Geometria

Tema 5: Varietats implícites

Veieu la web de l'assignatura per a més informació.

15 de desembre de 2020

Varietats implícites

Definició de varietat implícita

$W \subset \mathbb{R}^n$ és una *varietat implícita* $\mathcal{C}^1$ si els seus punts verifiquen un sistema d'equacions (en general no lineals) almenys $\mathcal{C}^1$ de la forma:

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1 \ldots x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1 \ldots x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Concretamet: $P \in W \iff F(P) = \vec{0}$

Observació

Suposarem nombre d'equacions $= m < n =$ nombre de variables.

Punts llisos i singulars

- $P \in W$ és un punt *llis* (o *regular*) si la matriu $DF(P)$ de derivades parcial (o matriu jacobiana) de F en P té rang màxim: $\mathrm{rang}(DF(P)) = m$. Concretament:

$$DF(P) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(P) \\ \vdots \\ \nabla f_m(P) \end{pmatrix}$$

  on $\nabla f_j = (\partial_{x_1} f_j, \ldots, \partial_{x_n} f_j)$ vector gradient de f_j. (Notació: $\partial_{x_i} f = f_{x_i} = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ i s'entén que ∇f és un vector filera).
- Si $DF(P)$ no té rang màxim diem que P és punt *singular*.
- La *dimensió* de W és $\dim W = n - m =$ variables - equacions.
- dimensió 1 $\iff$ corbes; dimensió 2 $\iff$ superfícies.
- P.ex.: 1 equació en $\mathbb{R}^2$ o 2 equacions en $\mathbb{R}^3$ donen una corba; 1 equació en $\mathbb{R}^3$ dóna una superfície.

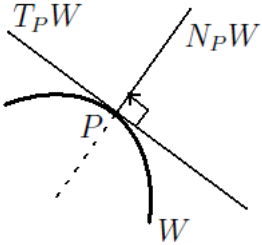
Varietat tangent i varietat normal I

- Si $P \in W$ és un punt llis, la *varietat tangent* a W en P és

$$T_P W := P + \mathrm{Nuc}(DF(P))$$

- Si $P \in W$ és un punt llis, la *varietat normal* a W en P és

$$N_P W := P + \mathrm{Nuc}(DF(P))^{\perp} = P + [\nabla f_1(P), \ldots, \nabla f_m(P)]$$



Varietat tangent i varietat normal II

- La varietat tangent $T_P W := P + \mathrm{Nuc}(DF(P))$ és una varietat lineal de dimensió $n - m$ (la mateixa que W).
- Si W és una corba llavors $T_P W$ té dimensió 1.
- Si W és una superfície llavors $T_P W$ té dimensió 2.
- $x \in \mathrm{Nuc}(DF(P)) \iff DF(P)\,x = \vec{0}$. ($x$ vector columna.)
- La varietat normal $N_P W := P + \mathrm{Nuc}(DF(P))^{\perp}$ és una varietat lineal de dimensió m tal que el seu s.e.v. director està generat pels vectors gradients de les funcions f_j avaluats en P.
- Si W corba en $\mathbb{R}^2$ o W superfície en $\mathbb{R}^3$ llavors $N_P W$ té dimensió 1.
- Si W corba en $\mathbb{R}^3$ llavors $N_P W$ té dimensió 2.

Problema 1

Sigui C la corba plana amb equació $y^2 - 2xy - x^3 + 2x^2 + 9 = 0$.

1. Busqueu els punts singulars de la corba.
2. Calculeu $T_P C, N_P C$ per $P = (3, 0)$.

1. L'equació de C és $f(x, y) = 0$, on f ve donada per:

   $$f(x, y) = y^2 - 2xy - x^3 + 2x^2 + 9.$$

   En ser C una corba plana, la condició de punt singular de C és $\nabla f(x, y) = 0$, que no es dóna per cap punt de $(x, y) \in C$ (tot són llisos). En efecte:

   $$\nabla f(x, y) = (f_x, f_y) = (-3\,x^2 + 4\,x - 2\,y,\ -2\,x + 2\,y).$$

   Si les dues components de ∇f s'anul·len simultàniament, cal $x = y$ (via segona equació) i, substituïnt $y = x$ en la primera:

   $$-3\,x^2 + 2\,x = 0 \Leftrightarrow x\,(-3\,x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = y = 0 \text{ o bé } x = y = 2/3.$$

   Cap d'aquests dos punts no pertany a la corba perquè

   $$f(0, 0) = 9 \neq 0, \quad f\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = 247/27 \neq 0.$$

2. Observem que $P = (3,0) \in W$ en quan $f(P) = 0$. El gradient de f en P val:

$$\nabla f(3,0) = (-15,\ -6) = -3(5,2) \parallel (5,2).$$

Per tant, la varietat normal és

$$N_P C = (3,0) + [(5,2)].$$

La varietat tangent $T_P C$ és $\perp$ a $N_P C$ i passa pel punt P. En ser $(2,-5) \perp (5,2)$ és té :

$$T_P C = (3,0) + [(2,-5)].$$

Si volem la forma implícita de $T_P C$, usem que els coeficients de x, y en la seva equació defineixen un vector $\perp$ a $T_P C$ que, si l'escollim com el $(5,2)$, ens diu que $T_P C : 5x + 2y = d$ on hem de triar $d = 15$ per tal que $P = (3,0)$ verifiqui l'equació de $T_P C$.

Problema 3

C corba donada per les equacions $z = e^{-x^2-y^2}$, $x - 2y - z = -1$.

1. Té C algun punt singular en el semiespai $x \geq 0$?
2. Calculeu $T_P C, N_P C$ en $P = (0,0,1)$.

1. C verifica $F(x,y,z) = (f_1(x,y,z), f_2(x,y,z)) = (0,0)$ on:

$$f_1(x,y,z) = z - e^{-x^2-y^2}, \qquad f_2(x,y,z) = x - 2y - z + 1.$$

F té com a matriu de derivades parcials:

$$DF(x,y,z) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(x,y,z) \\ \nabla f_2(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xe^{-x^2-y^2} & 2ye^{-x^2-y^2} & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

$\mathrm{rang}(DF(x,y,z))$ sempre ≥ 1. Si volem $\mathrm{rang}(DF(x,y,z)) = 1$ cal

$$\begin{vmatrix} 2xe^{-x^2-y^2} & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 2ye^{-x^2-y^2} & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Obtenim les equacions $2\,x\,e^{-x^2-y^2} = -1$, $2\,y\,e^{-x^2-y^2} = 2$.
En particular, si $x \geq 0$ la 1a eq. no es compleix. Per tant, tots els punts $(x,y,z) \in C$ amb $x \geq 0$ tenen rang 2 i són llisos.

2. $P = (0,0,1) \in C$ ja que $f_1(P) = f_2(P) = 0$. A més:

$$DF(0,0,1) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(0,0,1) \\ \nabla f_2(0,0,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

P és llis ja que $\nabla f_1(P)$ i $\nabla f_2(P)$ són linealment independents. A més, sabem que els vectors gradients són $\perp$ a C en P i, per tant, el seu producte vectorial dóna un vector tangent a C en P:

$$(0,0,1) \wedge (1,-2,-1) = (2,1,0).$$

Les varietats tangent i normal a C en P són:

$$\begin{aligned} T_P C &= (0,0,1) + [(2,1,0)] = \{z = 1,\ x - 2y - z = -1\}, \\ N_P C &= (0,0,1) + [(0,0,1),(1,-2,-1)] = \{2x + y = 0\}. \end{aligned}$$

Exemple d'una sola equació (hipersuperfícies)

- Si $W \subset \mathbb{R}^n$ és una varietat implícita definida per una sola equació $f(x) = 0$, W és una hipersuperfície de $\mathbb{R}^n$.
- Llavors, $\dim W = n - 1$ i $P \in W \iff f(P) = 0$.
- Les corbes en $\mathbb{R}^2$ i les superfícies en $\mathbb{R}^3$ són hipersuperfícies.
- La condició de que $P \in W = \{f = 0\}$ sigui un punt llis és $\nabla f(P) \neq \vec{0}$ i llavors és té:

$$N_P W = P + [\nabla f(P)],$$

$$T_P W = \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \mid \langle \nabla f(P), \mathbf{x} - P \rangle = 0\}.$$

- Per exemple, per una superfície $W = \{f(x, y, z) = 0\} \subset \mathbb{R}^3$, el pla tangent a W en $P = (x_0, y_0, z_0)$ ve definit per l'equació:

$$\{(x, y, z) \mid f_x(P)\,(x - x_0) + f_y(P)\,(y - y_0) + f_z(P)\,(z - z_0) = 0\}.$$

Exemples: hipersuperfícies de nivell i gràfiques de funcions

- Donada la funció $\mathcal{C}^1$ $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, la **hipersuperfície de nivell** $g(\mathbf{x}) = c$ (on c és una constant) és la varietat implícita W_c definida per aquesta equació. Concretament, $W_c = \{g = c\}$ o bé, equivalentment, $W_c = \{f = 0\}$, on $f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) - c$.
- Si $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ és $\mathcal{C}^1$, la seva **gràfica** és el conjunt:

$$W = \mathrm{graf}(h) = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \,|\, x_{n+1} = h(x_1, \ldots, x_n)\} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

  - W varietat implícita de $\mathbb{R}^{n+1}$ definida per l'equació $f = 0$, on $f(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = x_{n+1} - h(x_1, \ldots, x_n)$.
  - $P \in W$ síí. és de la forma $P = (\mathbf{x}_0, h(\mathbf{x}_0)) \in \mathbb{R}^{n+1}$, on $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$.
  - Tots els punts de W són llisos i es té $\nabla f(P) = (-\nabla h(\mathbf{x}_0), 1)$.
  - P.ex.: si $h(x, y)$ és una funció definida a $\mathbb{R}^2$ i considerem la superfície $W \subset \mathbb{R}^3$ definida per la gràfica $z = h(x, y)$, el pla tangent a W en $P = (x_0, y_0, h(x_0, y_0)) \in \mathbb{R}^3$ ve definit per:

$$z = h(x_0, y_0) + h_x(x_0, y_0)\,(x - x_0) + h_y(x_0, y_0)\,(y - y_0).$$

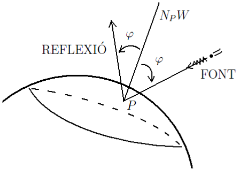
Propietats de les varietats tangent i normal

Si W és una varietat implícita, i $P \in W$ punt llis, aleshores:

(1) $T_P W$ és la varietat lineal que millor aproxima a W prop de P.

(2) Si W és una hipersuperfície donada l'equació $f = 0$, llavors $N_P W = P + [\nabla f(P)]$ dóna la direcció de màxim creixement de f en P. Això és, si volem $f(P+h)$ creixi el més possible, triant h de tamany petit, el natural és triar h en la direcció i sentit donat per $\nabla f(P)$.

(3) *Principi de Fermat*: Quan un raig de llum es reflecteix en $P \in W$, la varietat $N_P W$ bisseca els raigs entrant i sortint.



Problema 5

Sigui $W \subset \mathbb{R}^3$ la gràfica de la funció $h(x,y) = e^{-x^2-y^2}$. Calculeu els punts singulars de W i la recta normal i el pla tangent en el punt $(0,1,e^{-1})$.

- En ésser W la gràfica d'una funció de $\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ C^1, obtenim una superfície de $\mathbb{R}^3$ sense cap punt singular:

$$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = h(x,y)\} = \{g(x,y,z) = 0\},$$

  on: $g(x,y,z) = z - h(x,y) = z - e^{-x^2-y^2}$.
- El gradient de $g(x,y,z) = z - e^{-x^2-y^2}$ és:

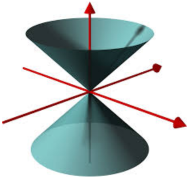
$$\nabla g(x,y,z) = (g_x, g_y, g_z) = (2\,x\,e^{-x^2-y^2}, 2\,y\,e^{-x^2-y^2}, 1)$$

- El punt $P = (0,1,e^{-1}) \in W$ ja que $g(0,1,e^{-1}) = 0$.
- $\nabla g(P) = (0, 2\mathrm{e}^{-1}, 1)$ és $\perp$ a W en P. Per tant:

$$\begin{aligned} N_P W &= (0,1,e^{-1}) + [(0, 2\,\mathrm{e}^{-1}, 1)], \\ T_P W &= (0,1,e^{-1}) + [(0, 2\,\mathrm{e}^{-1}, 1)]^{\perp} = \{2\,e^{-1}\,y + z = d\} \end{aligned}$$

  on $d = 3\,\mathrm{e}^{-1}$ per tal que $(0,1,e^{-1})$ compleixi l'equació.

Exemple: W con de revolució entorn de l'eix z



$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2\}.$$

- W es la superfície del con de revolució de $\mathbb{R}^3$ que s'obté fent girar la recta $\{z = y,\ x = 0\}$ entorn de l'eix z.
- La seva forma implícita és $f = 0$, on $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$.
- Per tant: $Df(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) = (2x, 2y, -2z)$.
- $P \in \mathbb{R}^3$ punt llis de $W \iff f(P) = 0$ i $\mathrm{rang}(Df(P)) = 1$.
- $P \in \mathbb{R}^3$ punt singular de $W \iff f(P) = 0$ i $\nabla f(P) = \vec{0}$.
- L'únic punt $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ que compleix que $\nabla f(P) = \vec{0}$ és $x = y = z = 0$.
- Com que $P = (0, 0, 0)$ pertany a W, P és l'únic punt singular de W (vèrtex del con). Tots els altres punts de W són llisos.

Exemple: Con de revolució II

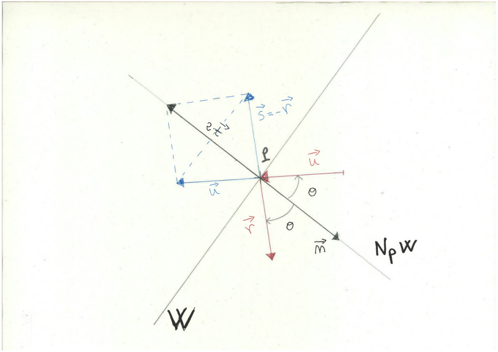
Sigui $\vec{u} = (-1, -1, 2)$ vector director d'un raig de llum que incideix en el punt $P = (3, 4, 5) \in W$. Trobeu l'equació de la recta seguida pel raig de llum reflectit.

- $f(3, 4, 5) = 0 \implies P = (3, 4, 5)$ és un punt llis del con i $Df(P) = \nabla f(P) = (6, 8, -10) = 2\vec{n}$, on $\vec{n} = (3, 4, -5)$ és un vector normal a W en P.
- El pla tangent a W en P i la seva recta normal són:

$$N_P W = (3, 4, 5) + [\nabla f(P)] = (3, 4, 5) + [(3, 4, -5)].$$
$$T_P W = (3, 4, 5) + [\nabla f(P)]^{\perp} = \{3x + 4y - 5z = d\},$$

  on triem $d = 0$ per tal que $P = (3, 4, 5)$ verifiqui l'equació.
- La reflexió és un raig pel punt P contingut en el pla $P + [\vec{u}, \vec{n}]$.
- Pel principi de Fermat, el raig reflectit té direcció $\vec{r}$ donada per la reflexió del vector $\vec{u}$ respecte del s.e.v. $[\vec{n}]$ (de dimensió 1).

Exemple: Con de revolució III



- $\vec{u} = (-1, -1, 2)$ direcció i sentit del raig incident.
- $\vec{r}$ direcció i sentit del raig reflectit.
- θ mateix àngle d'incidència i de reflecció.
- $\vec{s} = -\vec{r}$ compleix que $\vec{u} + \vec{s} = 2\,\vec{t}$, on $\vec{t} = \Pi_{[\vec{n}]}(\vec{u})$ és la projeccio ortogonal de $\vec{u}$ sobre el s.e.v. $[\vec{n}]$. Per tant:

$$\vec{s} = 2\,\vec{t} - \vec{u} = 2\,\frac{\langle \vec{u}, \vec{n} \rangle}{\langle \vec{n}, \vec{n} \rangle}\vec{n} - \vec{u}.$$

Exemple: Con de revolució IV

Finalment, usant

$$\vec{u} = (-1, -1, 2), \qquad \vec{n} = (3, 4, -5),$$

obtenim:

$$\begin{aligned} \vec{s} &= 2\frac{\langle \vec{u}, \vec{n} \rangle}{\langle \vec{n}, \vec{n} \rangle}\vec{n} - \vec{u} = \frac{2 \cdot (-17)}{50}(3, 4, -5) - (-1, -1, 2) \\ &= \frac{1}{50}(-52, -86, 70) = \frac{1}{25}(-26, -43, 35). \end{aligned}$$

Per tant, $P + [(26, 43, -35)]$ és la recta que segueix el raig reflectit des de P, que té vector director

$$\vec{r} = -\vec{s} = \frac{1}{25}(26, 43, -35).$$

(El canvi de signe en el vector director indica el rebot del raig.)

Extrems Lligats I

- **Problema:** Donada una funció $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable, volem trobar els extrems (màxims i mínims) de f entre els punts P d'una varietat implícita $W \subset \mathbb{R}^n$ definida per equacions $g_1 = \cdots = g_m = 0$ (on $m < n$).
- Les equacions de W són els *lligams*: condicions que han de complir els punts entre els que busquem els extrems, i aquests extrems s'anomenen *extrems de f en W* o *extrems de* $f_{|W}$.

Extrems Lligats II

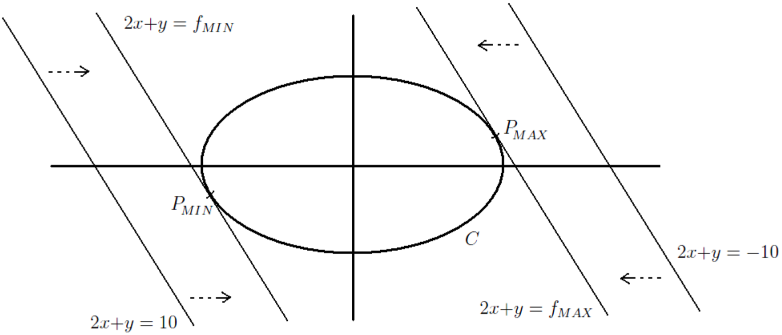


Figure : Extrems de $f(x, y) = 2x + y$ en la corba $C : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. (Ull: hi ha 2 errates a la figura: $2x + y = 10$ és de fet $2x + y = -10$ i viceversa.)

Extrems Lligats III

Lema

Si $P \in W$ és un extrem (local) de f en W aleshores P ha de ser un punt crític *de f en W (*condició necessària d'extrem relatiu*). Això vol dir que:*

$$\nabla f(P) \in [\nabla g_1(P), \dots, \nabla g_m(P)]$$

o, equivalentment, que existeixen constants $\lambda_1, \dots \lambda_m$ tals que:

$$\nabla f(P) = \lambda_1 \nabla g_1(P) + \cdots + \lambda_m \nabla g_m(P).$$

Observació

En la figura anterior, això implica que les corbes de nivell de f en els extrems lligats tenen mateixa recta tangent que C en els punts.

Punts Crítics i Multiplicadors de Lagrange

- Si P és un punt crític de f en W, s'anomenen *multiplicadors de Lagrange* a les constants $\lambda_1, \ldots \lambda_m$ tals que

$$\nabla f(P) = \lambda_1 \nabla g_1(P) + \cdots + \lambda_m \nabla g_m(P).$$

- Es té que $P = (x_1, \ldots, x_n)$ és punt crític de f en $W \Leftrightarrow$ per alguna tria de $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, el punt $(\underbrace{x_1, \ldots, x_n}_{P}, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ és un punt crític de la *funció de Lagrange*:

$$L(x_1, \ldots, x_n \ , \ \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = f - \lambda_1 g_1 - \lambda_2 g_2 - \cdots - \lambda_m g_m.$$

  Punt crític de L vol dir que, per aquests $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ triats, el seu gradient respecte de $x_1, \ldots, x_n$ és zero:

$$\nabla L = (L_{x_1}, L_{x_2}, \cdots, L_{x_n}) = (0, 0, \ldots, 0).$$

- Toca dir quins punts crítics són realment extrems de f en W.

Teorema dels multiplicadors de Lagrange I

Teorema (Multiplicadors de Lagrange)

Si $P \in W$ és punt crític de f en W i té multiplicadors de Lagrange $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$, considerem la funció

$$L(x_1, \ldots, x_n) = f - \lambda_1 g_1 - \cdots - \lambda_m g_m,$$

$H(L)_P = D^2 L(P)$ la seva matriu Hessiana en P (matriu de derivades segones), i E el subespai director de $T_P W$. Suposem que $\nabla L(P) = (0, \ldots, 0)$ (P és punt crític de L). Aleshores:

- *Si $H(L)_{P_{|E}}$ és definida positiva, P és mínim (local) de f en W.*
- *Si $H(L)_{P_{|E}}$ és definida negativa, P és màxim (loc) de f en W.*
- *Si $H(L)_{P_{|E}}$ és indefinida (té VAPs > 0 i VAPs < 0), P és punt de sella (no és extrem de f en W).*

Teorema dels multiplicadors de Lagrange II

- Recordem $H(L)_{P_{|E}}$ és la restricció de la matriu $H(L)_P$ a E, on E l'hem definit com el s.e.v. director de la varietat $T_P W$ (tangent a W en P).
- Recíprocament també es té que
  - P mínim de f en $W \Rightarrow H(L)_{P_{|E}}$ és semidefinida positiva ($i_- = 0$).
  - P màxim de f en $W \Rightarrow H(L)_{P_{|E}}$ és semidefinida negativa ($i_+ = 0$).
- A la pràctica, podem usar l'algorisme que describim tot següit per trobar els extrems d'una funció en una varietat. Les dades d'aquest algorisme són:
  - $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ és la funció de n variables de la que en volem els seus extrems lligats sobre la varietat W.
  - $g_1, \ldots, g_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ són m funcions de n variables tals que la varietat W, de dimensió $n-m$, està implicitament definida per les equacions $g_1 = \cdots = g_m = 0$.

Algoritme dels Multiplicadors de Lagrange. I

Pas 1 Considerem la funció de Lagrange

$$L(x_1, \ldots, x_n \ , \ \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = f - \lambda_1 g_1 - \lambda_2 g_2 - \cdots - \lambda_m g_m.$$

Calculem els punts crítics $P = (x_1, \ldots, x_n)$ de f en W i els multiplicadors de Lagrange $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ corresponents a P, com a solució del següent sistema de $n + m$ equacions:

$$L_{x_1} = \cdots = L_{x_n} = g_1 = \cdots = g_m = 0.$$

Per a cada punt crític P obtingut en aquest **Pas 1** repetim els calculs següents (**Pas 2**-**Pas 4**).

Pas 2 Calculem $H = H(L)_P$, matriu hessiana de L en P, on els valors dels multiplicadors de Lagrange $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ els fixem com els obtinguts en el **Pas 1** (això és, H matriu $n \times n$ simètrica).

Algoritme dels Multiplicadors de Lagrange. II

Pas 3 Calculem generadors $\{u_1, \ldots, u_d\}$ del s.e.v. E, de dimensió $d = n - m$, director de $T_P(W)$. Això és:

$$E = [\nabla g_1(P), \ldots, \nabla g_m(P)]^\perp = [u_1, \ldots, u_d].$$

Pas 4 Calculem la matriu $H_{|E}$ (simètrica i $d \times d$) de la restricció de $H = H(L)_P$ al s.e.v. E, donada per

$$H_{|E} = U^\top \cdot H \cdot U,$$

on U matriu $n \times d$ que té per *columnes* els vectors generadors de E, $\{u_1, \ldots, u_d\}$, del **Pas 3**, i estudiem si $H_{|E}$ és definida positiva/negativa o indefinida.

Cas d'extrems absoluts de f en W varietat compacta

Sigui $W \subset \mathbb{R}^n$ una varietat compacta (tancada i acotada). Llavors, **sabem que existeixen** els extrems absoluts f en W. Càlcul:

Pas 1 Trobar *TOTS* els punts crítics de f en P (però ara NO ens calen els valors dels multiplicadors de Lagrange).

Pas 2 Avaluar f en *TOTS* els punts crítics. El punt (o punts) que maximitza el valor de f entre els punts crítics dóna el màxim absoluts de f en W (ídem pel mínim/s absolut/s). NO cal calcular ni la matriu hessiana H ni els generadors de E.

Comentaris:

- Són varietats compactes, p.ex., un cercle o una el·lipse a $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$, o bé una esfera o un el·lípsoide a $\mathbb{R}^3$.
- No són varietats compactes, p.ex., ni una recta en $\mathbb{R}^2$ ni una recta, pla, cilindre o con en $\mathbb{R}^3$. Si W no és compacta, el més probable és que els extrems absoluts de f en W no existeixin (depèn del cas).

Aplicació a la mínima distància a un punt

En el cas de la funció distància a un punt Q fora de W

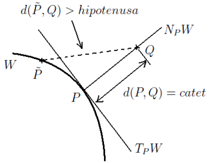
$$f(x) = \|x - Q\|$$

(equivalentment el seu quadrat que té gradient $2(x - Q)$)

Corol·lari (La direcció de mínima distància és normal)

Si $Q \notin W$, i $P \in W$ és el punt de W més proper o més llunyà a Q, aleshores la recta $\overline{PQ}$ és normal a W en P

$$P - Q \in [\nabla g_1(P), \ldots, \nabla g_m(P)].$$



Trobeu els extrems (lligats) de $f(x,y,z) = z$ sobre la varietat $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x^2+y^2+z^2-1=0\}$ i classifiqueu-los (màxims/mínims, relatius/absoluts).

W ve donada per una única equació a $g(x,y,z)=0$ en $\mathbb{R}^3$, on $g = x^2+y^2+z^2-1$, que defineix la superfície d'una esfera de centre $(0,0,0)$ i radi 1. Per tant, W és una varietat compacta. Això implica que f assoleix el seu màxim i mínim absolut en W que, en particular, han de ser punts crítics de $f_{|W}$.

Pas 1: $L(x,y,z,\lambda) = f - \lambda g = z - \lambda\left(x^2+y^2+z^2-1\right)$ funció de Lagrange associada. Les equacions dels punts crítics $P=(x,y,z)$ de f en W i dels corresponents multiplicadors de Lagrange λ són:

$$\begin{aligned}
\text{(eq1)}\ L_x = 0 &\iff -2\,\lambda\,x = 0 \iff \lambda = 0 \text{ o bé } x = 0.\\
\text{(eq2)}\ L_y = 0 &\iff -2\,\lambda\,y = 0 \iff \lambda = 0 \text{ o bé } y = 0.\\
\text{(eq3)}\ L_z = 0 &\iff 1 - 2\,\lambda\,z = 0\\
\text{(eq4)}\ g = 0 &\iff x^2+y^2+z^2-1 = 0
\end{aligned}$$

(eq3) $\Longrightarrow\ \lambda \neq 0$ i $z \neq 0 \implies x = y = 0$ via (eq1) i (eq2).

Substituint $x = y = 0$ en (eq4) $\Longrightarrow\; z^2 = 1 \;\Longrightarrow\; z = \pm 1$. Així, f té dos punts crítics sobre W: $P_\pm = (0, 0, z_\pm) = (0, 0, \pm 1)$.
El multiplicador de Lagrange de cadascun d'ells és (via (eq3)):
$\lambda_\pm = \dfrac{1}{2\, z_\pm} = \pm\dfrac{1}{2}$.
Ara hi dues formes d'acabar el problema:

1. En ser W una varietat compacta, sabem que f assoleix el seu màxim i el seu mínim absolut sobre W, que han de ser punts crítics de $f_{|W}$. Per tant, és obligat que un d'ells sigui P_+ i l'altre P_-. Avaluant f en cadascun d'ells s'obté $f(P_+) = 1$ (màx. absolut de f en W) i $f(P_-) = -1$ (mín. absolut).
2. Estudiar la restricció de la matriu hessiana de L al subsepai vectorial tangent a W en P_+ i P_-. Tot segui anem a fer-ho encara que realment **NO** cal fer-ho.

Pas 2: La matriu hessiana de L en un punt generic és:

$$H(L) = \begin{pmatrix} L_{xx} & L_{xy} & L_{xz} \\ L_{xy} & L_{yy} & L_{yz} \\ L_{xz} & L_{yz} & L_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\,\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -2\,\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2\,\lambda \end{pmatrix}$$

Per tant:

$$H(L)_{P_+} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad H(L)_{P_-} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Expressem com $T_{\pm P}(W) = P_\pm + E_\pm$ la varietat tangent a W en el punt $P_\pm \in W$, on $E_\pm$ és el subespai vectorial tangent a W en $P_\pm$.

- $H(L)_{P_+}$ té tots els seus VAPs negatius $\Longrightarrow$ $H(L)_{P_+}$ definida negativa $\Longrightarrow$ la restricció de $H(L)_{P_+}$ al subespai vectorial E_+ tangent a W en P_+ també és definida negativa $\Longrightarrow$ P_+ és un màxim relatiu de f en W.
  (De fet ja hem vist que P_+ és el màxim absolut de f en W).
- $H(L)_{P_-}$ té tots els seus VAPs positius $\Longrightarrow$ $H(L)_{P_-}$ definida positiva $\Longrightarrow$ la restricció de $H(L)_{P_-}$ al subespai vectorial E_- tangent a W en P_- també és definida positiva $\Longrightarrow$ P_- és un mínim relatiu de f en W.
  (De fet ja hem vist que P_- és el mínim absolut de f en W).

Trobeu els extrems (lligats) de $f(x,y) = x^2 + y^2$ sobre la varietat $W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, (x-1)^2 + 4\,y^2 = 4\}$ i classifiqueu-los.

$f(x,y) = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2$ dóna la distància al quadrat de (x,y) a (x_0,y_0). Estem buscant doncs màxims i mínims la funció distància del $(0,0)$ als punts $(x,y) \in W$.
W ve donada per una única equació a $g(x,y) = 0$ en $\mathbb{R}^2$, on $g = (x-1)^2 + 4\,y^2 - 4$, que dóna lloc a la corba definida per l'el·lipse de centre $(1,0)$ i semi-eixos 2 i 1, $\frac{(x-1)^2}{2^2} + \frac{y^2}{1^2} = 1$, que és una varietat compacta $\Longrightarrow$ f assoleix el seu màxim i mínim absolut en W que, en particular, han de ser punts crítics de $f_{|W}$.
Pas 1: $L(x,y,\lambda) = f - \lambda g = x^2 + y^2 - \lambda\, \left[(x-1)^2 + 4\,y^2 - 4\right]$ és la funció de Lagrange associada. Les equacions dels punts crítics $P = (x,y)$ de f en W i dels multiplicadors de Lagrange λ són:

$$\text{(eq1)}\;\; L_x = 0 \iff x - \lambda\,(x-1) = 0$$

$$\text{(eq2)}\;\; L_y = 0 \iff y - 4\,\lambda\,y = y\,(1-4\,\lambda) = 0 \iff y = 0 \text{ o bé } \lambda = \frac{1}{4}$$

$$\text{(eq3)}\;\; g = 0 \iff (x-1)^2 + 4\,y^2 = 4$$

• **Cas** $y = 0$**:** Via (eq3) obtenim:
$(x-1)^2 = 4 \implies x - 1 = \pm 2 \implies x = 1 \pm 2 \in \{3, -1\}$.
Obtenim dos punts crítics amb $y = 0$: $P_1 = (3, 0)$ i $P_2 = (-1, 0)$.
Els seus multiplicadors de Lagrange $\lambda = \dfrac{x}{x-1}$ venen donats per (eq1) i són $\lambda = 3/2$ per P_1 i $\lambda = 1/2$ per P_2.
• **Cas** $\lambda = \frac{1}{4}$**:** Via (eq1) $\Longrightarrow x = \dfrac{\lambda}{\lambda - 1} = -\dfrac{1}{3} \implies$ Via (eq3):
$4\,y^2 = 4 - (x-1)^2 = 4 - \left(-\dfrac{4}{3}\right)^2 = 4 - \dfrac{16}{9} = \dfrac{20}{9}$. Per tant:
$y^2 = \dfrac{5}{9} \implies y = \pm\dfrac{\sqrt{5}}{3}$. Obtenim dos punts crítics amb $\lambda = \dfrac{1}{4}$:
$P_3 = (-1/3, \sqrt{5}/3)$ i $P_4 = (-1/3, -\sqrt{5}/3)$.
• El valor de $f(x, y) = x^2 + y^2$ en els punts crítics és:

$$f(P_1) = 9, \quad f(P_2) = 1, \quad f(P_3) = f(P_4) = 2/3.$$

Usant que W és compacta, P_1 és el màxim absolut de f en W i P_3, P_4 els dos mínims absoluts.
Tot seguit farem l'estudi dels quatre punts crítics de $f_{|W}$ via la matriu hessiana de L, sí ve de fet només ens cal fer-lo per P_2.

Pas 2: La matriu hessiana de L en un punt generic és:

$$H(L) = \begin{pmatrix} L_{xx} & L_{xy} \\ L_{xy} & L_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2\,\lambda & 0 \\ 0 & 2-8\,\lambda \end{pmatrix}$$

Per tant:

$$H(L)_{P_1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -10 \end{pmatrix}, \quad H(L)_{P_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$
$$H(L)_{P_3} = H(L)_{P_4} = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pas 3: Calculem ∇g vectors gradient de $g = (x-1)^2 + 4\,y^2 - 4$, l'avaluem en cadascun dels quatre punts crítics, i busquem quatre vectors $\{u_j\}_{j=1}^4$ tal que $\nabla g(P_j) \perp u_j$, $j = 1, 2, 3, 4$. Llavors, la recta tangent a la corba W en cadascun dels punts crítics és:

$$T_{P_j}(W) = P_j + E_j, \qquad E_j = [u_j],$$

on E_j dóna el subespai vectorial tangent a W en P_j.

Concretament,
$g = (x-1)^2 + 4\,y^2 - 4 \implies \nabla g = (g_x, g_y) = (2\,(x-1), 8\,y)$:

$$P_1 = (3,0) \implies \nabla g(P_1) = (4,0) \implies u_1 = (0,1)$$
$$P_2 = (-1,0) \implies \nabla g(P_2) = (-4,0) \implies u_2 = (0,1)$$
$$P_3 = \left(-\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{5}}{3}\right) \implies \nabla g(P_3) = \left(-\frac{8}{3}, \frac{8\sqrt{5}}{3}\right) \implies u_3 = (\sqrt{5}, 1)$$
$$P_4 = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{\sqrt{5}}{3}\right) \implies \nabla g(P_3) = \left(-\frac{8}{3}, -\frac{8\sqrt{5}}{3}\right) \implies u_4 = (\sqrt{5}, -1)$$

Pas 4: Per cada punts crític P_j, $j = 1,2,3,4$, calculem la restricció del la forma quadràtica definida per la matriu $H_j = H(L)_{P_j}$ al s.e.v. E_j, usant que u_j és un vector que genera E_j.

• Recordeu que en els calculs hem d'usar u_j com a vector columna.

• Observeu que H_1 és definida negativa. Per tant ja podriem dir a priori, sense fer cap càlcul, que la seva restricció a E_1 també ho és.

• El resultat per P_4 és idèntic al de P_3 i no l'escriurem.

$$H_{1|E_1} = u_1^\top H_1\, u_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \end{pmatrix} = -10$$

$$H_{2|E_2} = u_2^\top H_2\, u_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} = -2$$

$$H_{3|E_3} = u_3^\top H_3\, u_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{5}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{15}{2}$$

Per tant:

- $H_{1|E_1} < 0 \implies H_{1|E_1}$ és definida negativa $\implies P_1$ màxim relatiu de f en W (de fet P_1 és el màxim absolut).
- $H_{2|E_2} < 0 \implies H_{2|E_2}$ és definida negativa $\implies P_2$ màxim relatiu de f en W.
- $H_{3|E_3} > 0 \implies H_{3|E_3}$ és definida positiva $\implies P_3$ mínim relatiu de f en W (de fet P_3, P_4 són els mínims absolut).

Problema 15(i)

Determineu els extrems locals de $f(x,y,z)$ sobre la varietat $W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : g_1(x,y,z)=g_2(x,y,z)=0\}$, on:

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= x^3+y^3+z^3 \\ g_1(x,y,z) &= x^2+y^2+z^2-5, \\ g_2(x,y,z) &= x^2+y^2+z^2-2\,x-3. \end{aligned}$$

Observeu que $g_2=0$ equival a $(x-1)^2+y^2+z^2=4$. Per tant, W és una corba de $\mathbb{R}^3$ definida com a intersecció de dues esferes (centres $(0,0,0)$, $(1,0,0)$ i radis $\sqrt{5}$ i 2, respectivament) $\Longrightarrow$ W és una circumferència de $\mathbb{R}^3$ $\Longrightarrow$ W varietat compacta $\Longrightarrow$ f assoleix els seus extrems absoluts en W (que, en particular, també són extrems locals/relatius).

Pas 1: $L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=f-\lambda_1\,g_1-\lambda_2\,g_2$ funció de Lagrange associada. Les equacions dels punts crítics $P=(x,y,z)$ de f en W i dels corresponents multiplicadors de Lagrange λ_1, λ_2, són:

$$L_x=0,\quad L_y=0,\quad L_z=0,\quad g_1=0,\quad g_2=0.$$

$$L = x^3 + y^3 + z^3 - \lambda_1 (x^2 + y^2 + z^2 - 5) - \lambda_2 (x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 3).$$

L dóna lloc a les següents equacions pels punts crics $P = (x, y, z)$ de $f_{|W}$ i pels seus multiplicadors de Lagrange associats λ_1 i λ_2:

$$\begin{aligned}
\text{(eq1)} \; L_x = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad (3x - 2\lambda_1 - 2\lambda_2)x + 2\lambda_2 = 0 \\
\text{(eq2)} \; L_y = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad (3y - 2\lambda_1 - 2\lambda_2)\, y = 0 \\
\text{(eq3)} \; L_z = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad (3z - 2\lambda_1 - 2\lambda_2)\, z = 0 \\
\text{(eq4)} \; g_1 = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x^2 + y^2 + z^2 - 5 = 0 \\
\text{(eq5)} \; g_2 = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 3 = 0
\end{aligned}$$

A partir de (eq2) i (eq3) obtenim 4 casos diferents segons s'anul·la y o z o bé les expressions que els multipliquen.

• $y = z = 0$: (eq4) i (eq5) esdevenen:

$$x^2 = 5, \qquad x^2 - 2x - 3 = 0.$$

Aquestes dues equacions no tenen cap solució en comú per x i per tant no hi ha cap punt crític amb $y = z = 0$.

• $y = 0$ i $2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 3z$:
Si fem $y = 0$ en (eq4) i (eq5), obtenim:

$$x^2 + z^2 - 5 = 0, \qquad x^2 + z^2 - 2x - 3 = 0.$$

Restant aquestes dues equacions obtenim $2x - 2 = 0 \implies x = 1$.
Per tant $z^2 = 5 - x^2 = 4 \implies z = \pm 2 \implies$ surten 2 punts crítics.
Per calcular λ_1, λ_2 substituïm $x = 1$ en (eq1) i obtenim:

$$3 - 2\lambda_1 = 0 \implies \lambda_1 = \frac{3}{2}.$$

D'aquí:

$$2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 3z \implies \lambda_2 = \frac{1}{2}(3z - 2\lambda_1) = \frac{3}{2}(z - 1).$$

Hem obtingut doncs dos punts crítics i els seus multiplicadors:

$$P_1 = (1, 0, 2), \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{3}{2},$$
$$P_2 = (1, 0, -2), \quad \lambda_1 = \frac{3}{2}, \quad \lambda_2 = -\frac{9}{2}.$$

• $z = 0$ i $2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 3y$:
Si fem $z = 0$ en (eq4) i (eq5), obtenim:

$$x^2 + y^2 - 5 = 0, \qquad x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0.$$

Idèntica discussió que abans ens diu $x = 1$, $y = \pm 2$. Per calcular λ_1, λ_2 substituïm $x = 1$ en (eq1) i obtenim $\lambda_1 = \dfrac{3}{2}$ i, després, $\lambda_2 = \dfrac{3}{2}(y-1)$. Hem obtingut doncs dos punts crítics més i els seus i multiplicadors:

$$P_3 = (1, 2, 0), \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{3}{2},$$
$$P_4 = (1, -2, 0), \quad \lambda_1 = \frac{3}{2}, \quad \lambda_2 = -\frac{9}{2}.$$

• $2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 3y$ i $2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 3z$:
En particular cal $y = z$. En aquest cas, (eq4) i (eq5) esdevenen:

$$x^2 + 2z^2 - 5 = 0, \qquad x^2 + 2z^2 - 2x - 3 = 0.$$

Restant aquestes 2 darreres equacions: $2x - 2 = 0 \implies x = 1$.
Tot seguit deduïm que $2z^2 = 4 \implies z = \pm\sqrt{2}$.
Si ara fem $x = 1$ en (eq1) obtenim $3 - 2\lambda_1 = 0 \implies \lambda_1 = \dfrac{3}{2}$.
Finalment: $\lambda_2 = \dfrac{1}{2}(3z - 2\lambda_1) = \dfrac{3}{2}(z - 1)$. Obtenim 2 punts crítics més i els seus multiplicadors:

$$P_5 = (1, \sqrt{2}, \sqrt{2}), \quad \lambda_1 = \frac{3}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{3}{2}(\sqrt{2} - 1),$$
$$P_6 = (1, -\sqrt{2}, -\sqrt{2}), \quad \lambda_1 = \frac{3}{2}, \quad \lambda_2 = -\frac{3}{2}(\sqrt{2} + 1).$$

El valor de $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3$ en els punts crítics és:

$$\begin{aligned} f(P_1) = f(P_3) = 9, &\qquad f(P_2) = f(P_4) = -7, \\ f(P_5) = 4\sqrt{2} + 1, &\qquad f(P_6) = 1 - 4\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Usant que W és compacta: P_1 i P_2 són els màxims absoluts de f en W (per tant també màxims locals/relatius); P_2 i P_4 són els mínims absoluts (per tant també mínims locals/relatius).
Queda doncs discutir els casos P_5 i P_6 via la matriu hessiana H_j de L, avaluada en el punt P_j i usant els corresponents multiplicadors, restringida al sub-espai vectorial E_j tangent a W en cada punt.
Pas 2: La matriu hessiana $H(L)$ de L en un punt genèric és:

$$\begin{pmatrix} L_{xx} & L_{xy} & L_{xz} \\ L_{xy} & L_{yy} & L_{yz} \\ L_{xz} & L_{yz} & L_{zz} \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} - 2(\lambda_1 + \lambda_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Anomenem $H_5 = H(L)_{P_5}$ i $H_6 = H(L)_{P_6}$ (triant en cada cas λ_1 i λ_2 els valors corresponents), però ara no les explicitem.

Pas 3: Calculem els vectors gradients de $g_1 = x^2 + y^2 + z^2 - 5$ i $g_2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 3$ (recordem que $\nabla g = (g_x, g_y, g_z)$):

$$\nabla g_1(x,y,z) = (2\,x,\, 2\,y,\, 2\,z)\,, \quad \nabla g_2(x,y,z) = (2\,x-2,\, 2\,y,\, 2\,z)\,.$$

$\nabla g_1(P)$ i $\nabla g_2(P)$ són $\perp$ a W en cada $P = (x,y,z) \in W$. El seu producte vectorial és doncs un vector tangent a la corba W en P. Així, el s.e.v. E director de la recta tangent $T_P W$ és $E = [u]$ on:

$$u = (\nabla g_1 \wedge \nabla g_2)(P) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2x & 2y & 2z \\ 2(x-1) & 2y & 2z \end{vmatrix} = 4(0, -z, y).$$

Pas 4: Sigui $E_j = [u_j]$ s.e.v. tangent a $T_{P_j}W$ en P_j, $j = 5, 6$.

- $P_5 = (x, y, z) = (1, \sqrt{2}, \sqrt{2})$, $\lambda_1 = \dfrac{3}{2}$, $\lambda_2 = \dfrac{3}{2}(\sqrt{2} - 1)$, $(\nabla g_1 \wedge \nabla g_2)(P_5) = 4\sqrt{2}\,(0, -1, 1)$.

Triem $E_5 = [u_5]$, amb $u_5 = (0, -1, 1)$ que tot seguit intervé als calculs matricials com **vector columna**.

La restricció de la matriu $H_5 = H(L)_{P_5}$ a E_5, usant u_5 com a base de E_5, té per matriu (1×1):

$$
\begin{aligned}
H_{5|E_5} &= u_5^\top H_5\, u_5 = (0, -1, 1) \begin{pmatrix} 0 \\ -6y + 2\lambda_1 + 2\lambda_2 \\ 6z - 2\lambda_1 - 2\lambda_2 \end{pmatrix} \\
&= 0 - (-6y + 2\lambda_1 + 2\lambda_2) + (6z - 2\lambda_1 - 2\lambda_2) \\
&= 6y + 6z - 4\lambda_1 - 4\lambda_2 = 6\sqrt{2} > 0.
\end{aligned}
$$

$H_{5|E_5}$ definida positiva $\implies$ P_5 mínim local/relatiu de f en W.

Observeu que hem usat que el vector columna $H_5\, u_5$ és:

$$\begin{pmatrix} 6x-2\lambda_1-2\lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 6y-2\lambda_1-2\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 6z-2\lambda_1-2\lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -6y+2\lambda_1+2\lambda_2 \\ 6z-2\lambda_1-2\lambda_2 \end{pmatrix}.$$

- $P_6 = (1, -\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $\lambda_1 = \frac{3}{2}$, $\lambda_2 = -\frac{3}{2}(\sqrt{2}+1)$, $(\nabla g_1 \wedge \nabla g_2)(P_6) = -4\sqrt{2}\,(0,-1,1)$.

Triem $E_6 = [u_6]$, amb $u_6 = (0,-1,1)$ i repetint els mateixos calculs anteriors, obtenim:

$$H_{6|E_6} = 6y + 6z - 4\lambda_1 - 4\lambda_2 = -6\sqrt{2} < 0.$$

$H_{6|E_6}$ definida negativa $\implies$ P_6 màxim local/relatiu de f en W.