(11) Tallem el cilindre $x^2+y^2=r^2$ $(0<r<1)$ amb un cilindre centrat més ample.

(i) Comprovar que la intersecció dels 2 cilindres és llisa, i parametritzeu-la a partir de les coordenades cilíndriques al cilindre estret.

Procedim com en el problema anterior (10). Les equacions implícites de la corba intersecció són ara

$f(x,y,z)=0$ i $g(x,y,z)=0$ on $f=x^2+y^2-r^2$, $g=x^2-y^2-1$.

Calculem:

$$\nabla f \wedge \nabla g = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2x & 2y & 0 \\ 2x & 0 & 2z \end{vmatrix} = 4(yz,-xz,-xy)$$

Per tant (com en el problema anterior), $\nabla f \wedge \nabla g = 0 \Leftrightarrow$ dues components de (x,y,z) són simultàniament zero.

De nou, si a més volem que $f=g=0$, l'únic cas possible és $y=z=0$. Però ara, $f(x,0,0)=0 \Leftrightarrow x=\pm r$ i $g(x,0,0)=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$ i en ésser $r\neq 1$ aquestes equacions no tenen ara cap solució. Per tant, tots els punts de la corba intersecció són llisos.

Expressem (x,y,z) en coord. cilíndriques $x=R\cos\theta$, $y=R\sin\theta$ i $z=z$, i ho substituïm en les equacions $f=g=0$. De $f=0$ obtenim $R=r$, i de $g=0$:

$(r\cos\theta)^2+z^2=1 \Rightarrow z=z_\pm(\theta)=\pm\sqrt{1-r^2\cos^2\theta}$

Per tant, les dues parametritzacions que obtenim ara són: $\gamma_\pm(\theta)=(r\cos\theta, r\sin\theta, \pm\sqrt{1-r^2\cos^2\theta})$, $\theta\in[0,2\pi]$

c(ii) És la intersecció plana?

Donat que tenim dues components per la corba intersecció, $\gamma_\pm(\theta)$, mirem si cadascuna per separat està o no continguda en un pla. La resposta és que ni $\gamma_+(\theta)$ ni $\gamma_-(\theta)$ ho estan. Per veure-ho (ens centrem en $\gamma_+(\theta)$) ho podem fer:

- <u>opció 1</u>: Calcular $\tau_+(\theta)$, la torsió de $\gamma_+(\theta)$. $\gamma_+(\theta)$ està continguda en un pla $\iff \tau_+(\theta) = 0$ arreu. Però el càlcul de $\tau_+(\theta)$ és dur, ja que involucra les derivades 1a, 2a i 3a de $\sqrt{1-r^2\cos\theta}$

- <u>opció 2</u>: Si triem 4 punts diferents de $\gamma_+(\theta)$ i veiem que no són coplanaris, llavors no pot ser que la corba sigui plana. P. ex., si el següent determinant és no nul la corba no és plana:

$$\det\left(\gamma_+(0)-\gamma_+\left(\tfrac{\pi}{2}\right), \gamma_+(\pi)-\gamma_+\left(\tfrac{\pi}{2}\right), \gamma_+\left(\tfrac{3\pi}{2}\right)-\gamma_+\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right)=$$

$$=\begin{vmatrix} r-0 & -r-0 & 0-0 \\ 0-r & 0-r & -r-r \\ \sqrt{1-r^2}-1 & \sqrt{1-r^2}-1 & 1-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r & -r & 0 \\ -r & -r & -2r \\ \sqrt{1-r^2}-1 & \sqrt{1-r^2}-1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= +2r \begin{vmatrix} r & -r \\ \sqrt{1-r^2}-1 & \sqrt{1-r^2}-1 \end{vmatrix} = 2r^2\left(\sqrt{1-r^2}-1\right)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 4r^2\left(\sqrt{1-r^2}-1\right) \neq 0.$$