(11) Sigui $\mathcal{C}$ la paràbola $y = ax^2+bx+c$, $a>0$

(a) Trobeu el seu vèrtex, l'eix, el focus i la directriu.

- Sabem per teoria que per una paràbola de la forma $\boxed{X^2 = 2pY}$, el focus és $(0, p/2)$, la directriu $Y=-p/2$, l'eix $X=0$ i el vèrtex $(0,0)$. Es tracta doncs de fer un canvi de variables ortonormal que transformi la paràbola de l'enunciat en una d'aquesta forma.

- Per cercar aquest canvi, que en aquest cas és molt senzill, la idea clau és agrupar els termes ax^2+bx dins d'un quadrat d'una expressió de grau 1 en x. Fem:

$$y = ax^2+bx+c = a\left[x^2+\frac{b}{a}x\right]+c = a\left[x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]+$$
$$+c-a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 = a\left(x+b/2a\right)^2+c-\frac{b^2}{4a}.$$

Per tant

$$y-c+\frac{b^2}{4a} = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$$

Fem el canvi (translació en $\mathbb{R}^2$): $\left\{\begin{array}{l} X = x+\dfrac{b}{2a} \\ Y = y-c+\dfrac{b^2}{4a}\end{array}\right\}$ $(*)$

i l'equació en coordenades (X,Y) esdevé:

$$Y = aX^2 \iff X^2 = \frac{1}{a}Y = 2pY \quad \text{si } p=\frac{1}{2a}.$$

- Per tant, les expressions de la primera part del problema ens donen el focus, directriu, eix i vèrtex en coordenades (X,Y). Via el canvi $(*)$ o fent $x = X-\frac{b}{2a}$, $y = Y+c-b^2/4a$ les obtenim en coordenades (x,y):

Focus: $\boxed{(x,y)} = \left(0-\frac{b}{2a}, \frac{p}{2}+c-b^2/4a\right) = \boxed{\left(-\frac{b}{2a}, \frac{1}{4a}+c-b^2/4a\right)}$

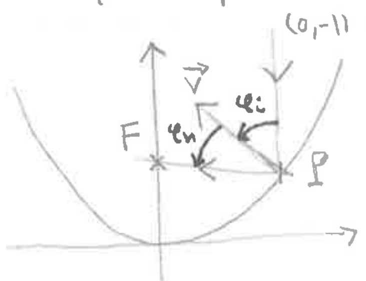
directriu: $y = -\frac{p}{2} \Rightarrow \boxed{Y} = y - c + \frac{b^2}{4a} = \boxed{-\frac{1}{4a} - c + \frac{b^2}{4a}}$

eix: $x = 0 \Rightarrow \boxed{X} = x + \frac{b}{2a} = \boxed{\frac{b}{2a}}$

vèrtex: $\boxed{(X,Y)} = \left(0 - \frac{b}{2a},\, 0 + c - b^2/4a\right) = \boxed{\left(-b/2a,\, c - b^2/4a\right)}$

(b) Proveu que els raigs de llum que venen amb la direcció de l'eix i es reflecteixen en el costat interior de la paràbola passen pel focus en reflectir-se.

- Ho fem pel cas $x^2 = 2py$, $p > 0$, en què $F = (0, p/2)$.



$x^2 = 2py$

Si un raig incideix en un punt P de la paràbola, venint en la direcció i sentit del vector $(0,-1)$, la recta que es reflecteix passa per F.

Ho verificarem veient que $\cos\varphi_i = \cos\varphi_r$.

Una parametrització de la paràbola és $\varphi(x) = (x, x^2/2p)$.

Triem $P = (x_0, x_0^2/2p)$. Un vector tangent a la paràbola en P és $\varphi'(x_0) = (1, x_0/p)$ i per tant, un vector normal a aquesta en P i apuntant cap dins és $\vec{v} = \left(-\frac{x_0}{p}, 1\right)$.

$$\cos\varphi_i = \frac{\langle \vec{v}, (0,1)\rangle}{\|\vec{v}\|\cdot\|(0,1)\|} = \frac{1}{\sqrt{x_0^2/p^2+1}}$$

(Cal triar $(0,1)$ i no $(0,-1)$ per calcular φ_i).

$$\cos\varphi_r = \frac{\langle \vec{v}, \vec{PF}\rangle}{\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{PF}\|} = \frac{\frac{p}{2} + \frac{x_0^2}{2p}}{\sqrt{x_0^2/p^2+1}\,\left(\frac{p}{2} + \frac{x_0^2}{2p}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x_0^2/p^2+1}}$$

on: $\vec{PF} = F - P = \left(-x_0, \frac{p}{2} - x_0^2/2p\right)$, $\langle \vec{v}, \vec{PF}\rangle = \frac{p}{2} + \frac{x_0^2}{2p}$,

$$\|\vec{PF}\| = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{p}{2} - \frac{x_0^2}{2p}\right)^2} = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_0^2}{2p}\right)^2 - \frac{x_0^2}{2}} = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_0^2}{2p}\right)^2 + \frac{x_0^2}{2}} = \sqrt{\left(\frac{p}{2} + \frac{x_0^2}{2p}\right)^2} =$$

$$= \frac{p}{2} + \frac{x_0^2}{2p}$$