(15) Determinem els extrems locals de:

(i) $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3$ lligats per $g_1(x,y,z) = g_2(x,y,z) = 0$, on $g_1(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 5$, $g_2(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 3$.

$W = \{g_1 = g_2 = 0\}$ és una corba definida com la intersecció de dues esferes de $\mathbb{R}^3$ de centres $(0,0,0)$ i $(1,0,0)$, i radis $\sqrt{5}$ i 2, respectivament. Per tant, W és una corba compacta: f assoleix el seu màx. i mín absolut en W. Considerem la funció de Lagrange $L(x,y,z;\lambda_1,\lambda_2) = f - \lambda_1 g_1 - \lambda_2 g_2$. Les equacions dels punts crítics i multiplicadors de Lagrange són

$$\left.\begin{array}{l} L_x = 0 \\ L_y = 0 \\ L_z = 0 \\ g_1 = 0 \\ g_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} 3x^2 - 2\lambda_1 x - \lambda_2(2x-2) = 0 \Rightarrow (3x - 2\lambda_1 - 2\lambda_2)x + 2\lambda_2 = 0 & (eq_1) \\ 3y^2 - 2\lambda_1 y - 2\lambda_2 y = 0 \Rightarrow (3y - 2\lambda_1 - 2\lambda_2)y = 0 & (eq_2) \\ 3z^2 - 2\lambda_1 z - 2\lambda_2 z = 0 \Rightarrow (3z - 2\lambda_1 - 2\lambda_2)z = 0 & (eq_3) \\ x^2 + y^2 + z^2 - 5 = 0 & (eq_4) \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 3 = 0 & (eq_5) \end{array}\right.$$

. Cas $y = z = 0$: (eq_4) i (eq_5) esdevenen $x^2 = 5$ i $x^2 - 2x - 3 = 0$ que no tenen cap solució comú.

. Cas $y = 0$, $z \neq 0$: (eq_3) ens diu $2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 3z$. Substituint en (eq_1) obtenim: $(3x - 3z)x + 2\lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = -\frac{1}{2}(3x - 3z)x$ i per tant $\lambda_1 = (3z - 2\lambda_2)/2$. Finalment, si fem $y = 0$ en (eq_4) i (eq_5) $\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2 + z^2 - 5 = 0 \\ x^2 + z^2 - 2x - 3 = 0 \end{array}\right\}$. Restant les dues equacions: $2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow z^2 = 4 \Rightarrow z = \pm 2$. obtenim doncs dos punts crítics: $P_1 = (1,0,2)$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 3/2$, i $P_2 = (1,0,-2)$, $\lambda_1 = 3/2$, $\lambda_2 = -9/2$.

· Cas $y\neq 0,\ z=0$: (eq_2) ens diu $2\lambda_1+2\lambda_2=3y$. Substituint en (eq_1) obtenim: $(3x-3y)x+2\lambda_2=0 \Rightarrow \lambda_2=-\frac{1}{2}(3x-3y)x$, i per tant $\lambda_1=(3y-2\lambda_2)/2$. Finalment, si fem $z=0$ en (eq_4) i $(eq_5) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2+y^2-5=0 \\ x^2+y^2-2x-3=0 \end{array}\right\}$ on idèntica discussió a l'anterior ens dóna els següents punts crítics:

$P_3=(1,2,0)$, $\lambda_1=\lambda_2=3/2$ i $P_4=(1,-2,0)$, $\lambda_1=3/2$, $\lambda_2=-9/2$.

· Cas $y\neq 0,\ z\neq 0$: (eq_2) i (eq_3) ens diuen $\left\{\begin{array}{l} 3y-2\lambda_1-2\lambda_2=0 \\ 3z-2\lambda_1-2\lambda_2=0 \end{array}\right.$

d'on deduïm, en particular, $y=z$. Si fem $y=z$ en (eq_4) i (eq_5) obtenim $\left\{\begin{array}{l} x^2+2z^2-5=0 \\ x^2+2z^2-2x-3=0 \end{array}\right\}$. Restant aquestes equacions, obtenim de nou que $x=1$ i $2z^2=4 \Rightarrow z=\pm\sqrt{2}$. Si fem $x=1$ en $(eq_1) \Rightarrow 3-2\lambda_1=0 \Rightarrow \lambda_1=3/2$. Per tant, $\lambda_2=(3z-2\lambda_1)/2=(\pm 3\sqrt{2}-3)/2=\pm 3(\sqrt{2}\mp 1)/2$ i obtenim:

$P_5=(1,\sqrt{2},\sqrt{2})$, $\lambda_1=3/2$, $\lambda_2=3(\sqrt{2}-1)/2$

$P_6=(1,-\sqrt{2},-\sqrt{2})$, $\lambda_1=3/2$, $\lambda_2=-3(\sqrt{2}+1)/2$.

· El valor de f en els 6 punts crítics obtinguts és:

$f(P_1)=9$, $f(P_2)=-7$, $f(P_3)=9$, $f(P_4)=-7$, $f(P_5)=4\sqrt{2}+1$, $f(P_6)=1-4\sqrt{2}$. Per tant, P_1 i P_3 són els màxims absoluts de f en W i P_2, P_4 els mínims absoluts. Ens cal discutir si P_5 i P_6 són o no extrems relatius.

Per fer-ho, hem de calcular la restricció de la forma quadràtica definida per la matriu hessiana de L en cadascun dels punts a l'espai vectorial 1-D tangent a W en el punt corresponent.

Així: $H_L = \begin{pmatrix} L_{xx} & L_{xy} & L_{xz} \\ L_{xy} & L_{yy} & L_{yz} \\ L_{xz} & L_{yz} & L_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x-2\lambda_1-2\lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 6y-2\lambda_1-2\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 6z-2\lambda_1-2\lambda_2 \end{pmatrix}$

A més, $\nabla g_1 = (g_{1,x}, g_{1,y}, g_{1,z}) = (2x, 2y, 2z)$ i $\nabla g_2 = (2x-2, 2y, 2z)$

són vector $\perp$ a W en cada punt de W. Per tant,

$\nabla g_1 \wedge \nabla g_2$ dóna un vector tangent a W en cada punt.

· Concretament:

$$\nabla g_1 \wedge \nabla g_2 = 4 \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ x-1 & y & z \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 4(0, -z, y)$$

· Cas $P_5 = (1, \sqrt{2}, \sqrt{2})$, $\lambda_1 = 3/2$, $\lambda_2 = 3(\sqrt{2}-1)/2$

$(\nabla g_1 \wedge \nabla g_2)(P_5) = 4\sqrt{2}(0,-1,1)$ i triem $\vec{u}_5 = (0,-1,1)$

com a generador del s.e.v. tangent. Per tant, la restricció de $H_L(P_5)$ a $E_5 = [\vec{u}_5]$ té per "matriu":

$(0\ -1\ 1)\, H_L(P_5) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 6y + 6z - 4\lambda_1 - 4\lambda_2 = 6\sqrt{2} > 0$ def. posit.

$\Rightarrow P_5$ és un mínim local de f en W.

· Cas $P_6 = (1, -\sqrt{2}, -\sqrt{2})$. $\lambda_1 = 3/2$, $\lambda_2 = -3(\sqrt{2}+1)/2$.

$(\nabla g_1 \wedge \nabla g_2)(P_5) = -4\sqrt{2}(0,-1,1)$ i triem $\vec{u}_6 = (0,-1,1)$.

Per tant, $H_L(P_6)$ restringida a $E_6 = [\vec{u}_6]$ té per matriu: $(0\ -1\ 1)\, H_L(P_6) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 6y + 6z - 4\lambda_1 - 4\lambda_2 = -6\sqrt{2} < 0$

def. negat $\Rightarrow P_6$ és un màxim local de f en W.

(ii) $f(x,y,z) = xy + xz + yz$, lligats per $g(x,y,z) = 0$,
on $g(x,y,z) = x^2 + y^2 - z$.

- $W = \{g = 0\}$ és el paraboloide (superfície de revolució entorn de l'eix z donat per $z = x^2 + y^2$) $\Rightarrow W$ és no acotada $\Rightarrow W$ no és compacte.
- En aquest cas $L(x,y,z;\lambda) = f - \lambda g$ i les eqn's:

$$\left.\begin{array}{l} L_x = 0 \\ L_y = 0 \\ L_z = 0 \\ g = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} y + z - 2\lambda x = 0 \\ x + z - 2\lambda y = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{ll} y + z + 2x(x+y) = 0 & (eq_1) \\ x + z + 2y(x+y) = 0 & (eq_2) \end{array} \\ x + y + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -x - y \qquad (eq_3) \\ x^2 + y^2 - z = 0 \qquad (eq_4) \end{array}\right.$$

Restant $(eq_1) - (eq_2) \Rightarrow y - x + 2(x-y)(x+y) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (y - x)[1 - 2(x+y)] = 0$.

- Cas $x = y$ $\Rightarrow (eq_1)$ i (eq_2) ens diuen $z = -x - 4x^2$, substituint en (eq_4) obtenim $6x^2 + x = 0 \Rightarrow x(6x+1) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 0$ o bé $x = -1/6$. Per tant, obtenim dos punts crítics: $P_1 = (0,0,0)$, $\lambda = 0$ i $P_2 = (-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{18})$, $\lambda = 1/3$.
- Cas $x \neq y$ $\Rightarrow$ via $(eq_1) - (eq_2)$ tenim $2(x+y) = 1$. Usant (eq_1) i (eq_2), obtenim $x + y + z = 0 \Rightarrow z = -x - y = -1/2$.
Si ho apliquem a $(eq_4) \Rightarrow x^2 + y^2 = -1/2$, que no té cap solució.
- Per discutir els dos punts crítics obtinguts calculem:

$$H_L = \begin{pmatrix} L_{xx} & L_{xy} & L_{xz} \\ L_{xy} & L_{yy} & L_{yz} \\ L_{xz} & L_{yz} & L_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -2\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla g = (2x, 2y, -1).$$

- Cas $P_1=(0,0,0)$, $\lambda=0$: $\nabla g(P_1)=(0,0,-1)$ i el s.e.v tangent a W en P_1 és $E_1=[\nabla g(P_1)]^{\perp}=[\vec{u}_1,\vec{u}_2]$ on $\vec{u}_1=(1,0,0)$ i $\vec{u}_2=(0,1,0)$. A més, $H_L(P_1)=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$.

Així, la restricció de $H_L(P_1)$ a E_1, en base $\{u_1,u_2\}$, té per matriu:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}}_{\substack{\vec{u}_1,\vec{u}_2\\ \text{en files}}}\underbrace{\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}}_{H_L(P_1)}\underbrace{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}}_{\substack{u_1,u_2 \text{ en}\\ \text{columnes}}}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\\1&1\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}}_{\substack{\text{té vaps } \pm 1\\ i_+=1,\ i_-=-1,\ i_0=0}},$$

Per tant P_1 és punt de sella (no és extrem relatiu de f en W).

- Cas $P_2=(-1/6,-1/6,1/18)$, $\lambda=1/3$: $\nabla g(P_2)=(-1/3,-1/3,-1)$.

Ara $E_2=[\nabla g(P_2)]^{\perp}=\{x+y+3z=0\}=[\vec{u}_1,\vec{u}_2]$ on $\vec{u}_1=(3,0,-1)$, $\vec{u}_2=(0,3,-1)$. A més, $H_L(P_2)=\begin{pmatrix}-2/3&1&1\\1&-2/3&1\\1&1&0\end{pmatrix}$

Així, $H_L(P_2)$ restringida a E_2 dóna la matriu:

$$\begin{pmatrix}3&0&-1\\0&3&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2/3&1&1\\1&-2/3&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0\\0&3\\-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0&-1\\0&3&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3&2\\2&-3\\3&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-12&3\\3&-12\end{pmatrix}$$

Els seus menors principals són $\delta_1=-12<0$ i $\delta_2=\begin{vmatrix}-12&3\\3&-12\end{vmatrix}>0$,

Per tant la matriu és def. negat. i P_2 és un max. relatiu de f en W)