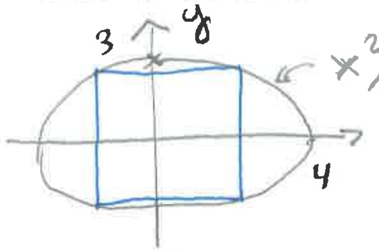
(16) Un avió de càrrega té una secció el·líptica, amb equació
$x^2/16 + y^2/9 = 1$.

(i) Volem carregar-hi contenidors de secció rectangular, paral·lels als eixos. Quines són les dimensions dels contenidors amb secció màxima que podem carregar?



Sigui $C \equiv \{g(x,y)=0\}$, amb
$g(x,y) = x^2/16 + y^2/9 - 1$ la corba

de $\mathbb{R}^2$ definida per l'el·lipse. Si triem $(x,y) \in C \cap \left\{ \begin{matrix} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{matrix} \right\}$ que sigui un dels vèrtexs del contenidor rectangular, és clar que els altres vèrtexs són $(x,-y), (-x, \pm y)$, i l'àrea de la secció rectangular del contenidor és $f(x,y) = (2x)\cdot(2y) = 4xy$. Per tant, volem maximitzar $f(x,y)$ amb la restricció $g(x,y)=0$ que, en ésser C corba compacta, llavors f assoleix els seus extrems absoluts en C. La funció de Lagrange és $L(x,y;\lambda) = f - \lambda g$, i les equacions dels punts crítics de f en C:

$$\left.\begin{matrix} L_x = 0 \\ L_y = 0 \\ g = 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} 4y - \lambda x/8 = 0 \\ 4x - 2\lambda y/9 = 0 \\ x^2/16 + y^2/9 - 1 = 0 \quad (eq3) \end{matrix}\right. \quad \left.\begin{matrix} 32y - \lambda x = 0 \\ 18x - \lambda y = 0 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \lambda x = 32y \quad (eq1) \\ \lambda y = 18x \quad (eq2) \end{matrix}$$

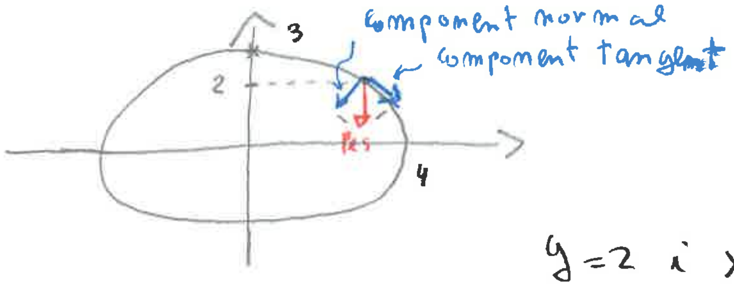
Si en (eq1), (eq2) excloem casos trivials en què $x=0, y=0, \lambda=0$ (no poden donar pas el màxim), llavors el quocient $\frac{(eq1)}{(eq2)}$ dóna: $\frac{x}{y} = \frac{16y}{9x} \Leftrightarrow \frac{x^2}{16} = \frac{y^2}{9}$

Usant arc (2493) $\Rightarrow \frac{x^2}{8} = 1 \Rightarrow x = 2\sqrt{2} \Rightarrow y^2 = \frac{9x^2}{16} = \frac{9}{2} \Rightarrow y = \frac{3}{\sqrt{2}}$

només volem $x>0$, $y>0$

Per tant la secció d'àrea màxima del contenidor rectangular té costats $2x = 4\sqrt{2}$, $2y = 6/\sqrt{2}$.

(ii) A cada costat de la secció, a alçada $y=2$, va penjada una estructura amb un pes de 10^5N. Quina component d'aquest pes és tangent a la superfície de l'avió i quina és normal?



El punt de la secció el·líptica de l'avió on penja el pes és (si triem $x>0$)

$y=2$ i $x = \sqrt{16(1-y^2/9)} = 4\sqrt{5}/3$.

El vector $\vec{u} = \nabla g(4\sqrt{5}/3, 2)$ és $\perp$ a la secció de l'avió en el punt considerat. Concretament $\nabla g = (g_x, g_y) = (x/8, 2y/9)$ i $\vec{u} = (\sqrt{5}/6, 4/9)$, que apunta cap a fora de l'el·lipse.

Per tant, si considerem $\vec{n} = -\frac{\vec{u}}{\|u\|} = \frac{(-3\sqrt{5}, -8)}{\sqrt{(3\sqrt{5})^2 + 8^2}} = \frac{(-3\sqrt{5}, -8)}{\sqrt{109}}$,

tenim el vector normal a la secció normalitzat (unitari) i apuntant cap dins de l'el·lipse i $\vec{t} = \frac{(8, -3\sqrt{5})}{\sqrt{109}}$ n'és el vector tangent en el punt considerat apuntant cap avall. Llavors, com el vector corresponent al pes és $\vec{w} = 10^5 N \cdot (0,-1)$ (apuntant cap avall), les seves projeccions en les direccions $\vec{t}$ i $\vec{n}$ són:

$\langle \vec{w}, \vec{t} \rangle = \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{109}} \cdot 10^5$ N i $\langle \vec{w}, \vec{n} \rangle = \frac{8}{\sqrt{109}} \cdot 10^5$ N