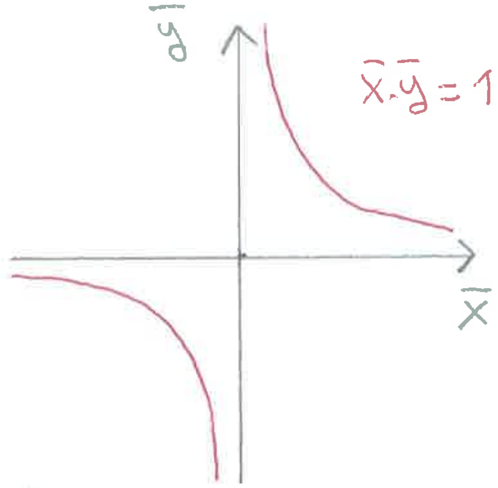
(14) La hipèrbola $2x^2-2y^2+3xy+x+7y=8$ té asímptotes $2x-y=-3$, $x+2y=1$. Trobeu una referència ortonormal positiva $\bar{R}$ de manera que en la nova referència la hipèrbola tingui equació $\bar{x}\cdot\bar{y}=1$



- Les asímptotes de $\bar{x}\cdot\bar{y}=1$ són els eixos coordenats $\bar{x},\bar{y}$
- El punt de tall de les asímptotes és l'origen de la referència $\bar{R}$.

- És clar que és un exemple "cuinat" per tal que realment un canvi ortonormal directe transformi l'hipèrbola de l'enunciat en $\bar{x}\cdot\bar{y}=1$. Concretament:

* $\vec{v}_1$ vector director unitari de $x+2y=1$.

* $\vec{v}_2$ " " " " $2x-y=-3$.

* Han de ser $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$

* Els triem tals que $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2\}$ base ortonormal directa

* P punt de tall de $x+2y=1$ i $2x-y=-3$

Llavors, en la referència $\bar{R}=\{P;\vec{v}_1,\vec{v}_2\}$ l'equació de la hipèrbola ha de ser $\bar{x}\cdot\bar{y}=K$, on per tal que el problema sigui "compatible" ha de ser $K=\pm 1$.

* Si $K=-1$ considerem la referència $\bar{R}=\{P;-\vec{v}_2,\vec{v}_1\}$ que també és ortonormal directa i ara dóna $K=1$

Clarament: $P=(-1,1)$, $\vec{v}_1=(2,-1)/\sqrt{5}$, $\vec{v}_2=(1,2)/\sqrt{5}$ compleixen amb els 4 primers * Falta calcular K.

La matriu del canvi de referència afí $A_{\bar{R}\to e}$, on e és la referència canònica, és:

$$A_{\vec{R}\to e} = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & -1 \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A_{\bar{R}\to e} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ 1 \end{pmatrix},$$

on $M = M_{\{\vec{v}_i\}\to\{e_i\}} = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$ matriu ortogonal, $\det M = 1$ (canvi de base directe), que té per columnes els vectors $\vec{v}_1, \vec{v}_2$. Podem fer el canvi $\begin{cases} x = -1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\bar{x} + \frac{\bar{y}}{\sqrt{5}} \\ y = 1 - \frac{\bar{x}}{\sqrt{5}} + \frac{2\bar{y}}{\sqrt{5}} \end{cases}$

en l'equació $2x^2 - 2y^2 + 3xy + x + 7y = 8$ per veure si obtenim $\bar{x}\cdot\bar{y} = 1$, o bé el canvi invers en $\bar{x}\cdot\bar{y} = 1$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}}_{M \text{ ortogonal } \Rightarrow M^T = M^{-1}} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+1 \\ y-1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} x+1 \\ y-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x+1 \\ y-1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \bar{x} = \frac{2}{\sqrt{5}}(x+1) - \frac{1}{\sqrt{5}}(y-1), \quad \bar{y} = \frac{1}{\sqrt{5}}(x+1) + \frac{2}{\sqrt{5}}(y-1).$$

Així, l'equació $\bar{x}\cdot\bar{y} = 1$ esdevé:

$$1 = \bar{x}\cdot\bar{y} = \left[\frac{2}{\sqrt{5}}(x+1) - \frac{1}{\sqrt{5}}(y-1)\right]\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{5}}(x+1) + \frac{2}{\sqrt{5}}(y-1)\right] =$$

$$= \frac{1}{5}\left[2(x+1)^2 - 2(y-1)^2 + 3(x+1)(y-1)\right] =$$

$$= \frac{1}{5}\left[2(x^2+2x+1) - 2(y^2-2y+1) + 3(xy - x + y - 1)\right] =$$

$$= \frac{1}{5}\left[2x^2 - 2y^2 + 3xy + x + 7y - 3\right]$$

obtenim l'equació $5 = 2x^2 - 2y^2 + 3xy + x + 7y - 3$, que és el de la cònica inicial, com volíem