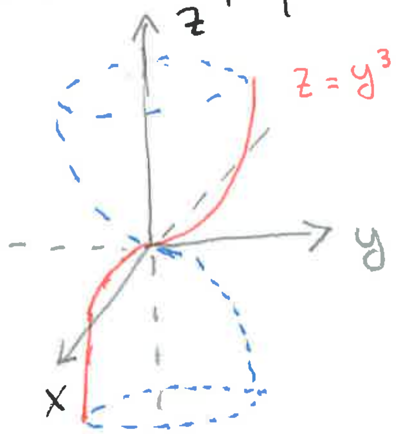
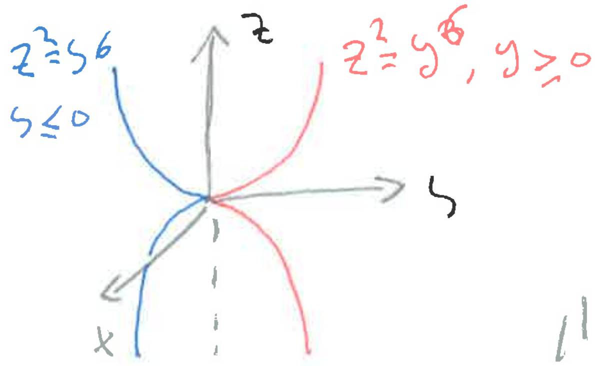
(30) (i) Fem girar la corba $z=y^3$ al voltant de l'eix OZ. Donen una parametrització i una equació implícita de la superfície de revolució resultant



• La pega de l'equació $z=y^3$ com eq. de la corba que fem girar és que contempla tant valors de $y>0$ com de $y<0$.
Potser la millor opció és elevar l'equació al quadrat, en el ben entès de que si bé així "doplem" la corba que fem girar, tots els punts (y,z) complint $z^2=y^6$ estaran en la superfície de rotació obtinguda i ara ens podem focalitzar en la rotació de la corba complint $z^2=y^6$ però amb $y\geq 0$ com a corba que genera la superfície de revolució.



Així, si $z^2=(y^2)^3$ és l'eq. de la corba que fem girar, amb $y\geq 0$, l'eq. implícita de la corresponent sup. de revolució l'obtenim canviant y^2 per x^2+y^2: $z^2=(x^2+y^2)^3$

• Si substituim en l'eq $z^2=(x^2+y^2)^3$ les coord. (x,y,z) per la seva expressió en termes de coord. cilíndriques: $(x,y,z)=(\rho\cos\alpha, \rho\sin\alpha, z)$, obtenim: $z^2=\rho^6 \Rightarrow \rho=\rho(z)=|z|^{1/3}$ (recordem que $\rho>0$). Si substituim $\rho=|z|^{1/3}$ en l'expressió de (x,y,z) en termes de (ρ,α,z) obtenim una parametrització de la superfície que involucra valors absoluts:

$\varphi(\alpha,z)=(|z|^{1/3}\cos\alpha, |z|^{1/3}\sin\alpha, z)$.

Ara bé, com que canviar α per $\alpha+\pi$ modifica el signe tant del $\cos\alpha$ com del $\sin\alpha$, la parametrització

$\varphi(\alpha,z)=(z^{1/3}\cos\alpha, z^{1/3}\sin\alpha, z)$

també dóna la mateixa superfície de revolució.

(ii) Si fem girar la corba $\gamma(t)=(t,0,t)$ al voltant de l'eix OZ, donem una parametrització de la superfície de revolució resultant

Procedim de forma semblant a (i). L'eq. de la corba parametritzada per $\gamma(t)$ en el pla xz és $x=z$. Usant el mateix argument que en (i) la superfície que obtenim girant $x=z$ entorn de l'eix z és la mateixa que la que obtenim girant $x^2=z^2$, i per tant l'eq de la superfície de revolució entorn de l'eix z s'obté canviant x^2 per x^2+y^2, obtenim: $x^2+y^2=z^2$ (equació d'un con).

Si introduïm ara coord cilíndriques queda $\rho^2=z^2 \Rightarrow \rho(z)=|z|$ i per tant la parametrització és (idèntic argument que en (i) per treure el valor absolut): $\varphi(\alpha,z)=(z\cos\alpha, z\sin\alpha, z)$

(iii) Sigui C una corba en el pla Y,Z donada per l'equació $f(y,z)=0$, i sigui S la superfície de revolució obtinguda en fer girar C al voltant de l'eix Z. Demostreu que si P és un punt llis de C i la corba C està inclosa en $y>0$, aleshores els punts del cercle format al girar P són punts llisos de S.

- Parametrització de C: $t \mapsto \gamma(t)=(y(t),z(t))$.
- " " S: $(t,\alpha)\mapsto \varphi(t,\alpha)=(y(t)\cos\alpha, y(t)\sin\alpha, z(t))$

(observem que per cada t fixat, si fem variar l'angle $\alpha\in[0,2\pi]$ llavors $\alpha\mapsto\varphi(t,\alpha)$ és un cercle de radi $y(t)>0$ en el pla $z=z(t)$, tal com volem).

- Si $P=\gamma(t_0)$, llavors P llis vol dir $y'(t_0)^2+z'(t_0)^2\neq 0$.
- El que volem veure és que si fixem aquest valor de t_0, llavors $(\varphi_t\wedge\varphi_\alpha)(t_0,\alpha)\neq\vec{0}$ $\forall\alpha\in[0,2\pi]$.

$$\varphi_t\wedge\varphi_\alpha=\begin{vmatrix} i & j & k \\ y'(t)\cos\alpha & y'(t)\sin\alpha & z'(t) \\ -y(t)\sin\alpha & y(t)\cos\alpha & 0\end{vmatrix}=y(t)\left(-z'(t)\cos\alpha, -z'(t)\sin\alpha, y'(t)\right)$$

Llavors $\|(\varphi_t\wedge\varphi_\alpha)(t_0,\alpha)\|=y(t_0)\sqrt{z'(t_0)^2+y'(t_0)^2}\neq 0$