(8) Considereu la corba definida per $\gamma(u) = \left(u, 1+\frac{1}{u}, \frac{1}{u}-u\right)$, $u>0$. Proveu que és plana i determineu el pla que la conté.

Per teoria sabem que $\gamma(u)$ és una corba plana $\iff$ la seva torsió $\tau(u)=0$ per a tot $u>0$.

$\dot\gamma(u) = (1, -1/u^2, -1/u^2-1)$, $\ddot\gamma(u) = (0, 2/u^3, 2/u^3)$,

$\dddot\gamma(u) = (0, -6/u^4, -6/u^4)$. Llavors:

$$\tau(u) = \frac{\det(\dot\gamma(u), \ddot\gamma(u), \dddot\gamma(u))}{\|\dot\gamma(u)\wedge\ddot\gamma(u)\|} = \frac{1}{\|\dot\gamma(u)\wedge\ddot\gamma(u)\|}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/u^2 & 2/u^3 & -6/u^4 \\ -\frac{1}{u^2}-1 & 2/u^3 & -6/u^4 \end{vmatrix} = 0$$

columnes l.d.

(observem que

$$\dot\gamma(u)\wedge\ddot\gamma(u) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1/u^2 & -1/u^2-1 \\ 0 & 2/u^3 & 2/u^3 \end{vmatrix} = \frac{(2,-2,2)}{u^3} \neq (0,0,0))$$

Busquem el pla que conté $\gamma(u)$ com $a\cdot x + by + cz = d$ on volem a, b, c, d valors independents de la variable u. Obtenim l'equació:

$$a\cdot u + b\left(1+\frac{1}{u}\right) + c\left(\frac{1}{u}-u\right) = d$$

Si igualem els coeficients de u, $1/u$ i de la part que no depèn de u obtenim les equacions:

$$\left.\begin{aligned} a - c &= 0 \\ b + c &= 0 \\ b &= d \end{aligned}\right\}$$

Fent $c=1 \Rightarrow a=1, b=-1, d=-1$

El pla és: $x - y + z = -1$