{N-1} (n+s) \{ \log(n+1+s) - \log(n+s) \} - N \\ &= - \sum_0^{N-1} \log(n+s) + \sum_0^{N-1} \int_{n+s}^{n+1+s} \log t dt - \frac{1}{2} \sum_0^{N-1} \log(n+1+s) - \log(n+s) \\ &= - \sum_0^{N-1} \log(n+s) + (N+s-\frac{1}{2}) \log(N+s) - (s+\frac{1}{2}) \log s - N \\ &= \sum_0^{N-1} \left\{ \frac{s}{n} - \log \left(1 + \frac{s}{n}\right) \right\} - \log(N-1)! - s \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{N_1} \right) + \\ &\quad + (N+s-\frac{1}{2}) \log(N+s) - (s+\frac{1}{2}) \log s - N.\end{aligned}$$

Ahora bien, cuando $N \rightarrow \infty$, se cumple

$$\begin{aligned}\log(N-1)! &= (N-1/2)\log N - N + C + O\left(\frac{1}{N}\right) \\ \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{N-1}\right) &= \log N + \gamma + O\left(\frac{1}{N}\right) \\ \log(N+s) &= \log N + \frac{s}{N} + O\left(\frac{1}{N^2}\right).\end{aligned}$$

Por tanto,

$$(A.19) \quad \log \Gamma(s) = \left(s - \frac{1}{2}\right) \log s - s + C + \int_0^\infty \frac{[u] - u + \frac{1}{2}}{u+s} du.$$

Llamando $\varphi(u) = \int_0^u [t] - t + \frac{1}{2} dt$ entonces $|\varphi(u)| \leq 1$ y

$$\left| \int_0^\infty \frac{\varphi'(u)}{u+s} du \right| = \left| \int_0^\infty \frac{\varphi(u)}{(u+s)^2} du \right| \leq \int_0^\infty \frac{1}{u^2 + |s|^2 - 2u|s| \cos \delta} du = O_\delta\left(\frac{1}{|s|}\right),$$

que nos da el resultado a falta de calcular la constante C . Esta se consigue sustituyendo en la anterior fórmula s por N , $N + 1/2$ y $2N$, y utilizando la fórmula de duplicación, haciendo $N \rightarrow \infty$.

Otra forma de escribir la formula de Stirling, que involucra de forma directa el módulo de la función es la siguiente: Para $A \leq \sigma \leq B$ se cumple para $t > t_0$

$$|\Gamma(s)| = e^{-\frac{|t|\pi}{2}} |t|^{\sigma-\frac{1}{2}} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{|t|}\right) \right\}$$

donde la constante depende de A y B .

Si tenemos en cuenta la fórmula integral de Cauchy

$$f'(s) = \int_{C_\delta} \frac{f(z)}{(z-s)^2} dz$$

para la función

$$f(s) = \log \Gamma(s) - \left(s - \frac{1}{2}\right) \log s + s - \log \sqrt{2\pi}$$

y C_δ el círculo de centro s y radio $|s| \sin \frac{\delta}{2}$, obtenemos en $-\pi + \delta \leq s \leq \pi - \delta$ y $|s| > \delta$

$$\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = \log s - \frac{1}{2s} + O\left(\frac{1}{|s|^2}\right).$$

Polinomios y Números de Bernoulli

Los números de Bernoulli B_j se definen mediante la función que los genera

$$(A.20) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n t^n}{n!} = \frac{t}{e^t - 1}.$$

Por ejemplo se tiene $B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$ y, como veremos más adelante $B_{2n+1} = 0$ si $n \geq 1$.

A partir de los números, podemos definir los polinomios de Bernoulli de la siguiente forma

$$(A.21) \quad B_n(x) = \sum_{j=0}^n B_j \binom{n}{j} x^{n-j}.$$

Derivando obtenemos

$$B'_n(x) = n B_{n-1}(x).$$

Gracias a esta fórmula podemos demostrar que

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} t^n = \frac{t e^{tx}}{e^t - 1},$$

ya que

$$F'(x) = t F(x)$$

y por tanto

$$F(x) = K(t) e^{tx}.$$

Sustituyendo x por 0 obtenemos, de la definición de los números de Bernoulli y de $B_n(0) = B_n$ la relación $K(t) = t/(e^t - 1)$, como queríamos ver.

Teniendo en cuenta que

$$F(x+1) - F(x) = t e^{tx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tx)^n}{n!}$$

y que por otra parte

$$F(x+1) - F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x+1) - B_n(x)}{n!} t^n,$$

tenemos, igualando coeficientes,

$$B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1},$$

o bien

$$\int_x^{x+1} B_n(t)dt = \frac{1}{n+1} \int_x^{x+1} B'_{n+1}(t)dt = x^n.$$

De la anterior fórmula podemos deducir varias relaciones entre los valores de los polinomios de Bernoulli en diferentes puntos. En primer lugar observamos que

$$B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x),$$

lo cual es cierto ya que

$$\int_x^{x+1} B_n(1-t)dt = \int_{-x}^{1-x} B_n(t)dt = (-x)^n = (-1)^n \int_x^{x+1} B_n(t)dt$$

En particular

$$(A.22) \quad B_{2n+1}(1/2) = 0.$$

La segunda relación que se deduce de nuestra integral es

$$(A.23) \quad B_n(kx) = k^{n-1} \sum_{j=0}^{k-1} B_n\left(x + \frac{j}{k}\right).$$

Procediendo de manera análoga,

$$\begin{aligned} \int_x^{x+1} B_n(kt)dt &= \frac{1}{k} \int_{kx}^{k(x+1)} B_n(t)dt = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \int_{kx+j}^{kx+j+1} B_n(t)dt = \frac{1}{k} (kx+j)^n \\ &= k^{n-1} \sum_{j=0}^{k-1} \left(x + \frac{j}{k}\right)^n = k^{n-1} \sum_{j=0}^{k-1} \int_{x+\frac{j}{k}}^{x+\frac{j}{k}+1} B_n(t)dt \\ &= k^{n-1} \int_x^{x+1} \sum_{j=0}^{k-1} B_n\left(t + \frac{j}{k}\right) dt, \end{aligned}$$

como queríamos ver. Tomando $k = 2$, y teniendo en cuenta (A.22) se obtiene

$$B_{2n+1}(0) = B_{2n+1} = 0.$$

Podemos obtener una fórmula de recurrencia para los números de Bernoulli teniendo en cuenta que $B_n(1) = (-1)^n B_n(0)$. Así, si hacemos $x = 1$ en (A.21) obtenemos

$$-\sum_{j=0}^{n-1} B_j \binom{n}{j} = (n+1)B_n.$$

Formulas de Sumación

Son diversas técnicas para transformar sumas en otras más manejables, o en integrales de manera que se pueda medir mejor la cancelación.

Sumación Parcial

Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números complejos, y $\{b_n\}$ números reales tal que $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq 0$, entonces

$$(A.24) \quad \left| \sum_{M < n \leq N} b_n a_n \right| \leq b_M \max_{M < n \leq N} \left| \sum_{M < m \leq n} a_m \right|.$$

Por el contrario si $0 \leq b_1 \leq b_2 \leq \dots$ entonces

$$(A.24) \quad \left| \sum_{M < n \leq N} b_n a_n \right| \leq 2b_N \max_{M < n \leq N} \left| \sum_{M < m \leq n} a_m \right|.$$

Ambas fórmulas nos permiten sacar de la suma una sucesión monótona, quedandonos con la parte que mide la cancelación. Las dos se pueden probar de manera análoga, por lo que solo probaremos la primera. Sea $A_n = \sum_{M < m \leq n} a_m$, entonces

$$\begin{aligned} \left| \sum_{M < n \leq N} b_n a_n \right| &= \left| \sum_{M < n \leq N} b_n (A_n - A_{n-1}) \right| = \left| \sum_{M < n \leq N} b_n A_n - \sum_{M < n \leq N-1} b_{n+1} A_n \right| \\ &\leq |b_N A_N| + \left| \sum_{M < n \leq N-1} (b_n - b_{n+1}) A_n \right| \leq b_M \max_{M < n \leq N} \left| \sum_{M < m \leq n} a_m \right| \end{aligned}$$

Fórmula de Sumación de Euler-Maclaurin

Es una fórmula para estimar el error que se comete al aproximar una suma por una integral cuando se utiliza la regla del trapecioide donde los x_i intermedios son números enteros; es decir, el error que se comete en la aproximación

$$\sum_{n=M}^N f(n) \sim \int_M^N f(x)dx + \frac{1}{2}\{f(M) + f(N)\}.$$

Primero obtendremos una fórmula explícita para el error, por medio de una simple integración por partes. De esta forma,

$$\begin{aligned} \int_M^N (x - [x] - \frac{1}{2})f'(x)dx &= \sum_M^{N-1} \int_n^{n+1} (x - [x] - \frac{1}{2})f'(x)dx \\ &= \sum_M^{N-1} \int_0^1 B_1(x)f'(x+n)dx \\ &= \sum_M^{N-1} B_1(x)f(x+n) \Big|_0^1 - \sum_M^{N-1} \int_0^1 f(x+n)dx \\ &= \sum_M^{N-1} \frac{1}{2}\{f(n+1) + f(n)\} - \int_M^{N-1} f(x)dx \\ &= \sum_M^N f(n) - \frac{1}{2}\{f(M) + f(N)\} - \int_M^{N-1} f(x)dx. \end{aligned}$$

Si ahora integramos otra vez por partes el lado izquierdo tenemos

$$\begin{aligned} \int_M^N (x - [x] - \frac{1}{2})f'(x)dx &= \sum_M^{N-1} \int_0^1 B_1(x)f'(n+x)dx \\ &= \sum_M^{N-1} \frac{B_2(x)}{2}f'(n+x) \Big|_0^1 - \sum_M^{N-1} \frac{1}{2} \int_0^1 B_2(x)f''(n+x)dx. \end{aligned}$$

Si tenemos en cuenta que $B_2 = B_2(0) = B_2(1)$ y llamamos

$$(A.25) \quad \overline{B}_n(x) = B_n(x - [x]),$$

haciendo un cambio de variable en la última integral resulta

$$= \frac{B_2}{2}f'(x) \Big|_M^N - \frac{1}{2} \int_M^N \overline{B}_2(x)f''(x)dx.$$

Integrando de nuevo por partes y siguiendo los mismos pasos se obtiene

$$= \frac{B_2}{2} f'(x) \Big|_M^N - \frac{1}{3!} \frac{B_3}{f} (x) \Big|_M^N + \frac{1}{3!} \int_M^N \bar{B}_3(x) f'''(x) dx.$$

En general, suponiendo que $f(x) \in C^{2n+1}[M, N]$ y teniendo en cuenta que $B_{2n+1} = 0$ tenemos

$$= \sum_{n=1}^k \frac{B_{2n}}{(2n)!} f^{(2n-1)}(x) \Big|_M^N + \frac{1}{(2k+1)!} \int_M^N \bar{B}_{2k+1}(x) f^{(2k+1)}(x) dx$$

y por tanto

$$(A.26) \quad \sum_{n=M}^N f(n) = \int_M^N f(x) dx + \frac{1}{2} \{f(M) + f(N)\} + \\ + \sum_{n=1}^k \frac{B_{2n}}{(2n)!} f^{(2n-1)}(x) \Big|_M^N + \frac{1}{(2k+1)!} \int_M^N \bar{B}_{2k+1}(x) f^{(2k+1)}(x) dx,$$

que es la fórmula de sumación de Euler-Maclaurin.

Fórmula de Sumación de Poisson

Actualmente representa un resultado básico de la teoría de números que aparece gracias al análisis armónico.

Si $f(x)$ es suficientemente buena, lo que envuelve regularidad y decaimiento en el infinito, entonces

$$(A.27) \quad \sum_{-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(n),$$

donde $\hat{f}(x)$ es la trasformada de Fourier de $f(x)$, a lo que se llama fórmula de sumación de Poisson.

Consideramos la función periodica de periodo 1

$$F(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} f(x+n),$$

con f decayendo suficientemente rápido en el infinito para que la serie sea, por ejemplo, absolutamente convergente en todo el intervalo $[0, 1]$. Si además

f es suficientemente regular, podemos representar F por su serie de Fourier obteniendo

$$F(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{F}_n e(nx).$$

Además

$$\begin{aligned} \hat{F}_n &= \int_0^1 F(x) e(-nx) dx = \int_0^1 \sum_{-\infty}^{\infty} f(x+m) e(-nx) dx \\ &= \sum_{-\infty}^{\infty} \int_0^1 f(x+m) e(-nx) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e(-nx) dx = \hat{f}(n). \end{aligned}$$

De esta forma

$$\sum_{-\infty}^{\infty} f(x+n) = \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e(nx)$$

y particularizando en $x = 0$ se obtiene el resultado.



Aproximación Diofántica

Handwritten signature: MyGawice

Consiste en encontrar soluciones aproximadas en enteros a unas ecuaciones dadas. El teorema que vamos a dar en este sentido se debe a Dirichlet.

TEOREMA. Sean $\theta_1, \dots, \theta_n$ n números reales, q un entero positivo, y t_0 un número positivo. Podemos encontrar n enteros $m_1, \dots, m_n$ y un número t en el intervalo

$$t_0 \leq t \leq t_0 q^n$$

tales que

$$(A.28) \quad |t\theta_i - m_i| < \frac{1}{q} \quad (i = 1, \dots, n).$$

La demostración se basa en un argumento muy simple llamado principio del palomar, el cual se resume en observar que dadas $n+1$ bolas en n agujeros, ha de haber al menos dos bolas en un mismo agujero.

Consideramos el cubo unidad n -dimensional, y dividimos cada lado en q partes iguales, con lo que aparecen q^n cubos de lado $1/q$. Si ahora consideramos los $q^n + 1$ puntos de coordenadas $\{mt_0\theta_1\}, \dots, \{mt_0\theta_n\}$, donde $\{x\}$ es la parte fraccionaria de x y $m = 0, \dots, q^n$, debe haber dos puntos, correspondientes a $m = m_1$ y $m = m_2 > m_1$, en el mismo cubo. Claramente $t = t_0(m_2 - m_1)$ cumple las condiciones del teorema.

El teorema se puede generalizar de la siguiente forma: Si permitimos que m recorra los enteros en $[0, kq^n]$ obtendremos $kq^n + 1$ puntos, y por tanto habrá un cubo con $k + 1$ puntos, $m = m_1, \dots, m_{k+1}$. En ese caso, en el intervalo $[t_0, kt_0q^n]$ habrá k soluciones al sistema de desigualdades del teorema, correspondientes a $t = m_2 - m_1, \dots, m_{k+1} - m_1$.

Kronecker, imponiendo alguna condición adicional, consiguió un nuevo teorema en aproximación diofántica, en algún sentido más completo que el anterior. Incluiremos aquí sólo su enunciado como referencia.

TEOREMA. Sean $\theta_1, \dots, \theta_n$, n números reales, linealmente independientes sobre los racionales, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ números reales y q un entero positivo. Podemos encontrar un número positivo t y unos enteros $m_1, \dots, m_n$ tales que

$$(A.29) \quad |t\theta_i - \alpha_i - m_i| < \frac{1}{q} \quad (i = 1, \dots, n).$$

El caso $\alpha_i = 0$ está incluido en el teorema de Dirichlet, sin embargo en este caso no se consigue una cota superior para t . Para el caso general es necesaria la independencia lineal, ya que por ejemplo si $\theta_i = 0$, y los $\alpha_i \neq 0$ no hay en general ningún t para el que sea cierto.

La demostración se puede ver en muchos libros de teoría de números elemental, y más cerca del tema en [Iv1] o [T1].

BIBLIOGRAFÍA

- [B] L.Baez-Duarte "On Beurling's Real Variable Reformulation of the Riemann Hypothesis" Ivic Mat. Caracas, Preprint
- [C-C] J.Cilleruelo-A.Cordoba "La Teoría de los Números" Mondadori (1992)
- [C] A.Cordoba "Lecciones de la Teoría de los Números" Univ. Extremadura Asoc. Mat. Española (1987)
- [Ch] F.Chamizo "Las Sumas Trigonométricas en la Teoría de los Números" Tesina U.A.M. (1992)
- [D] H.Davenport "Multiplicative Number Theory" Springer-Verlag Berlin-Heidelberg-New York 2a Ed. (1980)
- [E] H.M. Edwards "Riemann's zeta function" Academic Press (1974)
- [E-F] W.J.Ellison-M.M.France "Les Nombre Premiers" Institute Math. Uvin. Nancango (1975)
- [H-R] H.Hardy-M.Riesz "The General Theory of Dirichlet Series" Cambridge tracts (18) (1964)
- [H-W] H.Hardy-E.M.Wright "An Introduction to the Theory of Numbers" Oxford & Clarendon Press 5a Ed. (1979)
- [H] T.L. Heath "The Thirteen Books of Euclid's Elements" 3 Vols. Dover Public. Inc. N.Y. (1956)
- [He1] D.R.Heath-Brown "The Riemann zeta function" en "Journées Arithmétiques 83-91 Ed by J.V.Armitage (1980)
- [He2] D.R.Heath-Brown "Zero Density Estimates for the Riemann zeta function and Dirichlet L-functions" Journal London Math. Soc. [2] (19) 221-232 (1979)
- [Hu1] M.N.Huxley "Dirichlet Polynomials" en "Elementary and Analytic Number Theory" Banach Center Public. 17 Warsaw (1985)
- [Hu2] M.N.Huxley "On the Difference Between Consecutive Primes" Inventiones Math. (15) 164-170 (1972)

- [Hu-J] M.N.Huxley-M.Jutila "Large Values of Dirichlet Polynomials, IV" Acta Arith. (32) 297-312 (1977)
- [I1] A.E. Ingham "The Distribution of Prime Numbers" Cambridge Univ. Press (1932)
- [I2] A.E. Ingham "On two Conjectures in the Theory of Numbers" Amer. Journal Math. (64) 313-319 (1942)
- [I3] A.E. Ingham "On the Difference Between Consecutive Primes" Quarterly Journal Math. (8) 255-265 (1937)
- [I4] A.E. Ingham "Mean Value Theorems in the Theory of the Riemann zeta function" Proceedings London Math. Soc. [2] (27) 273-300 (1926)
- [Iv1] A. Ivic "The Riemann zeta function. The Theory of the Riemann zeta function with Applications" John Wiley & sons Inc. (1985)
- [Iv2] A. Ivic "Some Recent Results on the Riemann zeta function" en "Theory des Nombres" 424-440 Walter de Gruyter Berlin-New York (1989)
- [Iw-J] H.Iwaniec-M.Jutila "Primes in Short Intervals" Arkiv Mat. (17) 167-176 (1979)
- [Iw-Pi] H.Iwaniec-J.Pintz "Primes in Short Intervals" Monasth Math. (98) 115-143 (1984)
- [J] M.Jutila "Zero density Estimates for L-functions" Acta Arith. (32) 55-62 (1977)
- [K] A.Karatsuba "Fundamentos de la Teoría Analítica de los Números" Mir (1979)
- [Li] E.Lindelöf "Quelques Remarques sur la Croissance de la Fonction $\zeta(s)$ " Bulletin Sci. Math. [2] (32) 341-356 (1908)
- [LE] E. Lines Escardo "La Función zeta de Riemann" Discurso de Recepción en la real academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales (1982)
- [L] J.E.Littlewood "On the Ceros of the Riemann zeta function" Proceedings Cambridge Philos. Soc. (22) 295-318 (1924)
- [Lo] Lou Shi Tuo "A Lower Bound for the zeros of Riemann's zeta function"

on $\sigma = \frac{1}{2}$ " en "Recent Progress in Analytic Number Theory" Vol 1 319-324
Academis Press (1981)

-[M] H.L.Montgomery "Topics in Multiplicative Number Theory" Springer-Verlag Berlin-Heidelberg-New York (1971)

-[Mo] C.J.Mozzochi "On the Difference Between Consecutive Primes" Journal Number Theory (24) 181-187 (1986)

-[O-R] A.M.Odlyzko-H.J.J.te Riele "Disproof of the Mertens Conjecture" Journal Reine Angew. Math. (357) 138-160 (1985)

-[Pi] J.Pintz "An Effective Disproof of the Mertens Conjecture" Soc. Mat. de France Asterisque (147-148) 325-333 (1987)

-[Po] A.J.van der Poorten "A proof that Euler Missed...Apery's proof of the Irrationality of $\zeta(3)$ " Math. Intelligencer (1) 195-203 (1979)

-[P] K.Prachar "Primzahlverteilung" Springer-Verlag Berlin-Heidelberg-New York (1978)

-[RP] J.Rey Pastor "Elementos de la Teoría de funciones" Biblioteca Mat. 5a Ed. (1967)

-[Rb] P.Ribenboim "The Little Book of Big Primes" Springer-Verlag (1991)

-[R] B.Riemann "Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse" (Traducción al ingles de H.M. Edwards "On the Number of Primes less than a given Magnitude" apendice a [E])

-[Ri] M.Riesz "Collected Papers" Springer-Verlag Berlin-Heidelberg-New York (1988)

-[Ro] H.E.Rose "A course in Number Theory" Oxford Sci. Public. Clarendon Press (1988)

-[S] S.L. Segal "Nine Introductions in Complex Analysis" North Holland Math. Studies 53 (1981)

-[Sh] H.N.Shapiro "Introduction to the Theory of Numbers" John Wiley & sons Inc. (1983)

-[Sk] S.Skewes "On the Difference $\pi(x) - li(x)$ I" London Math. Soc. (8)

277-283

-[T1] E.C.Titchmarsh "The Theory of the Riemann zeta function" Oxford Univ. Press 2^a Ed. (1986)

-[T2] E.C.Titchmarsh "The Theory of functions" Oxford Univ. Press 2^a Ed. (1939)(Corregido en 1968)

-[T3] E.C.Titchmarsh "A Convexity Theorem" Journal London Math. Soc. (13) 196-7 (1938)

-vale? vale? ja etc

