

Geometria

MATLAB Tema 4: Moviments

Presentació adaptada per Jordi Villanueva a partir de la d'en Joaquim Puig (Creative Commons BY-SA-NC-ND).
Veieu la web de l'assignatura per a més informació.

24 de novembre de 2020

Isometries de $\mathbb{R}^2$.

- La rotació de centre $(0, 0)$ i angle α (en sentit positiu) té matriu:

$$R = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

- La reflexió respecte d'una recta pel $(0, 0)$ perpendicular al vector (columna) $u \in \mathbb{R}^2$ té matriu:

$$S = \text{Id}_2 - \frac{2}{u^\top u} u u^\top = \text{Id}_2 - \frac{2}{\langle u, u \rangle} u u^\top.$$

Isometries de $\mathbb{R}^3$.

- La rotació respecte de la recta $[u]$ (eix de rotació pel $(0, 0, 0)$), orientada per $u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$ i d'angle α , té matriu:

$$R = \cos \alpha \text{Id}_3 + \frac{1 - \cos \alpha}{u^\top u} u u^\top + \frac{\sin \alpha}{\|u\|} \begin{pmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- La reflexió respecte del pla $\Pi = [u]^\perp$ (pel $(0, 0, 0)$) té matriu:

$$S = \text{Id}_3 - \frac{2}{u^\top u} u u^\top.$$

- La reflexió respecte del pla $\Pi = [u]^\perp$, seguida per una rotació d'eix $[u]$, orientada per u i d'angle α , és:

$$M = \cos \alpha \operatorname{Id}_3 + \frac{-1 - \cos \alpha}{u^\top u} u u^\top + \frac{\sin \alpha}{\|u\|} \begin{pmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comentaris:

- Si volem la imatge del vector (columna) v per una isometria, podem calcular-ne la matriu i multiplicar-la (per la dreta) per les components del vector o usar la fórmula compacta corresponent. P.ex., per la reflexió més rotació anterior tenim:

$$M v = \cos(\alpha) v + (-1 - \cos \alpha) \frac{\langle u, v \rangle}{\langle u, u \rangle} u + \frac{\sin \alpha}{\|u\|} u \wedge v.$$

- En MATLAB, la matriu Id_n ve donada per la comanda `eye(n)`
- En MATLAB, escriure tres punts suspensius al final d'una línia permet continuar la fórmula a la línia següent (útil si tenim fórmules llargues que ocupen més d'una línia).

$F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ moviment que té $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ com isometria associada. Si coneixem P punt fix de F (tal que $F(P) = P$) llavors la imatge d'un punt $Q \in \mathbb{R}^n$ qualsevol pel moviment es:

$$F(Q) = P + f(Q - P).$$

Moviments de $\mathbb{R}^2$.

- Un gir de $\mathbb{R}^2$ de centre (a, b) i angle α deixa $P = (a, b)$ fix.
- Una reflexió de $\mathbb{R}^2$ respecte d'una recta r (que no cal que passi pel $(0, 0)$) deixa fixos tots els punts de r .

Moviments de $\mathbb{R}^3$.

- Un gir de $\mathbb{R}^3$ entorn d'una recta r deixa fixos tots els punts de r .
- Una reflexió de $\mathbb{R}^3$ respecte d'un pla Π deixa fixos tots els punts de Π .
- Un gir de $\mathbb{R}^3$ respecte d'una recta r seguida d'una reflexió respecte d'un pla Π perpendicular a r deixa fix el punt $r \cap \Pi$.
(En cap dels tres casos cal que ni l'eix de gir r ni el pla de simetria Π passin pel $(0, 0, 0)$.)

M2/ Problema 3 I

Problema 3(i,ii)

Trobeu les matriu en base canònica de les reflexions: (i) de $\mathbb{R}^2$ respecte la recta $r = \{2x + y = 0\}$; (ii) de $\mathbb{R}^3$ respecte del pla $P = [u_1, u_2] = [(1, -3, 1), (2, 1, 1)]$.

```
>> u=[2;1]; % vector columna ortogonal recta r
>> S1=eye(2)-(2/(u'*u))*u*u'
S1 = -0.60000    -0.80000
      -0.80000     0.60000
>> u1=[1,-3,1]'; u2=[2,1,1]';
>> u3=cross(u1,u2); % perpendicular pla P
>> S2=eye(3)-(2/dot(u3,u3))*u3*u3'
S3 = 0.5152     0.1212     0.8485
      0.1212     0.9697    -0.2121
      0.8485    -0.2121    -0.4848
```

M2/ Problema 3 II

Problema 3(iii)

Trobeu la matriu en base canònica de la rotació d'angle $\alpha = \pi/3$ i eix orientat $l = \{x - 3y + z = 0, 2x + y + z = 0\}$.

Atenció: Orientem l'eix segons el vector $u_3 \parallel l$ calculat més avall.

```
>> alpha = pi/3; cosa=cos(alpha); sina=sin(alpha);  
>> u1=[1,-3,1]'; u2=[2,1,1]'; % vectors coefs eqs l  
>> u3=cross(u1,u2); % paral.lel a l que orienta el gir!  
>> R3=cosa*eye(3)+((1-cosa)/(u3'*u3))*(u3*u3')+ ...  
  (sina/norm(u3))*[0,-u3(3),u3(2);u3(3),0,-u3(1); ...  
  -u3(2),u3(1),0]  
R3=  
    0.6212    -0.7765    -0.1055  
    0.7159     0.5076     0.4794  
   -0.3187    -0.3734     0.8712
```

M3/ Problema 13 I

Fem una rotació d'angle $\alpha = \pi/3$ entorn de la recta $r = \{x - 2y + z = 2, x - 3y = 0\}$.

És un moviment F que té com isometria f associada la rotació d'angle α i eix $\{x - 2y + z = 0, x - 3y = 0\}$. Orientarem l'eix segons el vector u director de r calculat tot seguit. Tots els punts de r són fixos per F . Per calcular-ne un ho podem fer: (a) A vista; (2) Usant la comanda $A \backslash b$ del MATLAB per calcular una solució del sistema d'equacions lineals $Ax = b$ que defineix la recta r .

```
>> A=[1,-2,1;1,-3,0]; b=[2,0]'; P=A\b  
P'=  
    0    0    2  
>> u=cross(A(1,:),A(2,:))'; %prod vectorial coefs eqs recta  
u =  
     3  
     1  
    -1
```

M3/ Problema 13 II

Problema 3(i)

Calculeu la imatge per la rotació F del punt $Q = (4, 0, 3)$.

$$F(Q) = P + f(Q - P)$$

```
>> alpha=pi/3; cosa=cos(alpha); sina=sin(alpha);  
>> Q=[4,0,3]'; v=Q-P;  
>> fv=(1-cosa)*(dot(u,v)/dot(u,u))*u+cosa*v+ ...  
sina*cross(u,v)/norm(u);  
>> FQ=P+fv  
FQ =  
    3.7611  
   -1.3278  
    0.9555
```


M3/ Problema 13 III

Problema 3(ii)

Calculeu $F(r)$ on r és la recta $r = (4, 0, 3) + [(3, -2, -4)]$.

$r = Q + [vr]$ on Q és el de 3(i) i $vr = (3, -2, -4)$. La recta imatge de r per F és $F(r) = F(Q) + [f(vr)]$. Calculem doncs $fvr = f(vr)$.

```
>> vr = [3, -2, -4]';  
>> fvr = (1 - cos(alfa)) * dot(u, vr) / dot(u, u) * u + ...  
cos(alfa) * vr + sin(alfa) * cross(u, vr) / norm(u)  
fvr =  
    1.4333  
    1.8500  
   -4.8500
```

M3/ Problema 13 IV

Problema 3(iv)

Calculeu $F(\Pi)$ on Π és el pla $\Pi = \{-2x - 37y + 17z = 43\}$.

Com que coneixem l'equació de Π , buscarem la de $F(\Pi)$. Els coeficients $n = (-2, -37, 17)$ de x, y, z de l'equació de Π són un vector $n \perp \Pi$. F moviment $\implies$ la isometria f associada preserva $\perp$. Per tant, $f(n) \perp F(\Pi)$ i $f(n)$ dóna els coeficients de x, y, z de l'equació de $F(\Pi)$. Per ajustar el terme independent de l'equació de $F(\Pi)$ cal coneixer un punt de Π i calcular-ne la imatge per F . En aquest cas, el punt $Q = (4, 0, 3)$ de 3(i) és de Π . Si no veieu que $Q \in \Pi$, també podeu usar l'equació de Π per calcular un qualsevol.

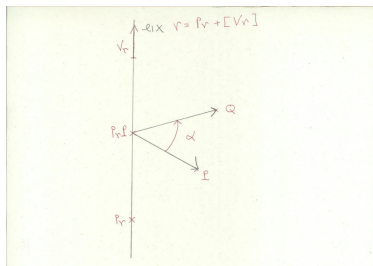
M3/ Problema 13 V

```
>> A=[-2,-37,17]; % Coefs x,y,z eq de Pi
>> n=A'; % vector perp a Pi
>> Q=[4,0,3]'; % Verifiquem si Q es de Pi:
>> res=A*Q-43 % cal res=0
res =
0
>> % AFPi=fn'=(f(n))' coeficients xyz eq F(Pi)
>> fn=(1-cos(alfa))*dot(u,n)/dot(u,u)*u+cos(alfa)*n + ...
sin(alfa)*cross(u,n)/norm(u);
>> AFPi=fn'
AFPi =
    -14.4041    -34.0220    -17.2344
>> % Equacio de F(Pi) te terme indep resFPi via FQ=F(Q)
>> resFPi=AFPi*FQ
resFPi =
    -25.4688
```

M5/ Problema 28 I

Una rotació té eix $(1, -1, 2) + [(1, 1, 1)]$ i envia $P = (0, -4, 0)$ a $Q = (-1, -2, -1)$. Identifiquen l'angle de rotació orientant l'eix amb el vector director donat.

Calculem el punt P_r definit per la projecció ortogonal de P (o Q : ha de donar el mateix punt) sobre l'eix. α és l'angle entre $\overrightarrow{P_r, P}$ i $\overrightarrow{P_r, Q}$. El signe de α surt del signe de $\text{vor} = \det(\overrightarrow{P_r, P}, \overrightarrow{P_r, Q}, \text{vr})$, on $\text{vr} = (1, 1, 1)$ vector de l'eix que orienta la rotació. Si el signe de vor és > 0 , triem $\alpha \in [0, \pi]$. Si és < 0 , $\alpha \in [-\pi, 0]$.



M5/ Problema 28 II

```
>> Pr = [1,-1,2]'; % Punt de l'eix
>> vr = [1,1,1]'; % vector director de l'eix
>> P = [0,-4,0]';
>> Q = [-1,-2,-1]';
>> % proj ortogonal de P-Pr en el s.e.v. director eix
>> prPrP=(dot(P-Pr,vr)/dot(vr,vr))*vr;
>> % projeccio ortogonal de P en l'eix
>> prP=Pr+prPrP;
>> % cosinus de l'angle
>> cosa=dot(Q-prP,P-prP)/(norm(Q-prP)*norm(P-prP))
cosa = -0.50000
>> M=[P-PrP,Q-PrP,vr]; % Matriu dels 3 vectors columna
>> vor=det(M);
>> or=sign(vor);
>> % angle tenint en compte orientacio
>> angleor=or*acos(cosa)
angleor = 2.0944
```