(10) Sigui r la recta del pla amb equació $x+y=5$.
Busqueu els punts de la cònica $x^2+3y^2=1$ més propers i més llunyans a r.

· La funció de la qual en volem extrems és

$$d((x,y),r) = \frac{|x+y-5|}{\sqrt{2}} \quad \left(\text{recordem: } d((x_0,y_0), ax+by=c) = \frac{|ax_0+by_0-c|}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

Per evitar arrels i valors absoluts i denominadors, treballarem amb $f(x,y)=(x+y-5)^2 = 2\cdot\left(d((x,y),r)\right)^2$ que té els mateixos extrems de $d((x,y),r)$.

Com a lligam tenim $C=\{g(x,y)=0\}$ on $g(x,y)=x^2+3y^2-1$. En ésser C (el·lipse) una corba compacta podem garantir l'existència d'extrems absoluts de $f(x,y)$ amb el lligam $g=0$.

La funció de Lagrange és:

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y) = (x+y-5)^2 - \lambda(x^2+3y^2-1)$$

i les equacions dels punts crítics de f amb el lligam g:

$$\left.\begin{array}{l} L_x=0 \\ L_y=0 \\ g=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} \left.\begin{array}{l} 2(x+y-5)-2\lambda x=0 \\ 2(x+y-5)-6\lambda y=0 \end{array}\right\} & \begin{array}{ll} (1-\lambda)x+y=5 & (eq_1) \\ x+(1-3\lambda)y=5 & (eq_2) \end{array} \\ x^2+3y^2-1=0 & (eq_3) \end{array}\right.$$

Restant $(eq_1)-(eq_2) \Rightarrow \left[-\lambda x + 3\lambda y = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\lambda(3y-x)=0}_{\text{o bé } \lambda=0 \text{ o bé } x=3y}\right]$

• Si $\lambda=0 \overset{(eq_1,eq_2)}{\Longrightarrow} x+y=5 \Rightarrow x=5-y$ substituint en (eq_3):

$$(5-y)^2+3y^2-1=0 \Leftrightarrow 4y^2-10y+24=0 \Leftrightarrow 2y^2-5y+12=0$$

Com que el discriminant del polinomi és <0 no hi ha cap solució real per y.

• Si $x = 3y$, llavors (eq$_1$) i (eq$_2$) diuen $4y - 3\lambda y = 5$, el que ens dóna $\lambda = \frac{4y-5}{3y}$ (si $y \neq 0$). De (eq$_3$) obtenim:

$(3y)^2 + 3y^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow 12y^2 = 1 \Leftrightarrow y^2 = \frac{1}{12} \Leftrightarrow y = \pm \frac{1}{2\sqrt{3}}$.

Així tenim dos punts crítics: $P_\pm = \left(\pm \frac{3}{2\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$.

És clar que un d'ells és el punt de màxima distància i l'altre el de la mín. dist.

$d(P_+, r) = \frac{|2/\sqrt{3} - 5|}{\sqrt{2}} = \frac{|2 - 5\sqrt{3}|}{\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{3} - 2}{\sqrt{6}}$ mín. absolut

$d(P_-, r) = \frac{|-2/\sqrt{3} - 5|}{\sqrt{2}} = \frac{2 + 5\sqrt{3}}{\sqrt{6}}$ max. absolut