(31) Anomenem hiperboloide d'un full a les superfície amb equació (normalitzada):

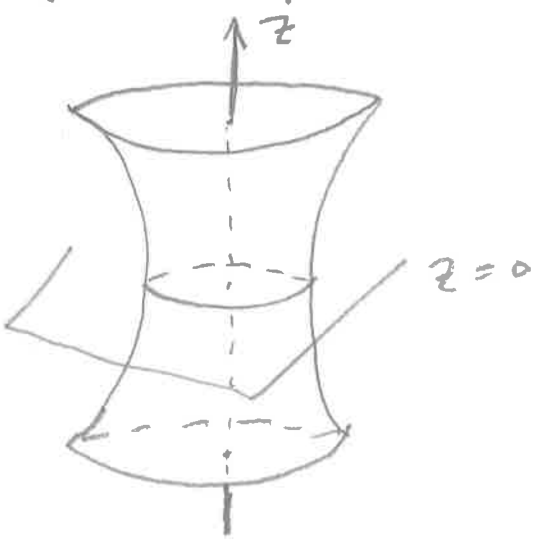
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad , \ a, b, c > 0$$

(i) Fes-me un dibuix (prova de tallar-la amb plans coordenats)

La expressem com: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + z^2/c^2 \iff$

$$\iff \frac{x^2}{(a\sqrt{1+z^2/c^2})^2} + \frac{y^2}{(b\sqrt{1+z^2/c^2})^2} = 1.$$ Això vol dir que

si fem $z = \text{const.}$, la intersecció de la superfície amb aquest pla és una el·lipse de centre $(0,0)$, eixos x, y i semi-eixos $a\sqrt{1+z^2/c^2}$ i $b\sqrt{1+z^2/c^2}$. Aquests valors prenen el seu mínim quan $z = 0$ i creixen de forma aproximadament lineal en z quan $z \to \pm\infty$



(ii) Comprova que és una superfície de revolució si $a = b$ i dóna'n una parametrització.

Si $a = b$ llavors cada tall $z = \text{const.}$ és un cercle de radi $a\sqrt{1+z^2/c^2}$ i per tant la superfície és de revolució.

Per parametritzar-la, expressem x, y, z en coord. cilíndriques: $x = \rho\cos\alpha$, $y = \rho\sin\alpha$, $z = z$, obtenim:

$$\frac{1}{a^2}(x^2+y^2) - \frac{z^2}{c^2} = 1 \Rightarrow \frac{1}{a^2}(\rho^2\cos^2\alpha + \rho^2\sin^2\alpha) - \frac{z^2}{c^2} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho^2/a^2 - \frac{z^2}{c^2} = 1 \Rightarrow \rho = a\sqrt{1+z^2/c^2}$$

. per tant,

$\rho = \rho(\alpha) = a\sqrt{1+z^2/c^2}$ sobre la superfície i la parametrització obtinguda és:

$$\varphi(\alpha, z) = \left(a\sqrt{1+z^2/c^2}\cos\alpha,\ a\sqrt{1+z^2/c^2}\sin\alpha,\ z\right)$$