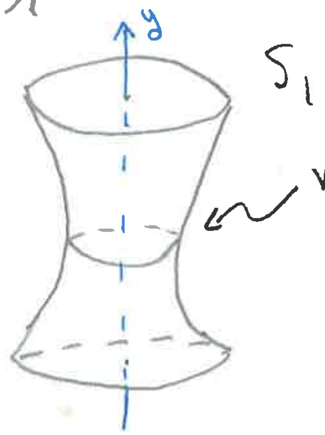
2) Per les següents varietats implícites calculeu les varietats tangent i normal en els punts indicats.

(i) $S_1 : x^2-y^2+z^2=4$ en els punts $P_1=(2,1,1)$, $P_2=(2,0,0)$

$S_1 \equiv \{g(x,y,z)=0\}$ on $g(x,y,z)= x^2-y^2+z^2-4$ és una superfície de $\mathbb{R}^3$ amb tots els punts regulars ($\nabla g=\vec{0}$ només a $(0,0,0)$ que no és de W) i tal que si fem seccions per $y=y_0\equiv$ const., defineix, en cada secció, una circumferència en el pla (x,z) de radi $\sqrt{4+y_0^2}$, això és, $x^2+z^2=\left(\sqrt{4+y_0^2}\right)^2$. Per tant, obtenim que S_1 és una superfície de revolució de la forma:



radi mínim $=2$ per $y_0=0$

s'anomena un hiperboloide d'un full.

És clar que $g(2,1,1)=g(2,0,0)=0 \Rightarrow P_1, P_2 \in S_1$

$\nabla g=(g_x,g_y,g_z)=(2x,-2y,2z)$ és $\perp T_pS_1, \forall p\in S_1$

Per tant: $\nabla g(P_1)=(4,-2,2)$, $\nabla g(P_2)=(4,0,0)$ i:

$N_{P_1}S_1=(2,1,1)+[(2,-1,1)]$, $N_{P_2}S_1=(2,0,0)+[(1,0,0)]$

$T_{P_1}S_1=\{\underbrace{2x-y+z}_{\text{via coef. } \nabla g(P_1)}=\underset{\substack{\uparrow\\ \text{per tal } P_1\in T_pS_1}}{4}\}$, $T_{P_2}S_1=\{x=2\}$

(ii) $S_2 : xyz = 1$ en el punt $Q = (1,1,1)$.

$S_2 = \{g(x,y,z) = 0\}$ on $g(x,y,z) = xyz - 1$ és una superfície de $\mathbb{R}^3$ sense cap punt singular (si volem $\nabla g = (0,0,0)$, és fàcil veure que cal que el punt tingui almenys 2 coordenades zero i per tant no compleix l'equació $g = 0$). És clar que $g(1,1,1) = 0$ i $Q \in S_2$. A més:

$\nabla g = (g_x, g_y, g_z) = (yz, xz, xy) \Rightarrow \nabla g(Q) = (1,1,1) \perp T_Q S_2$

Així: $N_Q S_2 = (1,1,1) + [(1,1,1)]$; $T_Q S_2 = \{x + y + z = 3\}$

(iii) $C \equiv \begin{cases} g_1(x,y,z) := xyz + e^{xyz} - 1 = 0 \\ g_2(x,y,z) := 2xy + z^2 - 4x = 0 \end{cases}$, en $R = (1,2,0)$

C és una corba de $\mathbb{R}^3$ i $R \in C$ ja que $g_1(R) = g_2(R) = 0$.

$\nabla g_1 = (yz(1 + e^{xyz}), xz(1 + e^{xyz}), xy(1 + e^{xyz}))$,

$\nabla g_2 = (2y - 4, 2x, 2z) \Rightarrow \nabla g_1(Q) = (0,0,4)$, $\nabla g_2(Q) = (0,2,0)$.

És clar que $\nabla g_1(Q)$ i $\nabla g_2(Q)$ són l.i., i per tant

$\text{rang}\begin{pmatrix} \nabla g_1(Q) \\ \nabla g_2(Q) \end{pmatrix} = 2 = \text{nº eq.}$ i Q és punt regular de C.

A més, com que $\nabla g_1(Q)$ i $\nabla g_2(Q)$ són $\perp$ a $T_Q C$:

$N_Q C = (1,2,0) + [(0,0,1), (0,1,0)]$

$T_Q C = (1,2,0) + [(1,0,0)]$

↑ és $\perp$ $\nabla g_1(Q)$ i $\nabla g_2(Q)$.