

Geometria

Tema 6: Varietats parametritzades

Presentació adaptada per Jordi Villanueva a partir de la d'en Joaquim Puig (Creative Commons BY-SA-NC-ND).
Veieu la web de l'assignatura per a més informació.

22 de novembre de 2020

Corbes parametritzades

Definició

Una *corba parametritzada* C és la imatge d'un interval $I \subset \mathbb{R}$ per una aplicació $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathcal{C}^1$, injectiva (o almenys localment injectiva per permetre C corba tancada o amb auto-interseccions). L'aplicació γ s'anomena *una parametrització* de C .

Comentaris:

- ▶ La corba C com objecte geomètric és $C = \gamma(I)$.
- ▶ C admet infinites parametritzacions.
- ▶ Fent un petit abús de notació, escriurem:
 - ▶ Si $n = 2$ (corba plana): $\gamma(t) = (x(t), y(t))$.
 - ▶ Si $n = 3$ (corba de l'espai): $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$.

Parametritzacions regulars: Definició

Definició

Una parametrització γ d'una corba C és *regular* en t_0 si $\dot{\gamma}(t_0) \neq \vec{0}$. Si γ és regular en t_0 aleshores la recta tangent en $P = \gamma(t_0)$ és $T_P C = P + [\dot{\gamma}(t_0)]$ i l'hiperplà normal és $N_P C = P + [\dot{\gamma}(t_0)]^\perp$. En cas contrari, si $\dot{\gamma}(t_0) = \vec{0}$, direm que γ és singular en t_0 .

Comentaris:

- ▶ Direm que γ és regular si ho és $\forall t \in I$.
- ▶ La notació $\dot{\gamma}(t_0) = \gamma'(t_0)$ és molt usual en física per indicar derivada respecte del temps ($\dot{\gamma}(t_0)$ és el vector velocitat en $\gamma(t_0)$ si recorrem C segons la parametrització donada per γ).
- ▶ Si $P \in C$ és un punt llis, hi ha parametritzacions que són regulars en P i d'altres que no ho són. Però hi ha punts de corbes (p.ex. els vèrtexs d'un quadrat) que de per sí són “singulars” i on mai hi trobarem una parametrització regular en aquests punts.

Parametritzacions regulars: Exemples

- ▶ C cercle de radi $R > 0$ i centre (a, b) a $\mathbb{R}^2$ parametritzat per:

$$\gamma(t) = (a + R \cos t, b + R \sin t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

- ▶ C hèlice/hèlix a $\mathbb{R}^3$ d'eix z i radi $a > 0$ parametritzada per:

$$\gamma(t) = (a \cos(t), a \sin(t), b t), \quad t \in \mathbb{R}, a, b > 0.$$

- ▶ $C = \text{graf}(h)$ gràfica d'una funció $h : I \rightarrow \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$, $I \subset \mathbb{R}$ interval, és una corba plana parametritzada per:

$$\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$x \mapsto \gamma(x) = (x, h(x))$$

Si $P = (x_0, h(x_0)) \in C$ tenim $\gamma'(x_0) = (1, h'(x_0)) \neq (0, 0)$ i tots els seus punts són llisos. Per tant:

$$T_P C = P + [(1, h'(x_0))], \quad N_P C = P + [(-h'(x_0), 1)].$$

(C també és la corba implícita d'equació $f(x, y) = 0$ amb $f(x, y) = y - h(x)$.)

Problema 5

La *tractriu* és la corba que fa un gos que vol agafar un os situat en un punt fixat i és arrossegat pel seu amo que camina al llarg d'una línia recta. La tractriu admet la parametrització:

$$\alpha(t) = \left(\sin t, \cos t + \log \left(\tan \left(\frac{t}{2} \right) \right) \right), \quad t \in (0, \pi).$$

1. Proveu que és una corba regular excepte en $t = \pi/2$.
2. Proveu que el segment determinat per un punt de la corba i la intersecció de la seva recta tangent amb l'eix y té longitud 1 (és a dir, que la corretja no és de les extensibles!).

$$\alpha(t) = \left(\sin t, \cos t + \log \left(\tan \left(\frac{t}{2} \right) \right) \right),$$

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= \left(\cos t, -\sin t + \frac{1}{\tan(t/2)} \cdot \frac{1/2}{\cos^2(t/2)} \right) \\ &= \left(\cos t, -\sin t + \frac{1}{2 \sin(t/2) \cdot \cos(t/2)} \right) \\ &= \left(\cos t, -\sin t + \frac{1}{\sin t} \right) = \left(\cos t, \frac{1 - \sin^2 t}{\sin t} \right) \\ &= \left(\cos t, \frac{\cos^2 t}{\sin t} \right) = \left(\cos t, \frac{\cos t}{\tan t} \right). \end{aligned}$$

D'aquí $\alpha'(t) = (0, 0) \iff \cos t = 0 \iff t = \pi/2 \in (0, \pi)$.

Per tant, la parametrització només és singular si $t = \pi/2$ i regular per a tots els altres $t \in (0, \pi)$.

La forma paramètrica de la recta tangent a la corba en el punt $\alpha(t)$ és (el paràmetre de la recta és λ):

$$\begin{aligned}(x, y) &= \alpha(t) + \lambda \alpha'(t) \\ &= (\sin t + \lambda \cos t, \cos t + \log(\tan(t/2)) + \lambda \cos t / \tan t).\end{aligned}$$

Si volem l'intersecció d'aquesta recta amb l'eix y cal fer $x = 0$:

$$\sin t + \lambda \cos t = 0 \iff \lambda = -\sin t / \cos t = -\tan t.$$

Per aquest λ , obtenim $\beta(t) = (0, \log(\tan(t/2)))$ com a punt d'intersecció. Finalment:

$$d(\alpha(t), \beta(t)) = \|\alpha(t) - \beta(t)\| = \|(\sin t, \cos t)\| = 1.$$

Problema 4

Proveu que per l'hèlice $\gamma(t) = (a \cos t, a \sin t, b t)$, $a, b > 0$, el pendent de la recta tangent en tots els seus punts és el mateix.

- Per una funció d'una variable, el pendent de la recta tangent a la gràfica $y = f(x)$ en un punt (x_0, y_0) , amb $y_0 = f(x_0)$, ve donat per $f'(x_0)$. Geomètricament, $f'(x_0) = \tan \alpha$, on α dona la l'angle que la recta tangent forma amb l'eix x .
- Per una corba $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ de $\mathbb{R}^3$, definim el seu pendent en un punt $\gamma(t_0)$ de la corba com la tangent de l'angle $\alpha(t)$ format pel vector $\gamma'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$, tangent a la corba en $\gamma(t_0)$, i la projecció ortogonal d'aquest vector en el pla $z = 0$, que ve donada per $\Pi_{\{z=0\}}(\gamma'(t_0)) = (x'(t_0), y'(t_0), 0)$.
- Pel cas de l'hèlix:

$$\gamma'(t) = (-a \sin(t), a \cos(t), b), \quad \Pi_{\{z=0\}}(\gamma'(t)) = (-a \sin(t), a \cos(t), 0)$$

Ara veurem que $\cos \alpha(t)$ és constant i, per tant, $\alpha(t)$ és constant:

$$\cos \alpha(t) = \frac{\langle \gamma'(t), \Pi_{\{z=0\}}(\gamma'(t)) \rangle}{\|\gamma'(t)\| \cdot \|\Pi_{\{z=0\}}(\gamma'(t))\|} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot a} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Relació corba implícita amb paramètrica a $\mathbb{R}^2$

- ▶ Via el teorema de la funció implícita, una corba plana C definida implícitament per $f(x, y) = 0$ es pot representar com una corba parametritzada al voltant de tot punt $P \in C$ llis.
- ▶ De fet, si $P \in C$ és llis: $f(P) = 0$ i $f_x(P) \neq 0$ o bé $f_y(P) \neq 0$.
- ▶ Si $f_y(P) \neq 0$, via el teorema de la funció implícita podem fer servir la variable x com a paràmetre i aïllar $y = y(x)$ solució de $f(x, y) = 0$ localment entorn de P .
- ▶ Així, si $f_y(P) \neq 0$, entorn de P tenim que $\gamma(x) = (x, y(x))$ és una parametrització regular de C com a graf.
- ▶ Si $f_x(P) \neq 0$ llavors podem intercanviar els papers de x i y i tenim que $\gamma(y) = (x(y), y)$.

Problema 7

Sigui C la corba amb equació $x^2 - 3xy + 3y^2 + x - 2y - 1 = 0$. En quins punts podem parametritzar-la posant y com a funció de x ?

Per parametritzar $C = \{f(x, y) = 0\}$ com $y = y(x)$ localment entorn $P = (x, y) \in C$ ens cal poder aplicar el teorema de la funció implícita en P . Les condicions del teorema són:

$$f(P) = 0, \quad f_y(P) \neq 0.$$

Per tant, si volem els punts $P \in C$ on el teorema de la funció implícita **no** es pot aplicar, cal que P compleixi:

$$f(P) = 0, \quad f_y(P) = 0.$$

En aquest cas, $f(x, y) = x^2 - 3xy + 3y^2 + x - 2y - 1 = 0$ i obtenim les equacions:

$$f = x^2 - 3xy + 3y^2 + x - 2y - 1 = 0, \quad f_y = -3x + 6y - 2 = 0.$$

Via la 2a. equació aïllem $x = 2y - 2/3$ i ho substituïm a la 1a.:

$$\left(2y - \frac{2}{3}\right)^2 - 3\left(2y - \frac{2}{3}\right)y + 3y^2 + \left(2y - \frac{2}{3}\right) - 2y - 1 = 0.$$

Operant obtenim els següents valors per y :

$$y^2 - \frac{2}{3}y - \frac{11}{9} = 0 \iff y = \frac{2/3 \pm \sqrt{48/9}}{2} = \frac{1}{3} \pm 2\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

D'aquí que els punts on no podem parametritzar $y = y(x)$ són:

$$\left(\pm \frac{4}{3}\sqrt{3}, \frac{1}{3} \pm 2\frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

Còniques

- ▶ Les *còniques* són les corbes a $\mathbb{R}^2$ amb equació implícita $f(x, y) = 0$, on $f(x, y)$ és un polinomi de grau 2.
- ▶ Veurem que també són corbes parametritzades.
- ▶ S'anomenen així perquè s'obtenen fent seccions de la superfície d'un con a $\mathbb{R}^3$ per un pla.
- ▶ Hi ha tres tipus bàsics: el·lipse (en particular circumferència), paràbola i hipèrbola.
- ▶ El tipus de cònica es preserva si li fem un moviment/canvi de referència ortonormal. A més, tots els elements característics de la cònica es mouen d'acord amb el moviment aplicat. (P.ex., si apliquem un moviment a una el·lipse, els focus de l'el·lipse transformada s'obtenen “movent” els de l'el·lipse original.)

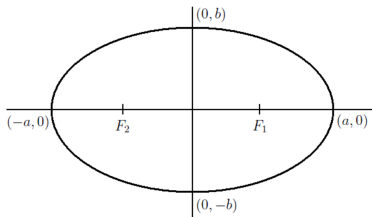
L'El·lipse I

- En certa referència ortonormal adaptada té equació implícita

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a, b > 0$$

i admet una parametrització regular

$$\gamma(\theta) = (a \cos \theta, b \sin \theta), \quad \theta \in [0, 2\pi]$$



L'El·lipse II

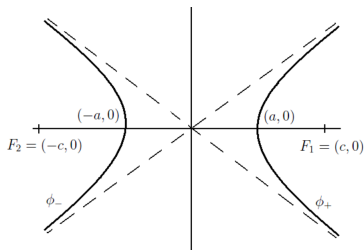
Propietats de l'el·lipse C en la seva forma normalitzada:

- ▶ Si $a = b$, C és una circumferència de radi a i centre $(0, 0)$.
- ▶ El punt $(0, 0)$ és el *centre* de simetria de C i els eixos x , y són les rectes de simetria de C .
- ▶ Si $a > b$, l'*eix major* és la recta $y = 0$ i l'*eix menor* és $x = 0$ (si $a < b$, al revés).
- ▶ Els *focus* de C són els punts F_1 i F_2 de l'eix major:
 - ▶ $F_1 = (c, 0)$, $F_2 = (-c, 0)$, on $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ si $a > b$.
 - ▶ $F_1 = (0, c)$, $F_2 = (0, -c)$, $c = \sqrt{b^2 - a^2}$ si $a < b$.
- ▶ Un punt $P \in \mathbb{R}^2$ és de $C \Leftrightarrow d(P, F_1) + d(P, F_2) = \text{const}$, on $\text{const} = 2a$ si $a > b$ i $\text{const} = 2b$ si $a < b$. (Suma distàncies de P als focus és constant.)

La hipèrbola I

- En certa referència ortonormal adaptada té equació implícita

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a, b > 0.$$



La hipèrbola II

- ▶ Com s'observa a la figura, la hipèrbola té dues *branques*: ϕ_+ la formada pels punts amb $x > 0$ i ϕ_- la formada pels punts amb $x < 0$.
- ▶ Les branques positiva i negativa admeten parametritzacions respectives

$$\phi_+(t) = (a \cosh(t), b \sinh(t))$$

$$\phi_-(t) = (-a \cosh(t), b \sinh(t))$$

Totes dues parametritzacions tenen domini $t \in \mathbb{R}$.

Recordem que les funcions cosinus i sinus hiperbòlic:

$$\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad \sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2},$$

compleixen $\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$.

La hipèrbola III

Propietats de la hipèrbola en la seva forma normalitzada:

- ▶ Quan $x \rightarrow \pm\infty$, les branques $\phi_{\pm}$ de la hipèrbola tendeixen cap a les *rectes asíptotes* $\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0$.
- ▶ Definim els *focus* de la hipèrbola com els punts $F_1 = (c, 0)$ i $F_2 = (-c, 0)$, on $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- ▶ El *centre* simetria de la hipèrbola és el $(0, 0)$, que és el punt mig dels focus i coincideix amb el punt d'intersecció de les rectes asíptotes.
- ▶ Per tant, un punt $P \in \mathbb{R}^2$ és de la hipèrbola $\Leftrightarrow$

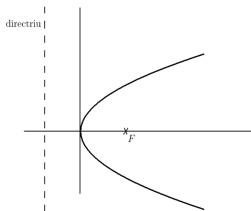
$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a.$$

(Valor absolut diferència distàncies de P als focus constant.)

La paràbola I

- ▶ En certa referència ortonormal adaptada, té equació implícita

$$y^2 = 2px, \quad p \neq 0.$$



(o intercanviant els eixos, l'equació queda $x^2 = 2py$).

- ▶ La paràbola, en la forma $y^2 = 2px$, admet la parametrització regular: $\phi(y) = \left(\frac{y^2}{2p}, y \right)$, per $y \in \mathbb{R}$.

La paràbola II

Propietats paràbola C en la forma normalitzada $y^2 = 2px$:

- ▶ El *focus* de C és $F = \left(\frac{p}{2}, 0\right)$.
- ▶ La *directriu* de C és la recta $x = -\frac{p}{2}$.
- ▶ L'eix de C és la recta OX .
- ▶ El vèrtex de C és el $(0, 0)$ (tall de l'eix amb C).
- ▶ Un punt $P \in \mathbb{R}^2$ és de $C \Leftrightarrow d(P, F) = d(P, \text{directriu})$.
(Distància P al focus igual a la distància P a la directriu.)
- ▶ Si un raig de llum incideix en C seguint la direcció $(-1, 0)$, llavors el raig reflectit sempre passa pel focus F .

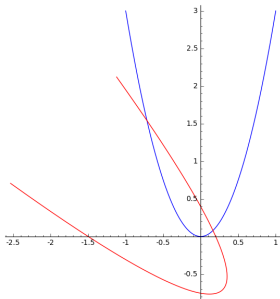
Observació

Per la paràbola en la forma $x^2 = 2py$, el focus és $F = \left(0, \frac{p}{2}\right)$, la directriu és $y = -\frac{p}{2}$, l'eix és OY i el vèrtex és $(0, 0)$.

Problema 12 I

Problema 12

A la paràbola $y = 3x^2$ li fem un gir de centre $(1, 0)$ i angle $\pi/4$. Troba el vèrtex, eix i focus de la nova paràbola.



Problema 12 II

- ▶ La paràbola $y = 3x^2$ és de la forma $x^2 = 2py$ amb $p = 1/6$. Per tant, el vèrtex és $V = (0,0)$, el focus és $F = (0, 1/12)$, l'eix la recta $x = 0$ i la directriu és la recta $y = -1/12$.
- ▶ Els elements de la paràbola es giren segons el moviment (gir) $G(x, y)$ de l'enunciat, que té com isometria $g(x, y)$ associada la rotació de centre $(0,0)$ i angle $\pi/4$ i com a punt fix el centre del gir $p = (1, 0)$.
- ▶ Usant la fórmula $G(q) = p + g(q - p)$ amb $q = (x, y)$, s'obté:

$$G(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\pi/4) & -\sin(\pi/4) \\ \sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) \end{pmatrix}}_{\text{matriu isometria associada}} \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 0 \end{pmatrix},$$

d'on obtenim les equacions:

$$G(x, y) = \left(1 + \frac{1}{2} \sqrt{2}(x - 1) - \frac{1}{2} \sqrt{2}y, \frac{1}{2} \sqrt{2}(x - 1) + \frac{1}{2} \sqrt{2}y \right).$$

Problema 12 III

- ▶ El nou focus i el nou vèrtex són:

$$G(F) = f(0, 1/12) = \left(1 - \frac{13\sqrt{2}}{24}, -\frac{11\sqrt{2}}{24}\right),$$

$$G(V) = f(0, 0) = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

- ▶ Per obtenir el nou eix i la nova directriu cal transformar els seus vectors directors $((0, 1)$ i $(1, 0)$, resp.) multiplicant-los per la matriu de la isometria associada al gir:

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Problema 12 IV

- Com que el vèrtex pertany a l'eix, llavors el nou eix és:

$$\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + [(-1, 1)].$$

- Per obtenir la nova directriu cal transformar per G un punt sobre la directriu de la paràbola abans del gir, $y = -1/12$.
P.ex.:

$$G(0, -1/12) = \left(1 - \frac{11\sqrt{2}}{24}, -\frac{13\sqrt{2}}{24}\right),$$

Finalment, la nova directriu és:

$$\left(1 - \frac{11\sqrt{2}}{24}, -\frac{13\sqrt{2}}{24}\right) + [(1, 1)].$$

Problema 12 V

- ▶ També podem plantejar el càlcul de l'equació de la paràbola després del gir: si (x, y) verifica l'equació de la paràbola i calculem $(\bar{x}, \bar{y}) = G(x, y)$ aplicant el gir a (x, y) , quina és l'equació que verifiquen $(\bar{x}, \bar{y})$?
- ▶ Si tornem a l'expressió vectorial de $G(x, y)$, tenim:

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - 1 \\ y \end{pmatrix}.$$

Usant que la matriu de la isomètria és ortogonal i per tant la seva inversa és la seva transposta tenim:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} - 1 \\ \bar{y} \end{pmatrix}$$

Problema 12 VI

- Hem obtingut la següent expressió per les variables originals (x, y) en termes de les noves $(\bar{x}, \bar{y})$:

$$x = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}(\bar{x} - 1) + \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{y}, \quad y = -\frac{\sqrt{2}}{2}(\bar{x} - 1) + \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{y}.$$

- Finalment, com que l'equació que verifica la paràbola abans del gir (en termes de (x, y)) és $y = 3x^2$, llavors l'equació de la paràbola girada és:

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}(\bar{x} - 1) + \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{y} = 3 \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}(\bar{x} - 1) + \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{y} \right)^2.$$

No desenvolupem ni operem perquè no es simplifica res!

Problema 13

Donada l'el·lipse $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ en referència natural, considerem $\mathbf{R} = \left\{ P = (-4, 2); u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}} \right), u_2 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right) \right\}$ una nova referència ortonormal. Doneu l'equació de l'el·lipse en les coordenades $\bar{x}, \bar{y}$ associades a $\mathbf{R}$.

Denotem per $\mathbf{e} = \{O; e_1, e_2\}$ la referència natural/canònica de $\mathbb{R}^2$. La matriu del canvi de referència és:

$$A_{\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{e}} = \left(\begin{array}{cc|c} M_{\{u_i\} \rightarrow \{e_j\}} & & (P)_{\mathbf{e}} \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & -4 \\ -2 & 1 & 2 \\ \frac{\sqrt{5}}{0} & \frac{\sqrt{5}}{0} & 1 \end{pmatrix},$$

on $M_{\{u_i\} \rightarrow \{e_j\}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -2 & 1 \\ \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} & \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ és la matriu que té per columnes les components de u_1, u_2 en base canònica i $(P)_{\mathbf{e}} = (-4, 1)$ són les coordenades del punt P en referència canònica.

La relació entre coordenades és:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = A_{R \rightarrow e} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ 1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = -4 + \frac{1}{\sqrt{5}} \bar{x} + \frac{2}{\sqrt{5}} \bar{y} \\ y = 2 - \frac{2}{\sqrt{5}} \bar{x} + \frac{1}{\sqrt{5}} \bar{y} \end{cases}$$

Substituint a l'equació de l'el·lipse:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{x^2}{4} + y^2 = \frac{1}{4} \left[-4 + \frac{1}{\sqrt{5}} \bar{x} + \frac{2}{\sqrt{5}} \bar{y} \right]^2 + \left[2 - \frac{2}{\sqrt{5}} \bar{x} + \frac{1}{\sqrt{5}} \bar{y} \right]^2 \\ &= \frac{1}{4} \left[16 + \frac{\bar{x}^2}{5} + \frac{4 \bar{x} \bar{y}}{5} + \frac{4 \bar{y}^2}{5} - \frac{8 \bar{x}}{\sqrt{5}} - \frac{16 \bar{y}}{\sqrt{5}} \right] \\ &\quad + \left[4 + \frac{4 \bar{x}^2}{5} - \frac{4 \bar{x} \bar{y}}{5} + \frac{\bar{y}^2}{5} - \frac{8 \bar{x}}{\sqrt{5}} + \frac{4 \bar{y}}{\sqrt{5}} \right] \\ &= 8 + \frac{17 \bar{x}^2}{20} - \frac{3 \bar{x} \bar{y}}{5} + \frac{2 \bar{y}^2}{5} - \frac{10 \bar{x}}{\sqrt{5}} + \frac{0 \bar{y}}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

Finalment:

$$7 + \frac{17 \bar{x}^2}{20} - \frac{3 \bar{x} \bar{y}}{5} + \frac{2 \bar{y}^2}{5} - \frac{10 \bar{x}}{\sqrt{5}} = 0.$$

Superfícies I

- ▶ Una *superfície parametritzada* S és la imatge $S = \varphi(U)$ d'una aplicació $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ (localment injectiva, $\mathcal{C}^1$, $U \subset \mathbb{R}^2$ obert):

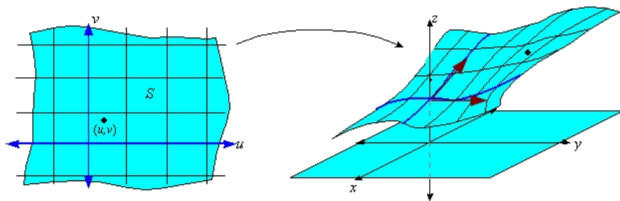
$$\begin{aligned}\varphi : \quad U &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto \varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)).\end{aligned}$$

- ▶ L'aplicació φ s'anomena *una parametrització* de S i és *regular* si $D\varphi$ té rang màxim = 2 en tots els seus punts.
- ▶ Si S és regular i $P = \varphi(u, v) \in S$, el pla tangent a S en P i la recta normal a S en P són:

$$T_P S = P + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right] = P + [\varphi_u(u, v), \varphi_v(u, v)],$$

$$N_P S = P + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right] = P + [\varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v)].$$

Superfícies II



- Si en l'expressió de $\varphi(u, v)$ fixem el valor de $v = v_0 = \text{const.}$ o el valor de $u = u_0 = \text{const.}$, obtenim les anomenades *corbes coordenades* de la superfície:

$$u \mapsto \varphi(u, v_0), \quad v \mapsto \varphi(u_0, v).$$

Aleshores, els vectors φ_u i φ_v són tangents a aquestes corbes en cada punt.

Exemple: Gràfica d'una funció

- ▶ Si $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ és de classe $\mathcal{C}^1$, el seu graf $S = \text{graf}(h)$ és una superfície regular de $\mathbb{R}^3$ parametritzada per:

$$\begin{aligned}\varphi : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\mapsto \varphi(x, y) = (x, y, h(x, y))\end{aligned}$$

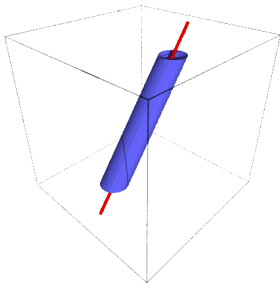
- ▶ En el punt $P = (x_0, y_0, h(x_0, y_0))$ de S , el pla tangent i la recta normal són:

$$\begin{aligned}T_P S &= P + [(1, 0, h_x(x_0, y_0)), (0, 1, h_y(x_0, y_0))], \\ N_P S &= P + [(-h_x(x_0, y_0), -h_y(x_0, y_0), 1)].\end{aligned}$$

- ▶ La projecció de $N_P S$ sobre el pla x, y indica les direccions de màxim pendent de pujada i màxim pendent de baixada en S (donades per $\nabla h(x_0, y_0)$ i $-\nabla h(x_0, y_0)$, respectivament).
- ▶ S és també la superfície implícita d'equació $f(x, y, z) = 0$ on $f(x, y, z) = z - h(x, y)$.

Exemple: Varietats implícites

- ▶ Si S és una superfície definida implícitament per l'equació $f(x, y, z) = 0$, S també és una superfície parametritzada localment al voltant de tot punt llis de S .
- ▶ La parametrització local ve donada pel graf d'una funció (per tant és regular en tots els punts).
- ▶ En efecte, sigui $S = \{f = 0\}$ i $P \in S$ un punt llis, verificant: $f(P) = 0$ i $\nabla f(P) = (f_x(P), f_y(P), f_z(P)) \neq (0, 0, 0)$.
- ▶ Si, p.ex., $f_z(P) \neq 0$, gràcies al teorema de la funció implícita podem aïllar $z = z(x, y)$ localment entorn de P com a solució de $f(x, y, z) = 0$. Per tant, en aquest cas S esdevé el graf de la funció de 2 variables $(x, y) \mapsto z(x, y)$.
- ▶ Si $f_z(P) = 0$, llavors $f_x(P) \neq 0$ permet aïllar $x = x(y, z)$ o bé $f_y(P) \neq 0$ permet aïllar $y = y(x, z)$.



Problema 25

Sigui S la superfície amb equació $(x + y - z)^2 + (x - y + z)^2 = 1$.

1. Vegeu que és una mena de tubería.
2. Comproveu que el punt $P = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$ és de la superfície i llis.
3. Podem parametritzar S posant $z = z(x, y)$ entorn al punt P ?
Calculeu $z(\frac{1}{2}, 0)$, $z_x(\frac{1}{2}, 0) = \frac{\partial z}{\partial x}(\frac{1}{2}, 0)$, $z_y(\frac{1}{2}, 0) = \frac{\partial z}{\partial y}(\frac{1}{2}, 0)$.
4. Doneu una equació paramètrica pel pla tangent a S en P .

1. Fent el canvi de coordenades (no ortogonal):

$$\bar{x} = x + y - z, \quad \bar{y} = x - y + z, \quad \bar{z} = z,$$

l'equació de la superfície S esdevé:

$$(x + y - z)^2 + (x - y + z)^2 = 1 \implies \boxed{\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = 1},$$

que, en coordenades $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, és un cilindre circular d'eix $\bar{z}$ i radi unitat. Com que el canvi que hem fet no es ortogonal, realment no és cert que la superfície S sigui una “canonada circular”, però sí que és una mena de cilindre al llarg de l'eix $\bar{x} = \bar{y} = 0$ que, en coordenades (x, y, z) , ve donat per

$$x + y - z = 0, y = x - y + z = 0.$$

2. Fent $f(x, y, z) = (x + y - z)^2 + (x - y + z)^2 - 1$, l'equació implícita de S és $f = 0$. Clarament, $P = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}) \in S$, ja que es compleix $f(P) = (\frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2} - 0 + \frac{1}{2})^2 - 1 = 0$. El gradient de f és $\nabla f = (f_x, f_y, f_z) = (4x, 4y - 4z, 4z - 4y)$, que en el punt P val $\nabla f(P) = (2, -2, 2) \neq (0, 0, 0) \implies P$ és un punt llis/regular de S .

3. Per parametritzar $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = 0\}$ com un graf de la forma $z = z(x, y)$ entorn d'un punt $P \in S$, és necessari que $f_z(P) \neq 0$ per tal de poder aplicar el teorema de la funció implícita. Com hem vist que $P = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}) \in S$ i $f_z(P) = 2$, efectivament podem aïllar z com a funció de (x, y) entorn de P a partir de l'equació de S . La funció $z = z(x, y)$ així obtinguda compleix $z(\frac{1}{2}, 0) = \frac{1}{2}$. A més, substituint $z = z(x, y)$ en l'equació de S és té:

$$(x + y - z(x, y))^2 + (x - y + z(x, y))^2 = 1.$$

Derivant aquest expressió respecte de x obtenim:

$$2(x + y - z(x, y)) \cdot (1 - z_x(x, y)) + 2(x - y + z(x, y)) \cdot (1 + z_x(x, y)) = 0.$$

$$\text{D'on: } z_x(x, y) = \frac{x}{y - z(x, y)} \implies z_x(\frac{1}{2}, 0) = \frac{\frac{1}{2}}{0 - \frac{1}{2}} = -1.$$

Ídem, és veu que $z_y(x, y)$ sempre és $= 1 \implies z_y(\frac{1}{2}, 0) = 1$.

4. L'equació paramètrica del pla tangent $T_P(S)$ és:
 $P + \lambda(1, 0, z_x(\frac{1}{2}, 0)) + \mu(0, 1, z_y(\frac{1}{2}, 0)) = (\frac{1}{2} + \lambda, \mu, \frac{1}{2} - \lambda + \mu).$

Exemple: l'esfera I

- ▶ $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ equació de l'esfera centre $(0, 0, 0)$ i radi R .
- ▶ L'esfera es pot parametritzar localment com a graf fent

$$z = z(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \quad (\text{hemisferi nord, } z > 0),$$

$$z = z(x, y) = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \quad (\text{hemisferi sud, } z < 0).$$

- ▶ El millor és parametritzar-la usant *coordenades esfèriques*:

$$\begin{aligned} [0, 2\pi) \times [-\pi/2, \pi/2] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\alpha, \beta) &\mapsto \varphi(\alpha, \beta) \end{aligned}$$

on: $\varphi(\alpha, \beta) = (R \cos \beta \cos \alpha, R \cos \beta \sin \alpha, R \sin \beta)$.

(Perquè φ sigui regular hem de considerar-la definida en el domini donat pels intervals oberts.)

Exemple: l'esfera II

- ▶ Els paràmetres α, β s'anomenen *longitud i latitud*, resp., i les corbes coordenades $\alpha = \alpha_0$ i $\beta = \beta_0$ s'anomenen *meridians i paral·lels*, respectivament. (Comentari: en termes geogràfics, la longitud α es pren en $(-\pi, \pi]$.)
- ▶ Fora de l'esfera de radi R , les *coordenades esfèriques* d'un punt (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ són els valors (ρ, α, β) complint:

$$\begin{aligned}\rho &\in [0, +\infty), & \alpha &\in [0, 2\pi), & \beta &\in [-\pi/2, \pi/2], \\ x &= \rho \cos \beta \cos \alpha, & y &= \rho \cos \beta \sin \alpha, & z &= \rho \sin \beta,\end{aligned}$$

donats per les fórmules:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \sin \beta = \frac{z}{\rho}, \quad \tan \alpha = \frac{y}{x},$$

on α t.q. $\text{signe}(\sin \alpha) = \text{signe}(y)$ i $\text{signe}(\cos \alpha) = \text{signe}(x)$.

Problema 26

Problema 26 (només pels punts P_2 i Q_1)

Passeu de coordenades rectangulars a esfèriques $P_2 = (x, y, z)$ i de coordenades esfèriques a rectangulars $Q_1 = (\rho, \alpha, \beta)$, donats per:

$$P_2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right), \quad Q_1 = \left(1, \frac{4\pi}{3}, -\frac{\pi}{4}\right).$$

$$\boxed{P_2:} \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1,$$

$$\sin \beta = \frac{z}{\rho} = \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2} \implies \beta = \frac{\pi}{6},$$

$$\tan \alpha = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{3}/(2\sqrt{2})}{-\sqrt{3}/(2\sqrt{2})} = -1 \implies \alpha = \frac{3\pi}{4} \quad (\sin \alpha > 0, \cos \alpha < 0).$$

$$\begin{aligned} \boxed{Q_1:} \quad (x, y, z) &= (\rho \cos \beta \cos \alpha, \rho \cos \beta \sin \alpha, \rho \sin \beta) \\ &= \left(1 \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right), 1 \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right), 1 \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= \left(1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right), 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right), -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{6}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{on: } \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) &= \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}, \\ \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) &= \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Problema 28

L'aeroport de Barcelona a El Prat es troba en les coordenades $41^{\circ}17'49'' N, 2^{\circ}4'42'' E$, i l'aeroport JFK de New York es troba en les coordenades $40^{\circ}38'23'' N, 73^{\circ}46'44'' W$. El radi mitjà de la Terra és de 6371km. Quina és la distància entre els dos aeroports?

En termes geogràfics, la longitud α es pren en $[-\pi, \pi)$ i s'expressa entre $180^{\circ}W$ i $180^{\circ}E$. La latitud $\beta \in (-\pi/2, \pi/2)$ s'expressa entre $90^{\circ}S$ i $90^{\circ}N$. En aquest cas tenim, en radians:

$$\alpha_{BCN} = \left(2 + \frac{4}{60} + \frac{42}{3600} \right)^{\circ} \approx 2.0783^{\circ} = 2.0783 \cdot \frac{\pi}{180} \approx 0.03627$$

$$\beta_{BCN} = \left(41 + \frac{17}{60} + \frac{49}{3600} \right)^{\circ} \approx 41.2969^{\circ} = 41.2969 \cdot \frac{\pi}{180} \approx 0.7208$$

$$\alpha_{NY} = - \left(73 + \frac{46}{60} + \frac{44}{3600} \right)^{\circ} \approx -73.779^{\circ} = -73.779 \cdot \frac{\pi}{180} \approx -1.2877$$

$$\beta_{NY} = \left(40 + \frac{38}{60} + \frac{23}{3600} \right)^{\circ} \approx 40.640^{\circ} = 40.640 \cdot \frac{\pi}{180} \approx 0.7093.$$

- Suposant la Terra esfèrica de radi $R = 6371\text{km}$, la distància entre BCN a NY és la longitud de l'arc de circumferència màxima centrat en el centre O de la Terra i que uneix BCN i NY .
- Per tant, la distància ve donada per $\theta \cdot R$, on θ és l'angle en radians format pels vectors $\vec{r}_{BCN} = \overrightarrow{O, BCN}$ i $\vec{r}_{NY} = \overrightarrow{O, NY}$.
- Usant ccordenades esfèriques:

$$\begin{aligned}\vec{r}_{BCN} &= R \cdot (\cos(\beta_{BCN}) \cdot \cos(\alpha_{BCN}), \cos(\beta_{BCN}) \cdot \sin(\alpha_{BCN}), \sin(\beta_{BCN})) \\ &\approx R \cdot (0.750805, 0.027246, 0.659962),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{r}_{NY} &= R \cdot (\cos(\beta_{NY}) \cdot \cos(\alpha_{NY}), \cos(\beta_{NY}) \cdot \sin(\alpha_{NY}), \sin(\beta_{NY})) \\ &\approx R \cdot (0.21197, -0.72861, 0.65130).\end{aligned}$$

- Obtenim el següent valor per θ en radians (el valor de R no afecta en el càlcul de θ):

$$\cos \theta = \frac{\langle \vec{r}_{BCN}, \vec{r}_{NY} \rangle}{\|\vec{r}_{BCN}\| \cdot \|\vec{r}_{NY}\|} \approx 0.56913 \implies \theta \approx \arccos(0.56913) \approx 0.96535.$$

- La distància és, aproximadament:

$$d(BCN, NY) \approx \theta \cdot R \approx 0.96535 \times 6371 \text{ km} \approx 6150.2 \text{ km}.$$

Exemple: Cilindre de revolució entorn d'un eix

- ▶ $x^2 + y^2 = R^2$ és l'equació del cilindre (infinit) d'eix z i radi R . Usant *coordenades cilíndriques* es pot parametritzar per

$$\varphi(\alpha, z) = (R \cos \alpha, R \sin \alpha, z), \quad \alpha \in [0, 2\pi), \quad z \in \mathbb{R}.$$

- ▶ Les *coordenades cilíndriques* d'un punt $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ genèric són els valors (ρ, α, z) tals que:

$$\begin{aligned} \rho &\in [0, +\infty), & \alpha &\in [0, 2\pi), & z &\in \mathbb{R}, \\ x &= \rho \cos \alpha, & y &= \rho \sin \alpha, & z &= z, \end{aligned}$$

donats per les fórmules:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan \alpha = \frac{y}{x},$$

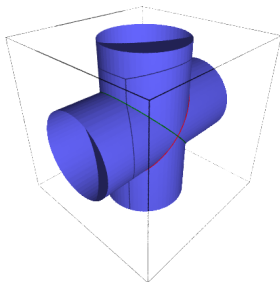
on α t.q. $\text{signe}(\sin \alpha) = \text{signe}(y)$ i $\text{signe}(\cos \alpha) = \text{signe}(x)$.

- ▶ (ρ, α) són les coordenades polars de la projecció ortogonal del punt P sobre el pla $z = 0$, i ρ és la seva distància a l'eix z .

Problemes 29 I

Problema 29

Considerem els cilindres de $\mathbb{R}^3$, $C_1 : x^2 + y^2 = 25$ i $C_2 : x^2 + z^2 = 25$. Useu coordenades cilíndriques en C_1 per parametritzar la corba $C_1 \cap C_2$.



Problemes 29 II

- Les coordenades cilíndriques són:

$$x = \rho \cos \alpha, \quad y = \rho \sin \alpha, \quad z = z, \quad \rho \in [0, \infty), \quad \alpha \in [0, 2\pi), \quad z \in \mathbb{R}.$$

- Si expressem $C_1 : x^2 + y^2 = 25$, $C_2 : x^2 + z^2 = 25$ en (ρ, α, z) :

$$C_1 : (\rho \cos \alpha)^2 + (\rho \sin \alpha)^2 = 25 \implies \rho^2 = 25 \implies \rho = 5,$$

$$C_2 : (\rho \cos \alpha)^2 + z^2 = 25 \implies z^2 = 25(1 - \cos^2 \alpha) = 25 \sin^2 \alpha.$$

- Podem doncs parametritzar ρ i z en funció de α :

$$\rho(\alpha) = 5, \quad z(\alpha) = \pm 5 \sin \alpha,$$

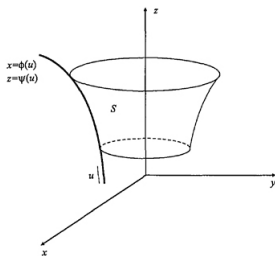
i obtenim dues corbes regulars:

$$\alpha \in [0, 2\pi] \mapsto (x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha)) = (5 \cos \alpha, 5 \sin \alpha, \pm 5 \sin \alpha).$$

Superfícies de revolució I

- ▶ Una superfície de revolució a $\mathbb{R}^3$ s'obté fent girar una corba plana al voltant d'un eix.
- ▶ Si triem l'eix en OZ i la corba que fem girar és una corba C en el pla x, z parametritzada per $u \mapsto \gamma(u) = (x(u), z(u))$, obtenim la superfície de revolució S parametritzada per:

$$\varphi(u, v) = (x(u) \cos v, x(u) \sin v, z(u)).$$



Superfícies de revolució II

- ▶ Si C corba continguda en el semi-plà $\{x > 0, y = 0, z \in \mathbb{R}\}$ i compleix l'equació implícita

$$f(x, z) = 0,$$

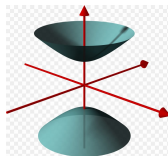
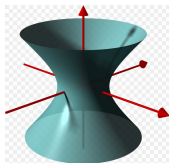
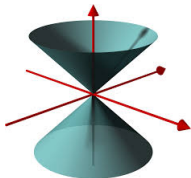
la superfície de revolució S ve definida l'equació implícita

$$f(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0.$$

- ▶ Observació: Si S s'obté fent girar una corba C en el pla y, z (enlloc del x, z) les fórmules anteriors s'adapten com segueix:
 - ▶ Si C parametritzada per $u \mapsto \gamma(u) = (y(u), z(u))$, llavors S parametritzada per $\varphi(u, v) = (y(u) \cos v, y(u) \sin v, z(u))$.
 - ▶ Si C continguda en el semi-plà $\{x = 0, y > 0, z \in \mathbb{R}\}$ compleix l'equació implícita $f(y, z) = 0$, llavors S ve definida per l'equació implícita $f(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$.

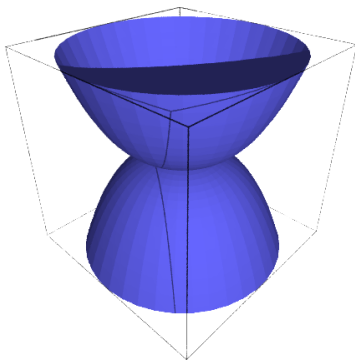
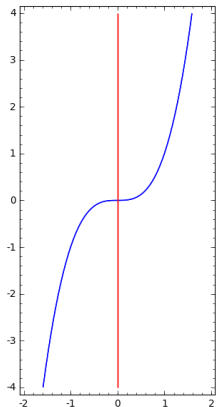
Exemples notables de superfícies de revolució

- ▶ L'esfera de centre $(0, 0, 0)$ i radi R : $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.
- ▶ El cilindre d'eix z i radi R : $x^2 + y^2 = R^2$.
- ▶ El con $x^2 + y^2 = z^2$.
- ▶ L'hiperboloide (d'un full) $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.
- ▶ L'hiperboloide (de dues fulles) $x^2 + y^2 - z^2 = -1$.
- ▶ El paraboloide $z = x^2 + y^2$.
- ▶ L'el·lipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $a, b, c > 0$, és de revolució entorn d'un eix si té dos *semi-eixos* de la mateixa longitud:
 - ▶ P.ex., si $a = b$, llavors és de revolució entorn de l'eix z .
 - ▶ P.ex., si $b = c$, llavors és de revolució entorn de l'eix x .



Exemple: Apartat 1 del problema 30 I

Fem girar la corba $z = y^3$ al voltant de l'eix OZ . Doneu una parametrització i una equació implícita de la superfície de revolució resultant. Té algun punt singular?



Exemple: Apartat 1 del problema 30 II

- ▶ La corba C és $z = y^3$ del pla y, z . La parametritzem com:

$$u \mapsto \gamma(u) = (y(u), z(u)) = (u, u^3), \quad u \in \mathbb{R},$$

on usem $y = u$ com a paràmetre.

- ▶ La superfície de revolució S està parametritzada per:

$$\varphi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u^3), \quad u \in \mathbb{R}, v \in [0, 2\pi].$$

- ▶ Els vectors derivades parcials d'aquesta parametrització són:

$$\varphi_u = (\cos v, \sin v, 3u^2), \quad \varphi_v = (-u \sin v, u \cos v, 0),$$

i el seu producte vectorial és:

$$\varphi_u \wedge \varphi_v = (-3u^3 \cos v, -3u^3 \sin v, u).$$

Exemple: Apartat 1 del problema 30 III

- ▶ $\varphi_u \wedge \varphi_v = (0, 0, 0) \iff u = 0$. Si fem $u = 0$ en $\varphi(u, v)$, dóna sempre el punt $(0, 0, 0)$ de S , per a qualsevol valor de v .
- ▶ Així, $(0, 0, 0)$ és l'únic punt singular de S i, si $u \neq 0$:
 $T_{\varphi(u,v)}S = \varphi(u, v) + [(\cos v, \sin v, 3u^2), (-\sin v, \cos v, 0)],$
 $N_{\varphi(u,v)}S = \varphi(u, v) + [(-3u^2 \cos v, -3u^2 \sin v, 1)].$
- ▶ Si volem l'equació implícita de S , ens cal l'equació de la corba $\tilde{C} : z = \pm y^3$ continguda en el semi-plà $\{x = 0, y > 0, z \in \mathbb{R}\}$, que en girar entorn de l'eix OZ genera S . Aquesta equació l'obtenim elevant al quadrat l'equació de $C : z = y^3$, ja que així els punts amb $z = -y^3$, $y > 0$, també la compleixen.
- ▶ L'equació implícita de S és:

$$\begin{aligned}\tilde{C} : z^2 - y^6 = 0 &\implies S : z^2 - (\sqrt{x^2 + y^2})^6 = 0 \\ &\implies S : z^2 - (x^2 + y^2)^3 = 0.\end{aligned}$$

Splines de Bézier I

- ▶ Les corbes que el disseny industrial usa cada cop més són els *splines*.
- ▶ Són corbes parametrizades però definides a trossos, per a que passin per punts especificats i/o tinguin direccions tangents especificades.
- ▶ Els splines de Bézier són un dels tipus de splines considerats (però no pas els únics).
- ▶ Els programes de disseny per ordinador moderns (com p.ex. SolidWorks) usen splines per fer passar corbes/superfícies per les posicions indicades des del ratolí.
- ▶ Podem usar la comanda `bspligui()` de Matlab per explorar-ho.

Splines de Bézier II

Definició

La *corba de Bézier cúbica* determinada per 4 punts de control $P_0, P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{R}^2$, i parametrizada per $t \in [0, 1]$, s'obté així:

$$\gamma(t) = m_0(t)P_0 + m_1(t)P_1 + m_2(t)P_2 + m_3(t)P_3,$$

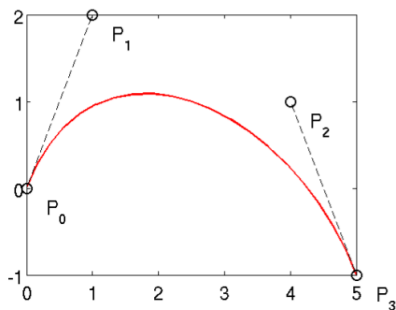
on:
$$\begin{aligned} m_0(t) &= (1-t)^3, & m_1(t) &= 3t(1-t)^2, \\ m_2(t) &= 3t^2(1-t), & m_3(t) &= t^3. \end{aligned}$$

$\gamma(t)$ compleix les propietats:

- ▶ $\gamma(t)$ és el baricentre P_0, P_1, P_2, P_3 amb pesos $m_0(t), m_1(t), m_2(t)$ i $m_3(t)$ que són tots positius i sumen 1.
- ▶ $\gamma(0) = P_0, \quad \gamma(1) = P_3.$
- ▶ $\dot{\gamma}(0) = 3\overrightarrow{P_0P_1} = 3(P_1 - P_0), \quad \dot{\gamma}(1) = 3\overrightarrow{P_2P_3} = 3(P_3 - P_2).$

Splines de Bézier III

Aquestes propietats volen dir que la corba $\gamma(t)$ passa pels punts de control P_0, P_3 , amb recta tangent $\overline{P_0P_1}, \overline{P_2P_3}$ respectivament. En canvi, la corba de Bézier *no* sol passar pels punts de control P_1, P_2 .



Corbes de Bézier en $[t_0, t_1]$

Una complicació necessària per enganxar 2 o més corbes de Bézier és que convé usar corbes de Bézier cúbiques *parametritzades per un interval de temps* $[t_0, t_1]$ *qualsevol*, enlloc de per $[0, 1]$. Per a fer això definim:

$$\gamma(t) = m_0(t)P_0 + m_1(t)P_1 + m_2(t)P_2 + m_3(t)P_3,$$

on els pesos en l'interval $[t_0, t_1]$ són:

$$\begin{aligned} m_0(t) &= \frac{(t_1 - t)^3}{(t_1 - t_0)^3}, & m_1(t) &= \frac{3(t - t_0)(t_1 - t)^2}{(t_1 - t_0)^3}, \\ m_2(t) &= \frac{3(t - t_0)^2(t_1 - t)}{(t_1 - t_0)^3}, & m_3(t) &= \frac{(t - t_0)^3}{(t_1 - t_0)^3}, \end{aligned}$$

que continuen sent positius i sumant 1. La nova corba de Bézier $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ verifica ara que:

$$\gamma(t_0) = P_0, \quad \gamma(t_1) = P_3, \quad \dot{\gamma}(t_0) = 3\overrightarrow{P_0P_1}, \quad \dot{\gamma}(t_1) = 3\overrightarrow{P_2P_3}.$$

Enganxant Splines I

Definició

Un *spline* és una corba parametritzada $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ que obtenim enganxant arcs de corba parametritzats:

$\gamma_1 : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma_2 : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\dots$, $\gamma_n : [t_{n-1}, t_n] \rightarrow \mathbb{R}^2$,
on $t_0 = a$ i $t_n = b$. El spline γ és un *spline cúbic de Bézier* si les corbes $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ que enganxem són corbes cúbiques de Bézier.

Per definir cada corba de Bézier cúbica γ_j calen 4 punts de control:

$$P_{j,0}, \quad P_{j,1}, \quad P_{j,2}, \quad P_{j,3}.$$

En principi podríem definir cada corba de Bézier cúbica $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ per 4 punts de control independents, però el que normalment volem és que el spline γ resultant sigui una corba contínua i llisa.

Enganxant Splines II

Proposició

Sigui γ l'spline cúbic de Bézier anterior, on cada γ_j està generat pels punts de control $P_{j,0}, P_{j,1}, P_{j,2}, P_{j,3}$, prenent $j = 1, \dots, n$.

- 1. γ és continu sí. el punt de control final de cada corba de Bézier, γ_j , és el punt de control inicial de la següent, γ_{j+1} :*

$$P_{j,3} = P_{j+1,0}, \quad \text{per } j = 1, 2, \dots, n-1.$$

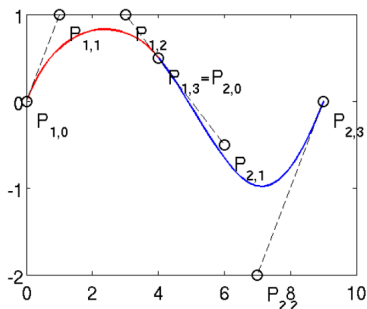
- 2. La corba $C = \gamma([a, b])$, parametritzada per $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, admet una parametrització $\mathcal{C}^1$ exactament quan els punts $P_{j,2}, P_{j,3} = P_{j+1,0}$ i $P_{j+1,1}$ estan alineats per $j = 1, \dots, n-1$, i apareixen en la recta amb $P_{j,3} = P_{j+1,0}$ al mig dels altres 2. (En general però, γ no és una parametrització $\mathcal{C}^1$ de C .)*

Exemple I

Sigui $\gamma : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ el spline de Bézier cúbic donat per 2 corbes
 $\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma_2 : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2$, amb punts de control

$$\gamma_1 : P_{1,0} = (0, 0), P_{1,1} = (1, 1), P_{1,2} = (3, 1), P_{1,3} = (4, 0.5)$$

$$\gamma_2 : P_{2,0} = (4, 0.5), P_{2,1} = (6, -0.5), P_{2,2} = (7, -2), P_{2,3} = (9, 0)$$



Exemple II

- ▶ Com $P_{1,3} = P_{2,0} = (4, 0.5)$ la corba $C = \gamma([0, 2])$ és contínua.
- ▶ Com veurem tot seguit, els punts $P_{1,2}$, $P_{1,3} = P_{2,0}$, $P_{2,1}$ estan alineats i $P_{1,3} = P_{2,0}$ està al mig dels altres dos. Per tant, la corba C admet parametrització $\mathcal{C}^1$.
- ▶ Considerem els vectors $\vec{v}_1 = \overrightarrow{P_{1,2}P_{1,3}}$ i $\vec{v}_2 = \overrightarrow{P_{2,0}P_{2,1}}$. Les afirmacions de dalt són equivalents a demanar:

$$\vec{v}_1 \parallel \vec{v}_2 \text{ (paral·lels)}, \quad \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle > 0 \text{ (tenen el mateix sentit)}.$$

En efecte:

$$\begin{aligned}\vec{v}_1 &= \overrightarrow{P_{1,2}P_{1,3}} = P_{1,3} - P_{1,2} = (4, 0.5) - (3, 1) = (1, -0.5), \\ \vec{v}_2 &= \overrightarrow{P_{2,0}P_{2,1}} = P_{2,1} - P_{2,0} = (6, -0.5) - (4, 0.5) = (2, -1),\end{aligned}$$

compleixen $\vec{v}_2 = 2\vec{v}_1$ (paral·lels) i $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = 2.5 > 0$.

Exemple III

- ▶ Així doncs, si pensem en la corba $C = \gamma([0, 2])$ com una corba implícita de $\mathbb{R}^2$, el punt $P_{1,3} = P_{2,0} = (4, 0.5)$ (punt d'enganx de γ_1 i γ_2) és un punt llis de C i la seva recta tangent és:
 $T_{P_{1,3}}C = (4, 0.5) + [(2, -1)]$
on podem triar com a vector director tant $\vec{v}_1$ com $\vec{v}_2$.
- ▶ Però, si bé $P_{1,3} = P_{2,0}$ és un punt llis de C , la parametrització γ donada per l'spline no és regular en el punt. Per una banda $\gamma_1(1) = P_{1,3} = P_{2,0} = \gamma_2(1)$ (continuitat), però per l'altra, usant les propietats de l'spline cúbic de Bézier:

$$\dot{\gamma}_1(1) = 3(P_{1,3} - P_{1,2}) = (3, -1.5), \quad (t = 1 \text{ és } t_1 \text{ per } \gamma_1)$$

$$\dot{\gamma}_2(1) = 3(P_{2,1} - P_{2,0}) = (6, -3), \quad (t = 1 \text{ és } t_0 \text{ per } \gamma_2)$$

que vol dir que les derivades de γ_1 i γ_2 no enganxen bé en aquest punt (són paral·leles, com toca, però diferents).

Exemple IV

Vegem, p.ex., el càlcul de $\dot{\gamma}_2(1)$.

- ▶ Usant que $\gamma_2 : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2$, tenim $t_0 = 1$ i $t_1 = 2$. Obtenim:

$$m_0(t) = \frac{(t_1 - t)^3}{(t_1 - t_0)^3} = (2 - t)^3,$$

$$m_1(t) = \frac{3(t - t_0)(t_1 - t)^2}{(t_1 - t_0)^3} = 3(2 - t)^2(t - 1),$$

$$m_2(t) = \frac{3(t - t_0)^2(t_1 - t)}{(t_1 - t_0)^3} = 3(2 - t)(t - 1)^2,$$

$$m_3(t) = \frac{(t - t_0)^3}{(t_1 - t_0)^3} = (t - 1)^3.$$

Exemple V

► Per tant:

$$\begin{aligned}\gamma_2(t) &= m_0(t)P_{2,0} + m_1(t)P_{2,1} + m_2(t)P_{2,2} + m_3(t)P_{2,3} \\ &= (2-t)^3P_{2,0} + 3(2-t)^2(t-1)P_{2,1} \\ &\quad + 3(2-t)(t-1)^2P_{2,2} + (t-1)^3P_{2,3},\end{aligned}$$

on els punts de control són $P_{2,0} = (4, 0.5)$, $P_{2,1} = (6, -0.5)$, $P_{2,2} = (7, -2)$, $P_{2,3} = (9, 0)$. Derivant $\gamma_2(t)$, obtenim:

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}_2(t) &= -3(2-t)^2P_{2,0} + 3(2-t)(4-3t)P_{2,1} \\ &\quad + 3(t-1)(5-3t)P_{2,2} + 3(t-1)^2P_{2,3}.\end{aligned}$$

Així, $\dot{\gamma}_2(1) = 3(P_{2,1} - P_{2,0})$, resultat que de fet ja sabem per les propietats de l'spline cúbic de Bézier.

Exemple VI

Però aquestes expressions explícites per $\gamma_2(t)$ i $\dot{\gamma}_2(t)$ ens permeten calcular, p.ex., la recta tangent $T_q C$, on $q = \gamma(1.2) = \gamma_2(1.2)$ (observem que ja que $t = 1.2 \in [1, 2]$, per aquest t aplica la fórmula de γ_2 i no pas la de γ_1). Fent $t = 1.2$ en:

$$\begin{aligned}\gamma_2(t) &= (2-t)^3(4, 0.5) + 3(2-t)^2(t-1)(6, -0.5) \\ &\quad + 3(2-t)(t-1)^2(7, -2) + (t-1)^3(9, 0), \\ \dot{\gamma}_2(t) &= -3(2-t)^2(4, 0.5) + 3(2-t)(4-3t)(6, -0.5) \\ &\quad + 3(t-1)(5-3t)(7, -2) + 3(t-1)^2(9, 0),\end{aligned}$$

obtenim $q = \gamma(1.2) = (5.096, -0.128)$ i $\dot{\gamma}(1.2) = (5.04, -3.12)$.
Per tant:

$$T_q C = (5.096, -0.128) + [(5.04, -3.12)].$$