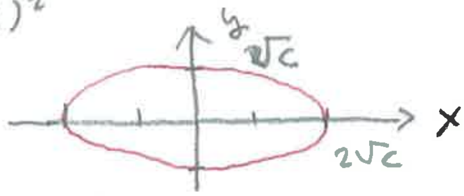
(4) Sigui $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la funció $g(x,y)=x^2/4+y^2$.
Dibuixa les corbes de nivell $W_c=\{g(x,y)-c=0\}$ per a tot $c>0$. Calcula els punts singulars de W_c, i la recta tangent i normal en els punts de $W_c\cap\{x=y\}$.

· $W_c \equiv \frac{x^2}{4}+y^2=c \underset{(c>0)}{\iff} \frac{x^2}{(2\sqrt{c})^2}+\frac{y^2}{(\sqrt{c})^2}=1$ el·lipse de centre $(0,0)$ i semi-eixos $2\sqrt{c}$, $\sqrt{c}$



· $P=(x,y)\in W_c$ és singular $\iff \nabla(g-c)=\nabla g=(0,0)$.

$g_x=x/2$, $g_y=2y$ i per tant $\nabla g=(g_x,g_y)=(0,0)$ només en $(0,0)$, que no pertany a W_c per cap $c>0$.

· Si fem $x=y$ en l'equació de W_c, obtenim:

$$\left(\frac{1}{4}+1\right)x^2=c \iff \frac{5}{4}x^2=c \iff x^2=\frac{4c}{5} \iff x=\pm\frac{2\sqrt{c}}{\sqrt{5}}$$

Per tant, per a tot $c>0$, $W_c\cap\{x=y\}=\left(\pm\frac{2\sqrt{c}}{\sqrt{5}},\pm\frac{2\sqrt{c}}{\sqrt{5}}\right)=P_\pm$

Com que $\nabla g(P_\pm)=\pm\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{5}}(1,4)\perp T_{P_\pm}W_c$, llavors:

$$N_{P_\pm}W_c=P_\pm+[(1,4)]$$

$$T_{P_\pm}W_c=\{x+4y=\pm 10\sqrt{c}/\sqrt{5}\}$$

↑ per tal que $P_\pm\in W_c$.