(32) Els el·lipsoides paral·lels als eixos són superfícies d'eq.:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \quad a,b,c>0.$$

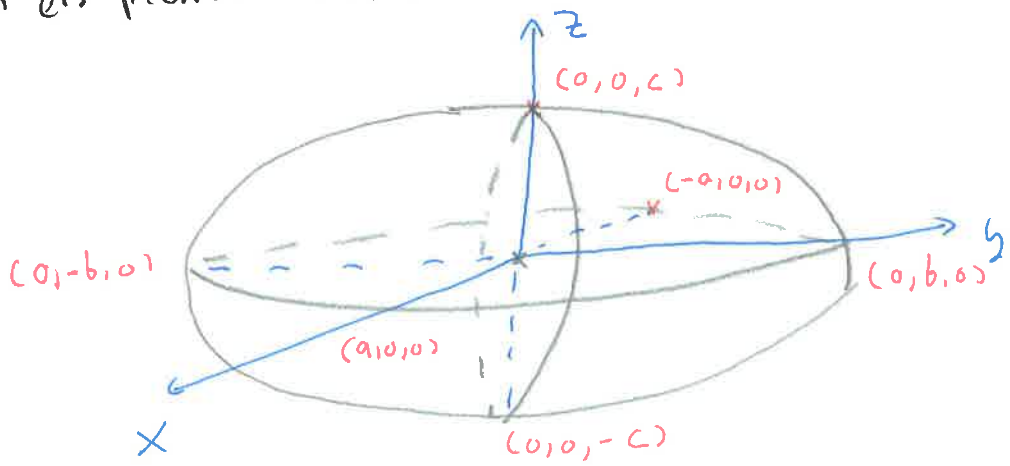
(i) Calculeu les corbes que s'obtenen tallant un d'aquests el·lipsoides amb plans $x=$ const, $y=$ const, $z=$ const. Reconeixeu aquestes corbes? Representeu gràficament la superfície. És compacta?

Si fem, p. ex., $z=$ const., llavors obtenim una corba plana que en termes de (x,y) verifica l'eq.:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-z^2/c^2 \Rightarrow \frac{x^2}{\left(a\sqrt{1-z^2/c^2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-z^2/c^2}\right)}=1$$

que té sentit si $z\in[-c,c]$ i que correspon a una el·lipse d'eixos x, y i semi-eixos donats per $a\sqrt{1-z^2/c^2}$ i $b\sqrt{1-z^2/c^2}$ (per $z=\pm c$ és el punt $(0,0)$).

Els altres talls $x=$ const i $y=$ const donen el·lipses en els plans (y,z) i (x,z), respectivament. Obtenim:



És clar que l'el·lipsoide és tancat i acotat i per tant és una superfície compacta.

(ii) A partir de les coord. esfèriques, deduïu una parametrització que cobreixi tot l'el·lipsoide amb la possible excepció d'alguns punts o corbes.

Fem la substitució $(x,y,z)=(\rho\cos\beta\cos\alpha, \rho\cos\beta\sin\alpha, \rho\sin\beta)$ en l'eq. de l'el·lipsoide i obtenim:

$$\rho^2 \underbrace{\left[\frac{\cos^2\beta\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{\cos^2\beta\sin^2\alpha}{b^2}+\frac{\sin^2\beta}{c^2}\right]}_{\overset{\shortparallel}{g(\alpha,\beta)}} = 1$$

d'on $\rho=\rho(\alpha,\beta)=1/\sqrt{g(\alpha,\beta)}$ sobre l'el·lipsoide.

Per tant, obtenim la parametrització:

$$\varphi(\alpha,\beta)=(\rho(\alpha,\beta)\cdot\cos\beta\cdot\cos\alpha, \rho(\alpha,\beta)\cos\beta\cdot\sin\alpha, \rho(\alpha,\beta)\sin\beta).$$