(10) Dues canonades cilíndriques del mateix radi $r>0$ es tallen ortogonalment.

(i) Identifiqueu els punts singulars de la corba intersecció dels 2 cilindres $\underbrace{x^2+y^2=r^2}_{\text{cilindre circular d'eix } z \text{ i radi } r}$ i $\underbrace{x^2+z^2=r^2}_{\text{eix } y}$

Les equacions implícites de la corba són $f(x,y,z)=0$ i $g(x,y,z)=0$ on $f=x^2+y^2-r^2$ i $g=x^2+z^2-r^2$.
Com que els vectors $\nabla f$ i $\nabla g$ són ortogonals a la corba en cada punt, la condició de punt singular és que siguin proporcionals, és a dir, que $(\nabla f(x,y,z))\wedge(\nabla g(x,y,z))=0$ en $(x,y,z)$ punt de la corba (complint doncs $f(x,y,z)=g(x,y,z)=0$).

Fem:

$$\nabla f\wedge\nabla g=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2x & 2y & 0 \\ 2x & 0 & 2z\end{vmatrix}=4(yz,-xz,-xy)$$

Per tant $\nabla f\wedge\nabla g=0 \iff$ dues components de $(x,y,z)$ són simultàniament zero.

Si volem que a més $f=g=0$, aquestes dues components no poden ser mai $x=y=0$ ni $x=z=0$. Per tant, si $(x,y,z)$ és punt singular de la corba cal $y=z=0$ i $x^2=r^2 \iff x=\pm r$. Obtenim dos punts $P_\pm=(\pm r,0,0)$.

(ii) A partir de la parametrització en coord. cilíndriques del primer cilindre, trobeu dues parametritzacions t.q. les seves trajectòries recobreixin la corba intersecció dels cilindres. Representeu-les gràficament.

Si expressem $(x,y,z)$ en coord. cilíndriques $x=R\cos\theta$, $y=R\sin\theta$ i $z=z$, i ho substituïm en l'eq. $x^2+y^2=r^2$, obtenim l'equació $R^2=r^2 \Rightarrow R=r$. Si fem la mateixa substitució en l'eq. $x^2+z^2=r^2$ (tant $R=r$) obtenim l'eq.:

$(r\cos\theta)^2+z^2=r^2 \Rightarrow z^2=r^2(1-\cos^2\theta)=r^2\sin^2\theta$.

Per tant, podem expressar $z$ en funció de $\theta$ com. $z=z_\pm(\theta)=\pm r\sin\theta$. Les dues parametritzacions que busquem són doncs: $\gamma_\pm(\theta)=(r\cos\theta, r\sin\theta, \pm r\sin\theta)$, $\theta\in[0,2\pi]$. Pel dibuix, veure el darrer full.

(iii) Calculeu la curvatura i torsió de les dues corbes parametritzades. Són circumferències?

$\dot\gamma_\pm(\theta)=(-r\sin\theta, r\cos\theta, \pm r\cos\theta)$

$\ddot\gamma_\pm(\theta)=(-r\cos\theta, -r\sin\theta, \mp r\sin\theta)$

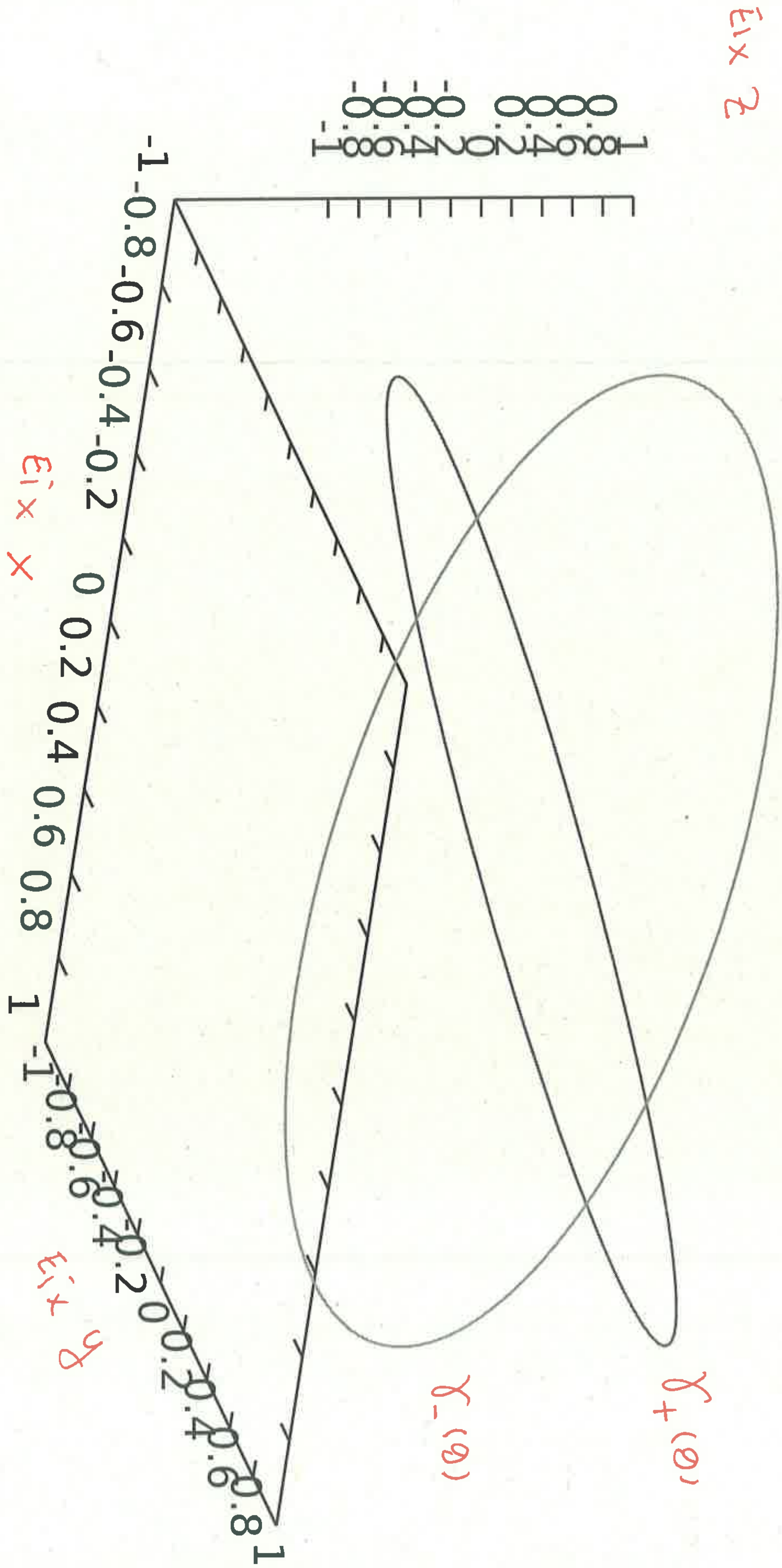
$v_\pm(\theta)=\|\dot\gamma_\pm(\theta)\|=\sqrt{r^2\sin^2\theta+2r^2\cos^2\theta}=r\sqrt{1+\cos^2\theta}$

$$\dot\gamma_\pm(\theta)\wedge\ddot\gamma_\pm(\theta)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & \pm r\cos\theta \\ -r\cos\theta & -r\sin\theta & \mp r\sin\theta\end{vmatrix}=(0,\mp r^2, r^2)$$

$\|\dot\gamma_\pm(\theta)\wedge\ddot\gamma_\pm(\theta)\|=r^2\sqrt{2}$

$$\kappa_\pm(\theta)=\frac{\|\dot\gamma_\pm(\theta)\wedge\ddot\gamma_\pm(\theta)\|}{v_\pm(\theta)^3}=\frac{\sqrt{2}}{r(1+\cos^2\theta)^{3/2}}$$ curvatura no constant i per tant $\gamma_\pm(\theta)$ no són circumferències.

En canvi, és clar que la corba $\gamma_+(\theta)$ viu en el pla $y=z$ i $\gamma_-(\theta)$ en el pla $y=-z$. En ser corbes planes la seva torsió ha de ser $\tau_\pm(\theta)=0$


Eix z
Eix x
Eix y
γ+(θ)
γ-(θ)