(17) Sigui $\gamma(t)$ la corba cúbica de Brézier parametritzada per $t \in [0,1]$ i donada pels punts de control $P_0 = (0,0)$, $P_1 = (1,2)$, $P_2 = (4,3)$, $P_3 = (5,1)$.

(i) Escriviu explícitament la parametrització $\gamma(t) = (x(t), y(t))$

$$\gamma(t) = m_0(t) P_0 + m_1(t) P_1 + m_2(t) P_2 + m_3(t) P_3 =$$
$$= (1-t)^3 (0,0) + 3t(1-t)^2 (1,2) + 3t^2(1-t)(4,3) + t^3(5,1) =$$
$$= (\underbrace{3t(1-t)^2 + 12t^2(1-t) + 5t^3}_{x(t)}, \underbrace{6t(1-t)^2 + 9t^2(1-t) + t^3}_{y(t)})$$

(ii) Trobeu el valor màxim de $y$ que assoleix la corba, i en quin temps $t$ ho fa.

$$y(t) = 6t(1-t)^2 + 9t^2(1-t) + t^3, \quad t \in [0,1]$$
$$y'(t) = \underbrace{6(1-t)^2 - 12t(1-t) + 18t(1-t)}_{(1-t)[6-6t-12t+18t] = 6(1-t)} - 9t^2 + 3t^2 = 6 - 6t - 6t^2$$

$$y'(t) = 0 \Leftrightarrow t^2 + t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \begin{cases} \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \in [0,1] \\ \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \notin [0,1] \end{cases}$$

(podem usar $\sqrt{5} < 3 \Rightarrow \frac{-1+\sqrt{5}}{2} < \frac{-1+3}{2} = 1$

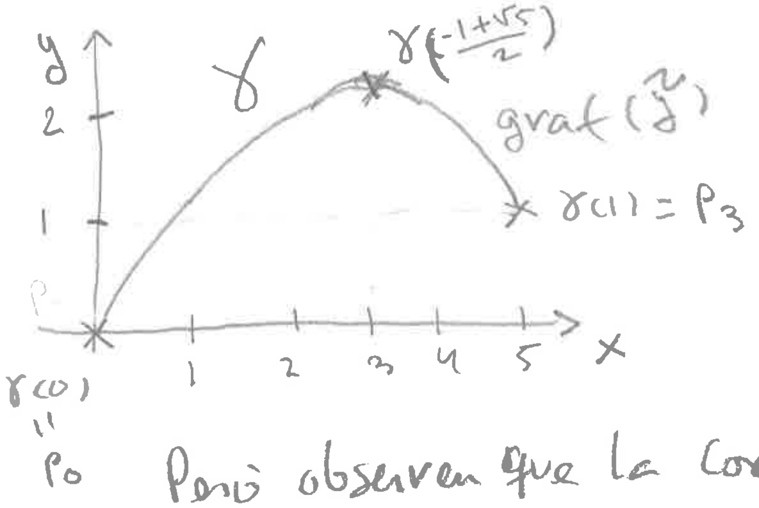
o bé el valor numèric $(-1+\sqrt{5})/2 \simeq 0.6180 < 1$).

Llavors, el valor

$$\max_{t \in [0,1]} y(t) = \max\left\{ y(0), y\left(\tfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right), y(1) \right\} =$$
$$= \max\left\{ 0, \frac{5\sqrt{5}-7}{2}, 1 \right\} = \frac{5\sqrt{5}-7}{2} \simeq 2.0902$$

(iii) Calculeu l'àrea limitada per la corba, l'eix OX, i les rectes verticals $x=0$, $x=5$.

La corba $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ la coneixem parametritzada per la variable $t \in [0,1]$ i si la dibuixem en el pla $xy$ té el següent aspecte:




L'àrea que volem calcular és la que queda tancada entre la corba $\gamma$ i l'eix $OX$ per $x \in [0,5]$.

Però observem que la coordenada $y$ sobre la corba no la coneixem com a funció de $x$, sinó com a funció de $t$. Per tant, cal fer un canvi de variable $t \leftrightarrow x$ per poder calcular la integral. Si, fent un abús de notació, escrivim $y = \tilde{y}(x)$ com l'expressió dels punts de la corba $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ quan expressem $y$ com a funció de $x$ sobre la corba, la relació que tenim és $\tilde{y}(x(t)) = y(t)$.

El que cal calcular és:

$$\int_0^5 \tilde{y}(x)\,dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Canvi} \\ x = x(t) \\ dx = x'(t)\,dt \\ x = 0 \leftrightarrow t = 0 \\ x = 5 \leftrightarrow t = 1 \end{array} \right\} = \int_0^1 \tilde{y}(x(t)) \cdot x'(t)\,dt =$$

$$= \int_0^1 y(t) \cdot x'(t)\,dt = \int_0^1 [6t(1-t)^2 + 9t^2(1-t) + t^3][-12t^2 + 12t + 3]\,dt$$

$$= \int_0^1 (24t^5 + 12t^4 - 114t^3 + 63t^2 + 18t)\,dt = \frac{79}{10}$$