

Geometria

Tema 7: Curvatura

Presentació adaptada per Jordi Villanueva a partir de la d'en Joaquim Puig (Creative Commons BY-SA-NC-ND).
Veieu la web de l'assignatura per a més informació.

11 de desembre de 2020

Preambul

Tota corba C de $\mathbb{R}^n$ entesa com a objecte geomètric (“conjunt de tots els seus punts”) admet infinites parametritzacions que difereixen l’una de l’altre en la velocitat i el sentit en que la recorrem en cada punt. Tot seguit, anem a introduir diferents conceptes associats a una parametrització γ donada, alguns dels quals canvien el seu valor si modifiquem la parametrització (com la velocitat o l’acceleració), mentre d’altres són intrínsecs a la corba C , i per tant no depenen de la parametrització γ triada (com la seva longitud o els vectors tangents unitaris).

- **Comentari:** En el que segueix usarem $\dot{}$ per indicar derivada respecte de t , si bé també és correcte usar $'$ per indicar aquesta derivada. Així: $\dot{f}(t) = f'(t)$. També usarem la notació $\vec{}$ per diferenciar vectors d’escalars (números).

Velocitat

Definició

$$\begin{aligned}\gamma : I &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\longmapsto \gamma(t),\end{aligned}$$

Donada una parametrització γ d'una corba $C = \gamma(I)$, definim:

- ▶ $\vec{v}(t) = \dot{\gamma}(t)$ *velocitat* (o vector velocitat) a la que es mou γ al llarg de C en l'instant t ($\vec{v}(t)$ vector tangent a C en $\gamma(t)$).
- ▶ $v(t) = \|\dot{\gamma}(t)\|$ *velocitat escalar* de γ en l'instant t ($v(t)$ és el mòdul de la velocitat).
- ▶ $\vec{T}(t) = \frac{\vec{v}(t)}{v(t)} = \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|}$ *vector tangent unitari* a C en $\gamma(t)$.

(Hi ha només 2 possibles valors per $\vec{T}(t)$ en cada punt de C , que indiquen el sentit en que estem recorrent la corba.)

Longitud d'un arc de corba

Definició

La *longitud* de l'arc de la corba C parametritzada per γ entre $\gamma(a)$ i $\gamma(b)$ és:

$$\int_a^b v(t) dt = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt.$$

Aquesta integral dóna la distància recorreguda per la corba entre $t = a$ i $t = b$ si ens movem sobre ella seguint la parametrització γ .

Observació

Pel Teorema Fonamental del Càlcul, la velocitat $\vec{v}(t) = \dot{\gamma}(t)$ compleix:

$$\gamma(b) = \gamma(a) + \int_a^b \vec{v}(t) dt.$$

Acceleració

Definició

- ▶ $\vec{a}(t) = \ddot{\gamma}(t) = \frac{d^2\gamma}{dt^2}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}(t)$ *acceleració* (o vector acceleració) en $\gamma(t)$.
- ▶ Si expressem el vector velocitat $\vec{v}(t) = \dot{\gamma}(t) = v(t)\vec{T}(t)$, llavors: $\vec{a}(t) = \dot{v}(t) \cdot \vec{T}(t) + v(t) \cdot \dot{\vec{T}}(t)$.
- ▶ $\vec{a}_T(t) = \dot{v}(t) \cdot \vec{T}(t)$ *acceleració tangencial* (mesura el canvi de velocitat escalar en cada punt i és tangent a la corba en $\gamma(t)$).
- ▶ $\vec{a}_N(t) = v(t) \cdot \dot{\vec{T}}(t)$ *acceleració normal* (mesura el canvi de direcció de la corba en cada punt i és normal/perpendicular a la corba en $\gamma(t)$).
- ▶ Denotem els seus mòduls per $a(t) = \|\vec{a}(t)\|$, $a_T(t) = \|\vec{a}_T(t)\|$ i $a_N(t) = \|\vec{a}_N(t)\|$.
- ▶ Clarament: $a^2(t) = a_T^2(t) + a_N^2(t)$.

Curvatura d'una corba plana I

Definició

Considerem la parametrització $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in I$, d'una corba plana regular i expressem el seu vector tangent unitari com:

$$\vec{T}(t) = \frac{\dot{\gamma}(t)}{v(t)} = \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|} = (\cos(\theta(t)), \sin(\theta(t))),$$

per una certa funció $\theta(t)$. Llavors introduïm:

- ▶ $k(t) = \frac{\dot{\theta}(t)}{v(t)}$ la *curvatura amb signe* en $\gamma(t)$.
- ▶ $\kappa(t) = |k(t)| = \frac{\|\dot{\vec{T}}(t)\|}{v(t)} = \frac{\|\vec{a}_N(t)\|}{v^2(t)}$ la *curvatura* (a seques)

La curvatura mesura amb quina “velocitat” canvia la direcció del moviment descrit per la corba, però aquesta velocitat no es calcula derivant respecte de la variable t , sinó derivant **respecte de variable definida per la distància recorreguda sobre la corba**.

Curvatura d'una Corba plana II

El signe de la curvatura (definit només per corbes al pla $\mathbb{R}^2$) és:

- ▶ Curvatura $> 0 \iff \vec{T}(t), \dot{\vec{T}}(t)$ base directa
 $\iff \det(\vec{T}(t), \dot{\vec{T}}(t)) > 0$
 $\iff \dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t)$ base directa.
- ▶ Curvatura $< 0 \iff \vec{T}(t), \dot{\vec{T}}(t)$ base inversa
 $\iff \det(\vec{T}(t), \dot{\vec{T}}(t)) < 0$
 $\iff \dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t)$ base inversa.

Expressant $\dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t)$ en funció de $v(t), \vec{T}(t), \theta(t)$ i les seves derivades deduïm la **fòrmula ràpida pel càlcul de la curvatura**:

$$k(t) = \frac{\det(\dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t))}{v(t)^3}$$

Exemple: El moviment rectilini $\gamma(t) = d(t) \cdot \vec{T}$

$\vec{T} \in \mathbb{R}^2$ vector unitari *constant* ($\frac{d}{dt} \vec{T} = \dot{\vec{T}} = \vec{0}$). Llavors:

- ▶ $\vec{v}(t) = \dot{\gamma}(t) = \dot{d}(t) \cdot \vec{T}$ és el vector velocitat.
- ▶ $v(t) = |\dot{d}(t)|$ és la velocitat escalar. Suposem $\dot{d}(t) > 0$ i per tant $\vec{T}(t) = \frac{\dot{\gamma}(t)}{v(t)} = \frac{\dot{\gamma}(t)}{\dot{d}(t)} = \vec{T}$ (és constant).
- ▶ $\ddot{\gamma}(t) = \ddot{d}(t) \cdot \vec{T} = \vec{a}_T(t)$ tota l'acceleració és tangencial i l'acceleració normal és $\vec{a}_N(t) = \vec{0}$.
- ▶ Expressem $\vec{T} = (\cos(\theta_0), \sin(\theta_0))$ per un cert $\theta_0 \in \mathbb{R}$ i, per tant, $\vec{T}(t) = (\cos(\theta(t)), \sin(\theta(t)))$ amb $\theta(t) = \theta_0$ constant. Així:

$$k(t) = \frac{\dot{\theta}(t)}{v(t)} = \frac{0}{\dot{d}(t)} = 0. \quad (\text{Curvatura amb signe.})$$

El recíproc del càlcul anterior és cert:

Proposició

$\gamma(t)$ té curvatura constant $= 0 \iff \gamma(t)$ és una trajectòria recta.

Exemple: Moviment circular $\gamma(t) = (R \cos a(t), R \sin a(t))$

$R > 0$ i $a(t)$ funció $\mathcal{C}^1$. Moviment sobre una circumferència de centre $(0,0)$ i radi R amb velocitat angular $\dot{a}(t)$.

- ▶ $\vec{v}(t) = \dot{\gamma}(t) = R \dot{a}(t) (-\sin a(t), \cos a(t))$.
- ▶ $v(t) = \|\dot{\gamma}(t)\| = R |\dot{a}(t)| = \pm R \dot{a}(t)$. ($\pm$ és el signe de $\dot{a}(t)$.)
- ▶ $\vec{T}(t) = \frac{\dot{\gamma}(t)}{v(t)} = \pm(-\sin a(t), \cos a(t)) = (\cos \theta(t), \sin \theta(t))$,
on $\theta(t) = a(t) \pm \frac{\pi}{2} \implies \dot{\theta}(t) = \dot{a}(t)$.
- ▶ La curvatura amb signe $k(t)$ i la curvatura $\kappa(t)$ són constants:

$$k(t) = \frac{\dot{\theta}(t)}{v(t)} = \frac{\dot{a}(t)}{\pm R \dot{a}(t)} = \pm \frac{1}{R}, \quad \kappa(t) = |k(t)| = \frac{1}{R}.$$

El recíproc del càlcul anterior és cert:

Proposició

$\gamma(t)$ té curvatura constant $\kappa > 0 \iff$ la trajectòria de $\gamma(t)$ és un arc de cercle de radi $R = \frac{1}{\kappa}$.

Observació: fórmula ràpida pel càlcul de la curvatura

- Moviment rectilini $\gamma(t) = d(t) \cdot \vec{T}$.

$$k(t) = \frac{\det(\dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t))}{v^3(t)} = \frac{\det(\dot{d}(t)\vec{T}, \ddot{d}(t)\vec{T})}{(\dot{d}(t))^3} = \frac{\ddot{d}(t)}{(\dot{d}(t))^2} \det(\vec{T}, \vec{T}) = 0.$$

- Moviment circular $\gamma(t) = (R \cos a(t), R \sin a(t))$.

$$\dot{\gamma}(t) = R\dot{a}(t)(-\sin a(t), \cos a(t)), \quad v(t) = \pm R\dot{a}(t),$$

$$\begin{aligned} \ddot{\gamma}(t) &= R\ddot{a}(t)(-\sin a(t), \cos a(t)) \\ &\quad + R(\dot{a}(t))^2(-\cos a(t), -\sin a(t)). \end{aligned}$$

$$k(t) = \frac{R^2(\dot{a}(t))^3}{\pm R^3(\dot{a}(t))^3} \begin{vmatrix} -\sin a(t) & -\cos a(t) \\ \cos a(t) & -\sin a(t) \end{vmatrix} = \pm \frac{1}{R}.$$

(El terme $R\ddot{a}(t)(-\sin a(t), \cos a(t))$ de $\ddot{\gamma}(t)$ és l.i. amb $\dot{\gamma}(t)$ i l'hem eliminat en la 2a. columna del determinant.)

El cercle osculador I

Podem aproximar la corba $C = \gamma(I)$ localment entorn $P = \gamma(t_0)$ per un cercle $\text{Osc}_\gamma(t_0)$ que anomenarem el *cercle osculador*:

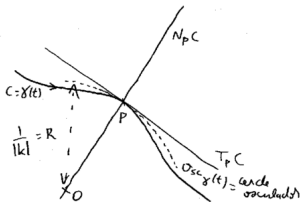
- ▶ El radi de $\text{Osc}_\gamma(t_0)$ és el *radi de curvatura* de γ en P , definit per: $R = \frac{1}{\kappa(t_0)}$. ($\kappa(t_0) \geq 0$ és la curvatura de γ en t_0 .)
- ▶ El centre de $\text{Osc}_\gamma(t_0)$ és el *centre de curvatura* de γ en P , definit per: $O = P + R \frac{\dot{\vec{T}}(t_0)}{\|\dot{\vec{T}}(t_0)\|}$. ($\vec{T}(t) = \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|}$.)

Propietats del cercle osculador:

1. Si la corba C és un arc de cercle, llavors el seu cercle osculador en tot punt és el cercle on viu la corba.
2. $\text{Osc}_\gamma(t_0)$ és tangent a C en $P = \gamma(t_0)$.

El cercle osculador II

3. Si escollim una parametrització $\phi(t)$ del cercle osculador $\text{Osc}_\gamma(t_0)$ tal que $\phi(t_0) = P = \gamma(t_0)$, i ϕ té les mateixes velocitat escalar i acceleració tangencial que γ en t_0 , aleshores els polinomis de Taylor de grau 2 de $\gamma(t)$ i de $\phi(t)$ en $t = t_0$ són coincidents.



Teorema fonamental de les corbes planes

El teorema fonamental de corbes planes demostra la rellevància de la curvatura:

Teorema

Si dues corbes planes parametritzades $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ tenen mateixa velocitat escalar $v_1(t) = \|\dot{\gamma}_1(t)\| = v_2(t) = \|\dot{\gamma}_2(t)\|$, i mateixa curvatura amb signe $k_1(t) = k_2(t)$, per tot $t \in [a, b]$, aleshores existeix un moviment $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que porta γ_1 sobre γ_2 :

$$\gamma_2(t) = f(\gamma_1(t)).$$

Exemple I

Exemple

Sigui $\gamma(t)$ la trajectòria que segueix una pedra que llancem horitzontalment des d'una alçada $h = 1\text{m}$ i amb velocitat inicial $v_0 = 10\text{m/s}$, sobre la que actua una gravetat constant $g = 10\text{m/s}^2$ (menyspreem el fregament amb l'aire). Trobeu $\gamma(t)$ i $\text{Osc}_\gamma(t)$.

- ▶ L'acceleració de $\gamma(t)$ és la gravetat (vertical): $\ddot{\gamma}(t) = (0, -g)$.
- ▶ Integrant: $\dot{\gamma}(t) = \dot{\gamma}(0) + \int_0^t \ddot{\gamma}(t) dt = (v_0, -g t)$, on la velocitat inicial és horitzontal: $\dot{\gamma}(0) = (v_0, 0)$.
- ▶ Integrant: $\gamma(t) = \gamma(0) + \int_0^t \dot{\gamma}(t) dt = (v_0 t, h - g t^2/2)$, on la posició inicial és: $\gamma(0) = (0, h)$.
- ▶ Així: $\gamma(t) = (10 t, 1 - 5 t^2)$.

Exemple II

- Calculem primer el radi de curvatura R en $P = \gamma(t)$. Ens cal:

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}(t) &= (10, -10t), \quad v(t) = \|\dot{\gamma}(t)\|, \\ \vec{T}(t) &= \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|} = \frac{(1, -t)}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \ddot{\gamma}(t) = (0, -10),\end{aligned}$$

La curvatura amb signe és:

$$k(t) = \frac{\det(\dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t))}{v^3(t)} = \frac{\begin{vmatrix} 10 & 0 \\ -10t & -10 \end{vmatrix}}{10^3(1+t^2)^{3/2}} = \frac{-1}{10(1+t^2)^{3/2}},$$

i la curvatura és $\kappa(t) = |k(t)| = \frac{1}{10(1+t^2)^{3/2}}$ i el radi del centre osculador és $\text{Osc}_{\gamma}(t)$ és $R = \frac{1}{\kappa(t)} = 10(1+t^2)^{3/2}$.

Exemple III

- Calculem el centre de curvatura O en $P = \gamma(t)$.

Usant $\vec{T}(t) = \frac{(1, -t)}{\sqrt{1+t^2}}$, obtenim:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{T}}(t) &= \frac{(0, -1)}{\sqrt{1+t^2}} - \frac{t}{(\sqrt{1+t^2})^3}(1, -t) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \left((0, -1) - \frac{t}{1+t^2}(1, -t) \right) = \frac{(-t, -1)}{(\sqrt{1+t^2})^3}.\end{aligned}$$

Per tant:

$$\|\dot{\vec{T}}(t)\| = \frac{\sqrt{1+t^2}}{(\sqrt{1+t^2})^3} = \frac{1}{1+t^2}, \quad \frac{\dot{\vec{T}}(t)}{\|\dot{\vec{T}}(t)\|} = \frac{(-t, -1)}{\sqrt{1+t^2}}$$

Exemple IV

Finalment, el centre del cercle osculador $\text{Osc}_\gamma(t)$ és:

$$\begin{aligned} O &= P + R \frac{\dot{\vec{T}}(t)}{\|\dot{\vec{T}}(t)\|} \\ &= (10t, 1 - 5t^2) + 10(1 + t^2)^{3/2} \cdot \frac{(-t, -1)}{\sqrt{1 + t^2}} \\ &= (10t, 1 - 5t^2) + 10(1 + t^2)(-t, -1) \\ &= (-10t^3, -9 - 15t^2). \end{aligned}$$

Si, p.ex., fem $t = 0$, llavors el centre osculador $\text{Osc}_\gamma(0)$ en el punt $P = \gamma(0) = (0, 1)$ de la corba parametritzada per $\gamma(t)$ és el cercle de centre $O = (0, -9)$ i radi $R = 10$.

Problema 4

Si $a > 0$, obteniu la curvatura de la catenària parametritzada per $\gamma(t) = (t, a \cosh(t/a))$, $t \in \mathbb{R}$. Trobeu-li el valor màxim i el punt en que s'assoleix. En aquest punt calculeu el cercle osculador.

Recordeu: $\frac{d}{dt} \sinh(t) = \cosh(t)$, $\frac{d}{dt} \cosh(t) = \sinh(t)$,
 $\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$, $\cosh(t) \geq 1$. Tenim:

$$\dot{\gamma}(t) = (1, \sinh(t/a)), \quad \ddot{\gamma}(t) = \left(0, \frac{1}{a} \cosh(t/a)\right),$$

$$v(t) = \|\dot{\gamma}(t)\| = \sqrt{1 + \sinh^2(t/a)} = \sqrt{\cosh^2(t/a)} = \cosh(t/a) > 0.$$

La curvatura amb signe $k(t)$ i la curvatura $\kappa(t) = |K(t)|$ són:

$$\begin{aligned} k(t) &= \frac{\det(\dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t))}{v^3(t)} = \frac{1}{\cosh^3(t/a)} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \sinh(t/a) & \frac{1}{a} \cosh(t/a) \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{a \cosh^2(t/a)} > 0 \implies \kappa(t) = \frac{1}{a \cosh^2(t/a)}. \end{aligned}$$

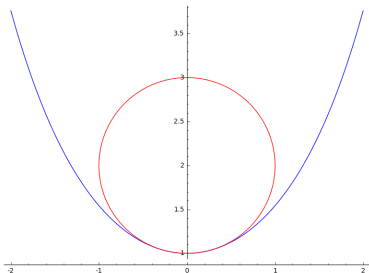
El valor màxim de $\kappa(t) = \frac{1}{a \cosh^2(t/a)}$ s'assoleix quan $\cosh^2(t/a)$

assoleix el seu valor mínim. Com que $\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} > 1$ si $t \neq 0$ i $\cosh(0) = 1$, això succeeix quan $t = 0$:

$$\max_{t \in \mathbb{R}} \{\kappa(t)\} = \kappa(0) = \frac{1}{a}.$$

El cercle osculador a $\gamma(t)$ en $P = \gamma(0) = (0, a)$ té radi de curvatura $R = \frac{1}{\kappa(0)} = a$ i centre de curvatura:

$$O = P + R \frac{1}{\|\dot{T}(0)\|} \dot{T}(0) = (0, a) + a \frac{(0, 1/a)}{1/a} = (0, 2a).$$



Efectivament: usant $\tanh(t) = \frac{\cosh(t)}{\sinh(t)}$, $\frac{d}{dt} \tanh(t) = \frac{1}{\cosh^2(t)}$:

$$\vec{T}(t) = \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|} = \frac{(1, \sinh(t/a))}{\cosh(t/a)} = \left(\frac{1}{\cosh(t/a)}, \tanh(t/a) \right),$$

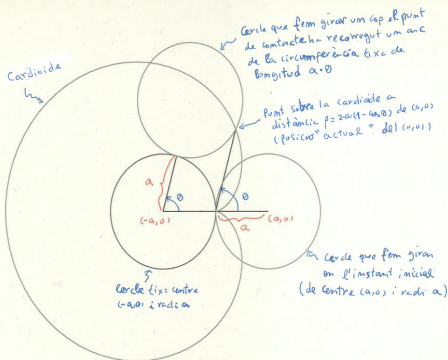
$$\dot{\vec{T}}(t) = \left(-\frac{\sinh(t/a)}{a \cosh^2(t/a)}, \frac{1}{a \cosh^2(t/a)} \right),$$

i, usant ara $\cosh(0) = 1$, $\sinh(0) = 0$:

$$\dot{\vec{T}}(0) = (0, 1/a), \quad \|\dot{\vec{T}}(0)\| = 1/a.$$

Problema 1

La cardioide és la corba que, en fer girar un cercle sense lliscar al voltant d'un altre cercle del mateix radi, descriu un punt de la vora del cercle extern. Si el cercle intern és fix amb centre $(-a, 0)$, el cercle extern es troba inicialment amb centre a $(a, 0)$, i el punt de la vora del cercle extern que gira està inicialment en el $(0, 0)$, l'equació implícita de la cardioide amb radi a en coordenades polars (ρ, θ) és $\rho = 2a(1 - \cos \theta)$.



(i) *Deduiu l'equació de la corba en coordenades cartesianes.*

La relació entre les coordenades cartesianes (x, y) i les polars (ρ, θ) és $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$ (per tant, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$). Per tant, l'equació $\rho = 2a(1 - \cos \theta)$ esdevé en cartesianes:

$$\rho = 2a(1 - \cos \theta) \quad \xRightarrow{\text{producte per } \rho} \quad \rho^2 = 2a\rho - 2a\rho \cos \theta$$

$$\xRightarrow{\quad} \boxed{x^2 + y^2 = 2a\sqrt{x^2 + y^2} - 2ax}$$

Observeu que com que $(0, 0)$ és de la cardioide, multiplicar l'equació per ρ no n'afegeix cap nova solució.

(ii) *Parametritzeu la cardioide i representeu-la gràficament. Veieu algun candidat a punt singular?*

Substituint l'expressió $\rho = \rho(\theta) = 2a(1 - \cos \theta)$ en polars en $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$, obtenim la següent parametrització $\gamma(\theta)$ de la cardioide, com a funció de $\theta \in [0, 2\pi]$:

$$\gamma(\theta) = (x(\theta), y(\theta)) = (2a(1 - \cos \theta) \cos \theta, 2a(1 - \cos \theta) \sin \theta).$$

Per la representació gràfica veieu la pàgina anterior. Allà veiem que el candidat natural a punt singular és $(0, 0)$, ja que la cardioide hi té una “punxa”.

$\gamma(\theta) = (x(\theta), y(\theta)) = (2a(1 - \cos \theta) \cos \theta, 2a(1 - \cos \theta) \sin \theta)$ és derivable $\forall \theta \in [0, 2\pi]$, per xequenjar que $(0, 0)$ és un punt singular de la parametrització, veurem que $\gamma'(\theta) = (0, 0)$ en aquest punt:

$$x'(\theta) = 2a [\sin \theta \cos \theta + (1 - \cos \theta)(-\sin \theta)] = 2a(2 \cos \theta - 1) \sin \theta,$$
$$y'(\theta) = 2a [\sin \theta \sin \theta + (1 - \cos \theta) \cos \theta] = 2a(\sin^2 \theta + (1 - \cos \theta) \cos \theta)$$

Tenim $x'(\theta) = 0 \iff \sin \theta = 0$ o bé $\cos \theta = \frac{1}{2}$.

- $\sin \theta = 0 \iff \theta \in \{0, \pi\}$, i és té $y'(0) = 0$, $y'(\pi) = -4a \neq 0$.
- $\cos \theta = \frac{1}{2} \implies y'(\theta) = 2a \left[\sin^2 \theta + \frac{1}{4} \right] \neq 0$.

Per tant, l'únic punt singular de la parametrització $\gamma(\theta)$ és per $\theta = 0$ que correspon a $\gamma(0) = (0, 0)$.

Per veure que $(0, 0)$ efectivament és un punt singular de la corba, independentment de la parametrització triada, verificarem que el gradient de la funció $f(x, y)$ que defineix la seva equació implícita $f(x, y) = 0$ (en cartesianes) és igual a $(0, 0)$ en el punt $(0, 0)$ de la cardioide. Malauradament, l'equació en cartesianes que hem deduït no és derivable en $(0, 0)$. Anem a generar-ne una que ho sigui.

Eliminem l'arrel quadrada de l'equació tot elevenant-la al quadrat:

$$\begin{aligned}2 a \sqrt{x^2 + y^2} &= x^2 + y^2 + 2 a x \implies 4 a (x^2 + y^2) = (x^2 + y^2 + 2 a x)^2 \\ &\implies 4 a (x^2 + y^2) = (x^2 + y^2)^2 + 4 a x^2 + 4 a x (x^2 + y^2).\end{aligned}$$

L'equació obtinguda és $f(x, y) = 0$, on

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 + 4 a x (x^2 + y^2) - 4 a y^2.$$

Per tant, el seu gradient és $\nabla f(x, y) = (f_x, f_y)$, on:

$$\begin{aligned}f_x(x, y) &= 4 (x^2 + y^2) x + 4 a (x^2 + y^2) + 8 a x^2, \\ f_y(x, y) &= 4 (x^2 + y^2) y + 8 a x y - 8 a y.\end{aligned}$$

Clarament, $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$ i per tant $(0, 0)$ és un punt singular de la varietat (corba) implícita definida per $f(x, y) = 0$.

(iii) Trobeu la velocitat escalar, i les acceleracions tangencial i normal escalars per aquesta parametrització. Deduiu-ne la curvatura. Què fa la curvatura entorn al punt singular?

El vector velocitat $\vec{v}(\theta) = \gamma'(\theta)$, ja calculat, és:

$$\begin{aligned}\vec{v}(\theta) &= (2a(2\cos\theta - 1)\sin\theta, 2a(\sin^2\theta + (1 - \cos\theta)\cos\theta)) \\ &= 2a((2\cos\theta - 1)\sin\theta, (1 - \cos\theta)(1 + 2\cos\theta)),\end{aligned}$$

on hem usat $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = (1 - \cos\theta)(1 + \cos\theta)$.

La velocitat escalar és $v(\theta) = \|\vec{v}(\theta)\|$. Calculem primer el seu quadrat usant de nou l'expressió anterior per $\sin^2\theta$:

$$\begin{aligned}\|\vec{v}(\theta)\|^2 &= (2a)^2 [(2\cos\theta - 1)^2 \sin^2\theta + (1 - \cos\theta)^2 (1 + 2\cos\theta)^2] \\ &= (2a)^2 (1 - \cos\theta) [(2\cos\theta - 1)^2 (1 + \cos\theta) \\ &\quad + (1 - \cos\theta)(1 + 2\cos\theta)^2] \\ &= (2a)^2 (1 - \cos\theta) [(4\cos^2\theta - 4\cos\theta + 1)(1 + \cos\theta) \\ &\quad + (1 - \cos\theta)(1 + 4\cos\theta + 4\cos^2\theta)] \\ &= (2a)^2 (1 - \cos\theta) [(4\cos^3\theta - 3\cos\theta + 1) \\ &\quad + (-4\cos^3\theta + 3\cos\theta + 1)] .\end{aligned}$$

Simplificant l'expressió anterior:

$$\|\vec{v}(\theta)\|^2 = (2a)^2 (1 - \cos \theta) [2] = 16 a^2 \sin^2(\theta/2),$$

on: $\sin^2(\theta/2) = \frac{1 - \cos(2 \cdot \theta/2)}{2} \implies 1 - \cos \theta = 2 \sin^2(\theta/2).$

Per tant: $v(\theta) = \|\vec{v}(\theta)\| = 4a \sin(\theta/2).$

El vector tangent unitari és:

$$\begin{aligned}\vec{T}(\theta) &= \frac{\vec{v}(\theta)}{v(\theta)} = \frac{((2 \cos \theta - 1) \sin \theta, (1 - \cos \theta) (1 + 2 \cos \theta))}{2 \sin(\theta/2)} \\ &= ((2 \cos \theta - 1) \cos(\theta/2), \sin(\theta/2) (1 + 2 \cos \theta)),\end{aligned}$$

on usem $\sin \theta = \sin(2 \cdot \theta/2) = 2 \sin(\theta/2) \cos(\theta/2)$ i l'expressió anterior per $1 - \cos \theta$.

Calculem la curvatura amb signe usant la fórmula:

$$k(\theta) = \frac{\det(\gamma'(\theta), \gamma''(\theta))}{v(\theta)^3}.$$

$$\begin{aligned}\gamma'(\theta) &= 2a((2 \cos \theta - 1) \sin \theta, (1 - \cos \theta)(1 + 2 \cos \theta)), \\ \gamma''(\theta) &= 2a(-2 \sin^2 \theta + (2 \cos \theta - 1) \cos \theta, \\ &\quad \sin \theta (1 + 2 \cos \theta) + (1 - \cos \theta)(-2 \sin \theta)) \\ &= ((2 \cos \theta - 1) \cos \theta - 2 \sin^2 \theta, (4 \cos \theta - 1) \sin \theta).\end{aligned}$$

Per tant, $\Delta(\theta) = \det(\gamma'(\theta), \gamma''(\theta))$ és (treiem factor comú $2a$ de cadascuna de les columnes $\gamma'(\theta)$ i $\gamma''(\theta)$ del determinant):

$$\Delta(\theta) = 4a^2 \begin{vmatrix} (2 \cos \theta - 1) \sin \theta & (2 \cos \theta - 1) \cos \theta - 2 \sin^2 \theta \\ (1 - \cos \theta)(1 + 2 \cos \theta) & (4 \cos \theta - 1) \sin \theta \end{vmatrix}.$$

Per calcular el determinant usem $\sin^2 \theta = (1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta)$ per treure $2 - \cos \theta$ factor comú i, dins del parèntesis, agrupem els termes que tenen $2 \cos \theta - 1$ factor comú:

$$\Delta(\theta) = 4a^2 (1 - \cos \theta) [(2 \cos \theta - 1) F(\theta) + 2 \sin^2 \theta (2 + 2 \cos \theta)]$$

on

$$\begin{aligned}F(\theta) &= (4 \cos \theta - 1)(1 + \cos \theta) - \cos \theta (1 + 2 \cos \theta) \\ &= 2 \cos^2 \theta + 2 \cos \theta - 1.\end{aligned}$$

Per tant:

$$\begin{aligned}\Delta(\theta) &= 4 a^2 (1 - \cos \theta) [(2 \cos \theta - 1) (2 \cos^2 \theta + 2 \cos \theta - 1) \\ &\quad + 2 \sin^2 \theta (2 + 2 \cos \theta)] \\ &= 4 a^2 (1 - \cos \theta) [(4 \cos^3 \theta + 2 \cos^2 \theta - 4 \cos \theta + 1) \\ &\quad + (2 \sin^2 \theta + 4 \sin^2 \theta \cos \theta)] \\ &= 4 a^2 (1 - \cos \theta) [4 \cos \theta (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta - 1) \\ &\quad + 2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + 1] \\ &= 4 a^2 (1 - \cos \theta) [3] = 12 a^2 (1 - \cos \theta) = 24 a^2 \sin^2(\theta/2).\end{aligned}$$

Finalment:

$$k(\theta) = \frac{\det(\gamma'(\theta), \gamma''(\theta))}{v(\theta)^3} = \frac{\Delta(\theta)}{v(\theta)^3} = \frac{24 a^2 \sin^2(\theta/2)}{(4 a \sin(\theta/2))^3} = \frac{3}{8 a \sin(\theta/2)} > 0,$$

si $\theta \in (0, 2\pi)$. La curvatura és $\kappa(\theta) = |k(\theta)| = \frac{3}{8 a \sin(\theta/2)}$.

És clar que en el punt singular de la cardioide, per $\theta = 0$, és té:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \kappa(\theta) = +\infty.$$

Usant $v(\theta) = 4 a \sin(\theta/2)$ i $\kappa(\theta) = \frac{3}{8 a \sin(\theta/2)}$, l'acceleració tangencial escalar $a_T(\theta)$ i l'acceleració normal escalar $a_N(\theta)$, són:

$$a_T(\theta) = |v'(\theta)| = 2 a \cos(\theta/2),$$

$$a_N(\theta) = \kappa(\theta) v^2(\theta) = \frac{3}{8 a \sin(\theta/2)} (4 a \sin(\theta/2))^2 = 6 a \sin(\theta/2).$$