(13) Un avió ha de perdre alçada descrivint una corba helicoidal $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), bt)$, amb $b<0$ constant.

(i) És aquesta trajectòria de pendent constant?

Interpretem la "pendent" de $\gamma(t)$ com la tangent de l'angle format pels vectors $\dot\gamma(t)$ i la seva projecció ortogonal sobre el pla $z=0$. L'angle $\theta(t)$ compleix doncs:

$$\cos\theta(t) = \frac{\langle \dot\gamma(t), \Pi^{\perp}_{\{z=0\}}(\dot\gamma(t))\rangle}{\|\dot\gamma(t)\|\cdot\|\Pi^{\perp}_{\{z=0\}}(\dot\gamma(t))\|} =$$

$$= \frac{\langle(-\sin t, \cos t, b), (-\sin t, \cos t, 0)\rangle}{\sqrt{1+b^2}\cdot\sqrt{1}} = \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} \text{ const.}$$

Per tant, el pendent sí que és constant

(ii) Troben la velocitat escalar, acceleració tangencial i normal d'aquest moviment.

$\dot\gamma(t) = (-\sin(t), \cos(t), b)$,

$v(t) = \|\dot\gamma(t)\| = \sqrt{1+b^2}$ Velocitat escalar

$$\vec{T}(t) = \frac{\dot\gamma(t)}{\|\dot\gamma(t)\|} = \frac{(-\sin(t), \cos(t), b)}{\sqrt{1+b^2}} \text{ vector tangent unitari}$$

$\dot v(t) = 0$

$$\dot{\vec{T}}(t) = \frac{(-\cos(t), -\sin(t), 0)}{\sqrt{1+b^2}}$$

$\vec{a}_T(t) = \dot v(t)\vec{T}(t) = 0$ acceleració tangencial

$\vec{a}_N(t) = v(t)\dot{\vec{T}}(t) = (-\cos(t), -\sin(t), 0)$ acceleració normal

(que coincideix amb $\vec{a}(t) = \ddot\gamma(t)$) de mòdul 1 per tot t.

(iii) troben el triedre de Frenet d'aquesta corba. Si augmentem $|b|$ que fa la curvatura: creix o decreix?

Hem de calcular doncs $\{\vec{T}(t), \vec{N}(t), \vec{B}(t)\}$ (Vector tangent unitari, normal i binormal).

$$\dot{\gamma}(t) = (-\sin(t), \cos(t), b), \quad \|\dot{\gamma}(t)\| = \sqrt{1+b^2} = v(t)$$

$$\ddot{\gamma}(t) = (-\cos(t), -\sin(t), 0), \quad \dddot{\gamma}(t) = (\sin(t), -\cos(t), 0)$$

Així:

$$\vec{T}(t) = \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|} = \frac{(-\sin(t), \cos(t), b)}{\sqrt{1+b^2}}$$

$$\dot{\gamma}(t) \wedge \ddot{\gamma}(t) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\sin t & \cos t & b \\ -\cos t & -\sin t & 0 \end{vmatrix} = (b\sin(t), -b\cos(t), 1)$$

$$\|\dot{\gamma}(t) \wedge \ddot{\gamma}(t)\| = \sqrt{1+b^2}$$

$$\vec{B}(t) = \frac{\dot{\gamma}(t) \wedge \ddot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t) \wedge \ddot{\gamma}(t)\|} = \frac{(b\sin(t), -b\cos(t), 1)}{\sqrt{1+b^2}}$$

$$\vec{N}(t) = \vec{B}(t) \wedge \vec{T}(t) = \frac{1}{1+b^2} \begin{vmatrix} i & j & k \\ b\sin t & -b\cos t & 1 \\ -\sin t & \cos t & b \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{(1+b^2)} (-(1+b^2)\cos t, -(1+b^2)\sin t, 0) = (-\cos t, -\sin t, 0)$$

Finalment, calculem la curvatura $\kappa(t)$ i la torsió $\tau(t)$:

$$\kappa(t) = \frac{\|\dot{\gamma}(t) \wedge \ddot{\gamma}(t)\|}{(v(t))^3} = \frac{\sqrt{1+b^2}}{(\sqrt{1+b^2})^3} = \frac{1}{1+b^2} \quad \text{constant}$$

$$\vec{B}'(t) = \frac{(b\cos t, b\sin t, 0)}{\sqrt{1+b^2}}$$

$$\tau(t) = -\frac{\langle \vec{B}'(t), \vec{N}(t) \rangle}{v(t)} = -\frac{\left\langle \frac{(b\cos t, b\sin t, 0)}{\sqrt{1+b^2}}, (-\cos t, -\sin t, 0) \right\rangle}{\sqrt{1+b^2}} =$$

$$= -\frac{1}{1+b^2}(-b\cos^2 t - b\sin^2 t) = -\frac{b}{1+b^2}$$