

Geometria

Tema 4: Moviments

Presentació adaptada per Jordi Villanueva a partir de la d'en Joaquim Puig (Creative Commons BY-SA-NC-ND).
Veieu la web de l'assignatura per a més informació.

1 de desembre de 2020

Definició (Moviment)

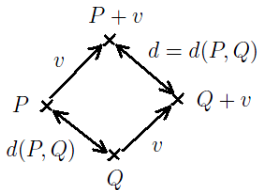
$F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ és un *moviment* (o *desplaçament*) si F conserva les distàncies entre punts. Això és, $\forall P, Q \in \mathbb{R}^n$ es té:

$$d(F(P), F(Q)) = d(P, Q).$$

Exemple

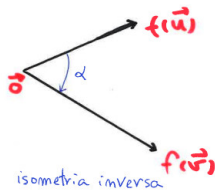
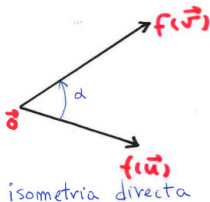
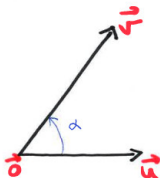
$T_{\vec{v}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ denota la translació dels punts de $\mathbb{R}^n$ mitjançant la suma d'un vector constant $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$: $T_{\vec{v}}(P) = P + \vec{v}$.

L'aplicació $T_{\vec{v}}$ conserva distàncies i per tant és un moviment de $\mathbb{R}^n$.



Definició (Isometria)

- Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineal és un moviment l'anomenarem isometria.
- $M = M_{\{e_i\}}(f)$ matriu d'una isometria f en base canònica $\implies M$ matriu ortogonal ($M^T M = \text{Id}_n$) $\implies \det(M) = \pm 1$.
- M ortogonal $\implies f(x) = Mx$ preserva el producte escalar, distàncies i angles. (Entenem $x \in \mathbb{R}^n$ vector columna).
 - ▶ $\det(M) = 1 \implies f$ isometria directa (preserva l'orientació).
 - ▶ $\det(M) = -1 \implies f$ isometria inversa (canvia l'orientació).



Teorema (d'estructura dels moviments)

$F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ moviment $\iff F$ és una isometria $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$
seguida d'una translació $T_{\vec{v}}$ $\iff F(P) = M \cdot P + \vec{v}, \forall P \in \mathbb{R}^n$.
($\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ vector i $M = M_{\{e_i\}}(f)$ matriu $n \times n$ ortogonal.)
 f s'anomena isometria associada al moviment F .

- ▶ El vector $\vec{v}$ el podem calcular fent $\vec{v} = F(0)$.
- ▶ En particular, F moviment és isometria $\iff F(0) = 0$.
- ▶ La isometria f associada és $f(u) = F(u) - F(0)$.
- ▶ També val $f(\overrightarrow{P, Q}) = F(Q) - F(P)$.

Observació

Tot moviment F de $\mathbb{R}^n$ és un canvi de referència afí $A_{\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{e}}$ de $\mathbb{R}^n$ en que la matriu del canvi de base $M = M_{\{u_i\} \rightarrow \{e_i\}}$ és ortogonal.

- ▶ $\mathbf{e} = \{0; e_1, \dots, e_n\}$ ref. canònica de $\mathbb{R}^n$ i $\mathbf{u} = \{Q; u_1, \dots, u_n\}$ nova ref. ortonormal, on $Q = F(0)$ i les components de $\{u_1, \dots, u_n\}$ en base canònica són les columnes de M .

- ▶ $A_{\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{e}} = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & \\ & M & & Q \\ & & & \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right).$

- ▶ El moviment F compleix:

$$\begin{pmatrix} F(P) \\ 1 \end{pmatrix} = A_{\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{e}} \begin{pmatrix} P \\ 1 \end{pmatrix} \iff F(P) = M \cdot P + Q = f(P) + Q,$$

$(f(X) = MX \text{ és la isometria associada.})$

Definició (Orientació directa i inversa)

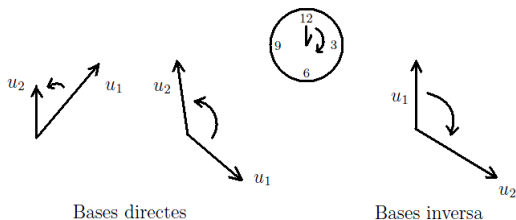
Direm que una base $\{u_i\} = \{u_1, \dots, u_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ té orientació directa si $\det(M) > 0$, on M és la matriu $n \times n$ que té per columnes les components dels vectors $\{u_i\}$ en base canònica. Altrament, si $\det(M) < 0$, direm que la base té orientació inversa.

Observació

- ▶ Si permutem l'ordre de 2 vectors de la base o canviem un dels vectors de signe, permutem el caracter dir./inv. a inv./dir.
- ▶ A $\mathbb{R}^3$, si $u_1 \nparallel u_2$ (no paral·lels) $\implies \{u_1, u_2, u_1 \wedge u_2\}$ base directa.

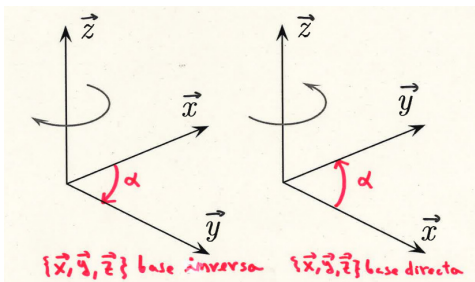
Observació (Orientació a $\mathbb{R}^2$)

Una base $\{u_1, u_2\}$ té orientació directa si el sentit de gir que determina l'angle més curt de u_1 a u_2 és directe/antihorari. La base té orientació inversa si aquest sentit de gir és invers/horari. (Observeu que en cap moment demanem que els vectors de la base hagin de ser perpendiculars.)



Observació (Orientació a $\mathbb{R}^3$)

Pensem que som sobre el pla definit pels 2 primers vectors $\{\vec{x}, \vec{y}\}$ amb el cap apuntant cap al sentit de la "barra" definida per $\vec{z}$. Base directa (dibuix dret) vol dir que llavors podem girar de $\vec{x}$ a $\vec{y}$, seguint l'angle curt, agafats de la barra amb la ma esquerra. En el cas invers (dibuix esquerra) podem girar de $\vec{x}$ a $\vec{y}$, seguint l'angle curt, agafats de la barra amb la ma dreta, no pas agafats amb la ma esquerra. Si volem que $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$ a l'esquerra sigui directa, cal que la barra $\vec{z}$ apunti cap a l'altre sentit.



Classificació isometries de $\mathbb{R}^2$

$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ isometria i $M = M_{\{e_i\}}(f)$ la seva matriu (ortogonal) en base canònica ($f(x) = Mx$). Aleshores, tenim 2 possibilitats:

• **Isometria directa** $\det(M) = 1$: f gir/rotació de centre $(0,0)$ i angle $\alpha \in [0, 2\pi)$ en sentit positiu (anti-horari), on $\alpha = \widehat{v, f(v)}$ per qualsevol $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ i $M = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$.

• **Isometria inversa** $\det(M) = -1$: f simetria/reflexió respecte d'una recta $r = [v]$ (pel $(0,0)$ i amb vector director v). La recta r és $r = [w - f(w)]^\perp$, per qualsevol $w \notin [v]$ i $M = \text{Id}_2 - \frac{2}{u^\top u} u u^\top$, on u qualsevol vector (columna) **ortogonal** a r . Si volem calcular $f(w)$ per algun $w \in \mathbb{R}^2$, però no pas M :

$$f(w) = w - 2 \frac{\langle u, w \rangle}{\langle u, u \rangle} u. \quad (\text{Recordem que } u^\top w = \langle u, w \rangle).$$

Exemple: Càlcul de $f(w)$ on f reflexió a $\mathbb{R}^2$ I

Sigui f la reflexió de $\mathbb{R}^2$ respecte de la recta $r = \{x + 3y = 0\}$.
Calculeu $f(w)$ on $w = (2, 5)$.

• **Opció 1.** Calculem $M = M_{\{e_i\}}(f)$ matriu de f en base canònica i $f(w) = M w$. Per calcular M usem que $u = (1, 3)$, definit via els coeficients de x, y en l'equació de r , és $v \perp r$. Llavors:

$$M = \text{Id}_2 - \frac{2}{u^\top \cdot u} u \cdot u^\top = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{10} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 & -3/5 \\ -3/5 & -4/5 \end{pmatrix},$$

on usem (recordem que tot vector s'escriu com a vector columna):

$$u^\top \cdot u = \langle u, u \rangle = (1 \ 3) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 1^2 + 3^2 = 10,$$

$$u \cdot u^\top = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} (1 \ 3) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Finalment: } f(w) = M \cdot w = \begin{pmatrix} 4/5 & -3/5 \\ -3/5 & -4/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7/5 \\ -26/5 \end{pmatrix}.$$

Exemple: Càlcul de $f(w)$ on f reflexió a $\mathbb{R}^2$ II

- **Opció 2.** Calculem directament $f(w)$ sense calcular prèviament la matriu M :

$$f(w) = w - 2 \frac{\langle u, w \rangle}{\langle u, u \rangle} u = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} - 2 \cdot \frac{17}{10} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7/5 \\ -26/5 \end{pmatrix},$$

on ara usem:

$$\langle u, w \rangle = \langle (1, 3), (2, 5) \rangle = 1 \cdot 2 + 3 \cdot 5 = 17, \quad \langle u, u \rangle = 10.$$

Classificació isometries de $\mathbb{R}^3$ I

$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ isometria i $M = M_{\{e_i\}}(f)$ la seva matriu (ortogonal) en base canònica ($f(x) = Mx$). Aleshores, tenim 2 possibilitats:

• **Isometria directa** $\det(M) = 1$: f rotació de $\mathbb{R}^3$ respecte d'una recta r que passa pel $(0, 0, 0)$ (eix de rotació) i angle $\theta \in (-\pi, \pi]$. Per determinar correctament l'angle de rotació (això és, per decidir si és θ o bé $-\theta$) és fonamental **orientar l'eix de rotació**. Això és: triar un vector concret $u \in \mathbb{R}^3$ tal que $r = [u]$. Canviar u per $-u$ no modifica r però sí la seva orientació i, conseqüentment, porta a canviar l'angle θ per $-\theta$. Si f és un gir d'angle θ respecte de l'eix $r = [u]$ orientat per $u = (u_1, u_2, u_3)$, llavors:

$$M = \cos \theta \cdot \text{Id}_3 + \frac{1 - \cos \theta}{u^\top u} u u^\top + \frac{\sin \theta}{\|u\|} \begin{pmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Classificació isometries de $\mathbb{R}^3$ II

- Si volem calcular $f(v)$ per algun $v \in \mathbb{R}^3$, però no pas M :

$$f(v) = \cos(\theta) v + (1 - \cos \theta) \frac{\langle u, v \rangle}{\langle u, u \rangle} u + \sin \theta \frac{u \wedge v}{\|u\|}.$$

- M matriu ortogonal 3×3 & $\det M = 1 \implies f(x) = Mx$ gir on:

- ▶ $r = [u]$ eix de gir $\iff u$ vector propi de valor propi 1 de M .
- ▶ L'angle de gir és $\theta = \widehat{w, f(w)}$, per qualsevol $w \perp u$, donat per $\cos \theta = \frac{\text{traça}(M) - 1}{2}$. (Coneixem $\theta \in (-\pi, \pi]$ tret del signe.)
- ▶ Si orientem l'eix de gir pel vector u , podem precisar l'angle de gir com segueix. Triem $v \notin [u]$ vector qualsevol que no sigui de l'eix r (no cal que v sigui ortogonal a l'eix). Llavors:
 - ▶ $\det(v, f(v), u) \geq 0 \iff \theta \in [0, \pi]$.
 - ▶ $\det(v, f(v), u) \leq 0 \iff \theta \in [-\pi, 0]$.

Classificació isometries de $\mathbb{R}^3$ III

• **Isometria inversa** $\boxed{\det(M) = -1}$: f és una rotació R respecte d'una recta $r = [u] \ni (0, 0, 0)$ i angle θ , seguida d'una simetria especular/reflexió respecte del pla $\Pi = [u]^\perp$ (ortogonal a l'eix r). Per tant: $f = S \circ R \iff M = M_{\{e_i\}}(f) = M_{\{e_i\}}(S) \cdot M_{\{e_i\}}(R)$.

- **Cas $\theta = 0$:** f reflexió respecte del pla $\Pi = [u]^\perp$, on u el podem calcular com $u = v - f(v)$, per qualsevol $v \notin \Pi$ (atenció: $v \in \Pi \iff f(v) = v$) i $M = \text{Id}_3 - \frac{2}{u^\top u} u u^\top$. Si volem calcular $f(v)$ per algun $v \in \mathbb{R}^3$, però no pas M :

$$f(v) = v - 2 \frac{\langle u, v \rangle}{\langle u, u \rangle} u.$$

Classificació isometries de $\mathbb{R}^3$ IV

- **Cas $\theta \neq 0$:** Ara $f = S \circ R$. Si orientem l'eix de rotació de R per $u = (u_1, u_2, u_3)$, la matriu de f és:

$$M = \cos \theta \cdot \text{Id}_3 + \frac{-1 - \cos \theta}{u^\top u} u u^\top + \frac{\sin \theta}{\|u\|} \begin{pmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si volem calcular $f(v)$ per algun $v \in \mathbb{R}^3$, però no pas M :

$$f(v) = \cos(\theta) v + (-1 - \cos \theta) \frac{\langle u, v \rangle}{\langle u, u \rangle} u + \sin \theta \frac{u \wedge v}{\|u\|}.$$

M matriu ortogonal 3×3 & $\det M = -1 \implies f(x) = Mx$ rotació d'angle θ i eix orientat per u , seguida de reflexió respecte $[u]^\perp$, on:

- ▶ u vector propi de valor propi -1 de M . ($Mu = -u$).
- ▶ L'angle de gir és $\theta = \widehat{w, f(w)}$, per qualsevol $w \perp u$, donat per $\cos \theta = \frac{\text{traça}(M) + 1}{2}$. (Coneixem $\theta \in (-\pi, \pi]$ tret del signe.)
- ▶ Si orientem l'eix de gir pel vector u , podem precisar l'angle de gir com segueix. Triem $v \notin [u]$ vector qualsevol que no sigui de l'eix r (no cal que v sigui ortogonal a l'eix). Llavors:
 - ▶ $\det(v, f(v), u) \geq 0 \iff \theta \in [0, \pi]$.
 - ▶ $\det(v, f(v), u) \leq 0 \iff \theta \in [-\pi, 0]$.

Exemple: Càlcul de $f(v)$ on f rotació de $\mathbb{R}^3$ I

f = rotació de $\mathbb{R}^3$ d'eix $r = [u]$ orientat per $u = (1, -4, 1)$ i angle $\theta = \pi/3$. Calculeu $f(v)$ per $v = (1, 3, 3)$.

Podem fer:

A Calcular primer $M = M_{\{e_i\}}(f)$ i després $f(v) = M v$.
(Poc recomanable ja que no ens demanen M .)

B Calcular directament $f(v)$.

• **Opció A:** $\cos \theta = \frac{1}{2}$, $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $u^\top u = \langle u, u \rangle = 18$, $\|u\| = \sqrt{18}$:

$$\begin{aligned} M &= \cos \theta \cdot \text{Id}_3 + \frac{1 - \cos \theta}{u^\top u} u u^\top + \frac{\sin \theta}{\|u\|} \begin{pmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1 - 1/2}{18} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} (1 \ -4 \ 1) + \frac{\sqrt{3}/2}{\sqrt{18}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{19}{36} & -\frac{1}{9} - \frac{1}{2\sqrt{6}} & \frac{1}{36} - \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{9} + \frac{1}{2\sqrt{6}} & \frac{17}{18} & -\frac{1}{9} - \frac{1}{2\sqrt{6}} \\ \frac{1}{36} + \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{9} + \frac{1}{2\sqrt{6}} & \frac{19}{36} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exemple: Càlcul de $f(v)$ on f rotació de $\mathbb{R}^3$ II

En particular, si $v = (1, 3, 3)$, llavors:

$$f(v) = M v = \begin{pmatrix} \frac{19}{36} & -\frac{1}{9} - \frac{1}{2\sqrt{6}} & \frac{1}{36} - \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{9} + \frac{1}{2\sqrt{6}} & \frac{17}{18} & -\frac{1}{9} - \frac{1}{2\sqrt{6}} \\ \frac{1}{36} + \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{9} + \frac{1}{2\sqrt{6}} & \frac{19}{36} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{18} - \frac{5\sqrt{6}}{4} \\ \frac{43}{18} - \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{23}{18} + \frac{7\sqrt{6}}{12} \end{pmatrix}.$$

• **Opció B:** $\cos \theta = \frac{1}{2}$, $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $u = (1, -4, 1)$, $v = (1, 3, 3)$,
 $\langle u, u \rangle = 18$, $\|u\| = \sqrt{18}$, $\langle u, v \rangle = -8$, $u \wedge v = (-15, -2, 7)$:

$$\begin{aligned} f(v) &= \cos(\theta) v + (1 - \cos \theta) \frac{\langle u, v \rangle}{\langle u, u \rangle} u + \frac{\sin \theta}{\|u\|} u \wedge v \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + (1 - 1/2) \frac{(-8)}{18} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{3}/2}{\sqrt{18}} \begin{pmatrix} -15 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{18} - \frac{5\sqrt{6}}{4} \\ \frac{43}{18} - \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{23}{18} + \frac{7\sqrt{6}}{12} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$(\text{On: } u \wedge v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = (|-4 \ 1|, -|1 \ 3|, |1 \ -4|) = (-15, -2, 7).)$$

Exemple: Càlcul de $f(w)$ on f simetria axial de $\mathbb{R}^3$ I

Sigui f la simetria axial (= rotació d'angle $\theta = \pi$) d'eix de rotació $u = (1, -1, 5)$. Calculeu $f(w)$ on $w = (3, -1, 5)$. (Únic context on no cal orientar eix de rotació: rotació d'angle π o $-\pi$ és el mateix.)

• **Opció 1.** Calculem $M = M_{\{e_i\}}(f)$ matriu de f en base canònica i $f(w) = M w$. Si $u = (u_1, u_2, u_3)$ orienta l'eix, tenim:

$$\begin{aligned} M &= \cos \theta \cdot \text{Id}_3 + \frac{1 - \cos \theta}{u^\top u} u u^\top + \frac{\sin \theta}{\|u\|} \begin{pmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{2}{27} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -1 & 1 & -5 \\ 5 & -5 & 25 \end{pmatrix} = \frac{1}{27} \begin{pmatrix} -25 & -2 & 10 \\ -2 & -25 & -10 \\ 10 & -10 & 23 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

on usem $\cos \theta = -1$, $\sin \theta = 0$, $u = (1, -1, 5)$, $u^\top u = \langle u, u \rangle = 27$,

$$u u^\top = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} (1 \ -1 \ 5) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -1 & 1 & -5 \\ 5 & -5 & 25 \end{pmatrix}.$$

Exemple: Càlcul de $f(w)$ on f simetria axial de $\mathbb{R}^3$ II

Finalment:

$$f(w) = M w = \frac{1}{27} \begin{pmatrix} -25 & -2 & 10 \\ -2 & -25 & -10 \\ 10 & -10 & 23 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -11 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

• **Opció 2.** Calculem directament $f(w)$:

$$\begin{aligned} f(w) &= \cos(\theta) w + (1 - \cos \theta) \frac{\langle u, w \rangle}{\langle u, u \rangle} u + \sin \theta \frac{u \wedge w}{\|u\|} \\ &= - \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + 2 \cdot \frac{24}{27} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -11 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

on $\langle u, w \rangle = \langle (1, -1, 5), (3, -1, 4) \rangle = 24$, però no cal calcular ni $u \wedge w$ ni $\|u\|$ ja que $\sin \theta = 0$.

Exemple: Càlcul de $f(v)$ on f rotació + reflexió de $\mathbb{R}^3$ I

$f = S \circ R$ on R rotació de $\mathbb{R}^3$ d'angle $\theta = \pi/4$ i eix $[u]$ orientat per $u = (2, 0, -3)$ i S reflexió respecte del pla $[u]^\perp$. Calculeu $f(v)$ per $v = (1, -2, 2)$.

Tenim les mateixes 2 opcions anteriors.

• **Opció A:** $\cos \theta = \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $u^\top u = \langle u, u \rangle = 13$, $\|u\| = \sqrt{13}$:

$$\begin{aligned} M &= \cos \theta \cdot \text{Id}_3 + \frac{-1 - \cos \theta}{u^\top u} u u^\top + \frac{\sin \theta}{\|u\|} \begin{pmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{-1 - \sqrt{2}/2}{13} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{9\sqrt{2}-8}{26} & \frac{3\sqrt{26}}{26} & \frac{3}{13}(2+\sqrt{2}) \\ -\frac{3\sqrt{26}}{26} & \frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{\sqrt{26}}{13} \\ \frac{3}{13}(2+\sqrt{2}) & \frac{\sqrt{26}}{13} & \frac{-9+2\sqrt{2}}{13} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exemple: Càlcul de $f(v)$ on f rotació + reflexió de $\mathbb{R}^3$ II

En particular, si $v = (1, -2, 2)$, llavors $f(v) = M v$ ve donat per:

$$f(v) = \begin{pmatrix} \frac{9\sqrt{2}-8}{26} & \frac{3\sqrt{26}}{26} & \frac{3}{13}(2+\sqrt{2}) \\ -\frac{3\sqrt{26}}{26} & \frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{\sqrt{26}}{13} \\ \frac{3}{13}(2+\sqrt{2}) & \frac{\sqrt{26}}{13} & \frac{-9+2\sqrt{2}}{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{16+21\sqrt{2}-6\sqrt{26}}{26} \\ -\frac{26\sqrt{2}+7\sqrt{26}}{26} \\ \frac{-12+7\sqrt{2}-2\sqrt{26}}{13} \end{pmatrix}$$

• **Opció B:** $\cos \theta = \sin \theta = \sqrt{2}/2$, $u = (2, 0, -3)$, $v = (1, -2, 2)$, $\langle u, u \rangle = 13$, $\|u\| = \sqrt{13}$, $\langle u, v \rangle = -4$, $u \wedge v = (-6, -7, -4)$:

$$\begin{aligned} f(v) &= \cos(\theta) v + (-1 - \cos \theta) \frac{\langle u, v \rangle}{\langle u, u \rangle} u + \frac{\sin \theta}{\|u\|} u \wedge v \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \left(-1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \frac{(-4)}{13} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} -6 \\ -7 \\ -4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{16+21\sqrt{2}-6\sqrt{26}}{26} \\ -\frac{26\sqrt{2}+7\sqrt{26}}{26} \\ \frac{-12+7\sqrt{2}-2\sqrt{26}}{13} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exemple: Càlcul elements característics d'una rotació I

$$Q = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{14} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{42} \\ 1/\sqrt{14} & 1/\sqrt{3} & -5/\sqrt{42} \\ 2/\sqrt{14} & 1/\sqrt{3} & 4/\sqrt{42} \end{pmatrix}$$

La matriu Q compleix $Q^T Q = \text{Id}_3$ (és ortogonal) i $\det Q = 1 \implies Q$ matriu d'una rotació de $\mathbb{R}^3$ d'eix $r = [u]$ i angle $\theta \in [-\pi, \pi]$.

• L'angle de rotació θ compleix $\cos \theta = \frac{\text{traça}(Q)-1}{2} \approx 0.4982$, on $\text{traça}(Q) = 3/\sqrt{14} + 1/\sqrt{3} + 4/\sqrt{42} \approx 0.9964$ (suma elements de la diagonal de Q). Si calculem $\theta = \arccos((\text{traça}(Q) - 1)/2)$, obtenim $\theta \approx 1.0493$ rad. **Sempre** podem pendre aquest valor de $\theta \in [0, \pi]$ com **el bo** si orientem r segons el vector u adequat. Això vol dir que, un cop calculem un vector u concret tal que l'eix sigui $r = [u]$, haurem de decidir si l'orientem segons u o $-u$.

Exemple: Càlcul elements característics d'una rotació II

- u donant l'eix de rotació complex que és un VEP de VAP 1 de $Q \iff (Q - \text{Id}_3)u = \vec{0} \iff u = (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ complex:

$$\begin{pmatrix} 3/\sqrt{14} - 1 & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{42} \\ 1/\sqrt{14} & 1/\sqrt{3} - 1 & -5/\sqrt{42} \\ 2/\sqrt{14} & 1/\sqrt{3} & 4/\sqrt{42} - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\det(Q - \text{Id}_3) = 0 \implies$ les 3 files de $Q - \text{Id}_3$ són linealment dependents. Com que les dues primeres files són independents, podem suprimir la 3a. fila/3a. equació. Per trobar (x, y, z) fem:

Opció 1: Resoldre el sistema lineal definit per les 2 primeres equacions.

Opció 2: Llegir les 2 primeres equacions com que $u = (x, y, z)$ és $\perp$ als vectors de les 2 primeres files de $Q - \text{Id}_3 \implies$ podem triar u com el producte vectorial de les 2 primeres files de $Q - \text{Id}_3$.

Exemple: Càlcul elements característics d'una rotació III

Si usem la **opció 2**, obtenim $u = (u_1, u_2, u_3)$ donat per:

$$\begin{aligned} u &= \left(3/\sqrt{14} - 1, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{42}} \right) \wedge \left(1/\sqrt{14}, 1/\sqrt{3} - 1, -\frac{5}{\sqrt{42}} \right) = \\ &= \left(\sqrt{\frac{2}{7}} - \frac{1}{\sqrt{42}}, \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{5}{\sqrt{42}}, 1 + 2\sqrt{\frac{2}{21}} - \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{3}{\sqrt{14}} \right). \end{aligned}$$

- Per concretar l'angle de rotació i el vector que orienta l'eix $r = [u]$, calculem $\sigma = \det(v, f(v), u)$, on v qualsevol vector $v \notin r$.
 - ▶ Si $\sigma > 0$: orientem r per u i triem l'angle $\theta \approx 0.9964$ calculat.
 - ▶ Si $\sigma < 0$: orientem r per $-u$ i triem l'angle $\theta \approx 0.9964$; o bé orientem r per u i triem l'angle $-\theta \approx -0.9964 \in [-\pi, 0]$.

Exemple: Càlcul elements característics d'una rotació IV

Triem $v = (0, 1, 0) \implies f(v) = Q v = (-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ és la segona columna de Q . Per tant, $\sigma = \det(v, f(v), u)$ és:

$$\sigma = \begin{vmatrix} 0 & -1/\sqrt{3} & u_1 \\ 1 & 1/\sqrt{3} & u_2 \\ 0 & 1/\sqrt{3} & u_3 \end{vmatrix} = \frac{u_1 + u_3}{\sqrt{3}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{42}} - \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{14}} > 0.$$

(Useu: $\sqrt{\frac{2}{7}} = \frac{2}{\sqrt{14}}$ i $\sqrt{\frac{2}{21}} = \frac{2}{\sqrt{42}}$.)

Per tant, podem orientar l'eix de rotació $r = [u]$ pel vector u que hem calcular i triar $\theta \approx 0.9964 \in [0, \pi]$ com a angle de rotació.

• **Observacio:** Si el resultat hagués estat $\sigma < 0$ i orientem l'eix per u , aleshores l'angle de rotació és $-\theta \approx -0.9964 \in [-\pi, 0]$. Un angle negatiu és correcte, però si preferim un angle positiu, també podem dir que l'angle de rotació és $2\pi - \theta \approx 5.2339 \in [\pi, 2\pi]$.

Problema 6

g_1, g_2 reflexions $\mathbb{R}^3$ amb direccions ortogonals al pla de simetria $[u_1] = [(1, 2, 2)]$ i $[u_2] = [(1, -1, 2)]$, resp. Quina mena d'isometries són $g_1 \circ g_2$ i $g_2 \circ g_1$? Trobeu els seus elements característics.

- ▶ g_1, g_2 són isometries inverses $\implies \det M_1 = \det M_2 = -1$, on $M_j = M_{\{e_i\}}(g_j)$, matriu en base canònica, és una matriu ortogonal, $M_j^\top = M_j^{-1}$, $j = 1, 2$.
- ▶ Matriu de la composició producte de matrius $\implies M_{\{e_i\}}(g_1 \circ g_2) = M_1 \cdot M_2$ i $M_{\{e_i\}}(g_2 \circ g_1) = M_2 \cdot M_1$.
- ▶ Determinant de la composició producte de determinants $\implies \det(M_{\{e_i\}}(g_1 \circ g_2)) = \det(M_{\{e_i\}}(g_2 \circ g_1)) = 1 \implies g_1 \circ g_2$ i $g_2 \circ g_1$ rotacions de $\mathbb{R}^3$ entorn d'un eix que passa pel $(0, 0, 0)$.
- ▶ Tot seguit veurem que M_1 i M_2 són simètriques, $M_j^\top = M_j$.
En ser ortogonals obtenim $M_j^{-1} = M_j \implies M_j \cdot M_j = \text{Id}$.
- ▶ En conseqüència, deduïm que $M_{\{e_i\}}(g_1 \circ g_2)$ i $M_{\{e_i\}}(g_2 \circ g_1)$ són matrius inverses l'una de l'altre:

$$M_{\{e_i\}}(g_1 \circ g_2) \cdot M_{\{e_i\}}(g_2 \circ g_1) = M_1 \cdot \underbrace{M_2 \cdot M_2}_{\text{Id}} \cdot M_1 = M_1 \cdot M_1 = \text{Id}.$$

Useu la fórmula $M_{\{e_i\}}(g) = \text{Id}_3 - \frac{2}{u^\top u} u u^\top$, on g reflexió respecte del pla $[u]^\perp$. Fet $u_1 = (1, 2, 2)$ i $u_2 = (1, -1, 2)$, s'obté:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{9} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} (1 \ 2 \ 2)}_{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 7 & -4 & -4 \\ -4 & 1 & -8 \\ -4 & -8 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{6} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} (1 \ -1 \ 2)}_{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Tal com hem dit, M_1 i M_2 son matrius ortogonals i simètriques.

Busquem les matrius de $g_1 \circ g_2$ i $g_2 \circ g_1$ com a producte de matrius:

$$\begin{aligned} M_{\{e_i\}}(g_1 \circ g_2) &= M_1 \cdot M_2 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 7 & -4 & -4 \\ -4 & 1 & -8 \\ -4 & -8 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{27} \begin{pmatrix} 18 & -9 & -18 \\ 9 & -18 & 18 \\ -18 & -18 & -9 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{\{e_i\}}(g_2 \circ g_1) &= M_2 \cdot M_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 7 & -4 & -4 \\ -4 & 1 & -8 \\ -4 & -8 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{27} \begin{pmatrix} 18 & 9 & -18 \\ -9 & -18 & -18 \\ -18 & 18 & -9 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Hem vist que aquestes dues matrius són una l'inversa de l'altre, només cal fer els càlculs per una d'elles. L'altre serà una rotació del mateix eix canviant l'angle de signe. Triem $M = M_{\{e_i\}}(g_1 \circ g_2)$.

L'eix de gir de la rotació $g_1 \circ g_2$ ve donat per $[v]$, on $v = (x, y, z)$ és un VEP de VAP $\lambda = 1$ de M . Per tant compleix:

$$(M - \lambda \text{Id}_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & -5 & 2 \\ -2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\implies \begin{cases} -x - y - 2z = 0 \\ x - 5y + 2z = 0 \\ -2x - 2y - 4z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -2z \\ y = 0 \end{cases} \underbrace{\implies}_{z=-1} v = (2, 0, -1)$$

Si orientem l'eix de gir segons v , el signe de l'angle θ de rotació és el signe de $\sigma = \det(u, Mu, v)$, on u vector qualsevol $u \notin [v]$. Triem $u = (1, 0, 0) \implies Mu = \frac{1}{3}(2, 1, -2)$ (primera columna M). Així:

$$\sigma = \begin{vmatrix} 1 & 2/3 & 2 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & -2/3 & -1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}.$$

Finalment: $\cos \theta = \frac{\text{tr}(M) - 1}{2} = \frac{-\frac{1}{3} - 1}{2} = -\frac{2}{3}.$

Per tant: $\theta = -\arccos(-2/3) \approx -2.3005 \text{ rad} \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}].$

Els angles d'Euler

- ▶ Si un sòlid rígid és mou en l'espai mantenint un punt fix, el seu moviment ha de ser una rotació. S'entén que durant el moviment l'eix i l'angle de rotació canvien com a funció del temps de forma contínua.
- ▶ Exemples d'aquesta afirmació són una asteroide que gira entorn del seu centre de masses i un telescopi que orientem fent-lo girar entorn d'un punt de suport fixat.
- ▶ Els angles d'Euler són la manera clàssica de descriure aquest moviment de gir. Es tracta de descomposar la rotació com a composició de 3 rotacions d'eixos adequats formant una b.o.n.
- ▶ La que expliquem no és l'única forma d'introduir els angles d'Euler.

Teorema (Angles d'Euler)

Sigui R una rotació de $\mathbb{R}^3$ (de cert eix i angle) i $\{e_1, e_2, e_3\}$ una b.o.n. directa (donada). Aleshores existeixen angles, anomenats angles d'Euler, $\alpha \in [0, 2\pi)$, $\beta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $\gamma \in [0, 2\pi)$, tals que:

$$R = g_{1,\gamma} \circ g_{2,-\beta} \circ g_{3,\alpha}, \quad \text{on:}$$

- (1) $g_{3,\alpha}$ = rotació d'eix $[e_3]$ i angle α (s'entén orientat per e_3).
- (2) $g_{2,-\beta}$ = rotació d'eix $[g_{3,\alpha}(e_2)]$ i angle $-\beta$.
- (3) $g_{1,\gamma}$ = rotació d'eix $[g_{2,-\beta}(g_{3,\alpha}(e_1))]$ i angle γ .

També podem escriure: $R = R_{Z,\alpha} \circ R_{Y,-\beta} \circ R_{X,\gamma}$, on:

- (i) $R_{Z,\alpha}$ = rotació d'eix $[e_3]$ i angle α .
- (ii) $R_{Y,-\beta}$ = rotació d'eix $[e_2]$ i angle $-\beta$.
- (iii) $R_{X,\gamma}$ = rotació d'eix $[e_1]$ i angle γ .

Triem $\{e_1, e_2, e_3\}$ base canònica de $\mathbb{R}^3$ i X, Y, Z eixos coordenats.

- ▶ Una idea per donar el gir concret que ens permet orientar un telescopi és fer primer un gir d'eix Z (d'un cert angle), seguit d'un d'eix Y i després d'un d'eix X . Aquesta descomposició **NO ÉS** la que defineix els angles d'Euler.
- ▶ Definim els angles d'Euler en la pell de l'astrònom/a orientant el telescopi i que ell/a mateix/a fa simultàniament tots els moviments de gir. El primer gir el fa d'eix Z . Un cop fet aquest gir, l'astrònom/a perd de vista on era l'eix Y original. El que sí controla és on ha anat a parar l'eix Y després del primer gir. P. ex., si tenia un braç estirat en la direcció Y original, després del primer gir el té estirat en la direcció Y transformada. Per això és natural que el segon gir se li demani fer al voltant de l'eix obtingut després de girar l'eix Y pel primer gir. Tot segit, el tercer gir el farà entorn de l'eix que s'obté després de girar l'eix X pel primer i el segon gir, successivament.

$R = g_{1,\gamma} \circ g_{2,-\beta} \circ g_{3,\alpha}$ per la forma que hem construït els angles d'Euler. Una conseqüència no òbvia és l'expressió alternativa $R = R_{Z,\alpha} \circ R_{Y,-\beta} \circ R_{X,\gamma}$ que, de forma matricial, ens diu que la matriu $M = M_{\{e_i\}}(R)$ es pot escriure en termes de α, β, γ com:

$$M = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \cos \gamma - \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma & \sin \alpha \sin \gamma - \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma \\ \sin \alpha \cos \beta & \cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma & -\cos \alpha \sin \gamma - \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma \\ \sin \beta & \cos \beta \sin \gamma & \cos \beta \cos \gamma \end{pmatrix}.$$

Per tant, si ens donen la matriu M d'una rotació concreta, igualant els seus coeficients als de dalt podem calcular quins són els valors dels angles d'Euler α, β, γ associats a aquesta rotació.

Teorema (Càlcul dels angles d'Euler)

sigui $M = M_{\{e_i\}}(R)$ la matriu d'una rotació:

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Aleshores els seus angles d'Euler $\alpha \in [0, 2\pi)$, $\beta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $\gamma \in [0, 2\pi)$, els podem determinar via les fórmules següents:

$$\sin \beta = a_{31} \implies \text{determina } \beta.$$

$$\cos \alpha = \frac{a_{11}}{\sqrt{1 - a_{31}^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{a_{21}}{\sqrt{1 - a_{31}^2}} \implies \text{determina } \alpha.$$

$$\cos \gamma = \frac{a_{33}}{\sqrt{1 - a_{31}^2}}, \quad \sin \gamma = \frac{a_{32}}{\sqrt{1 - a_{31}^2}} \implies \text{determina } \gamma.$$

Exemple

Calculeu els angles d'Euler per la matriu M de la rotació d'angle $\theta = \pi/4$ respecte de l'eix $[u]$ orientat per $u = (2, 0, -3)$.

Usant $\cos \theta = \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $u^\top u = 13$, $\|u\| = \sqrt{13}$:

$$\begin{aligned} M &= \cos \theta \cdot \text{Id}_3 + \frac{1 - \cos \theta}{u^\top u} u u^\top + \frac{\sin \theta}{\|u\|} \begin{pmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1 - \sqrt{2}/2}{13} \begin{pmatrix} 4 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 9 \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{9\sqrt{2}+8}{26} & \frac{3\sqrt{26}}{26} & \frac{3}{13}(-2+\sqrt{2}) \\ -\frac{3\sqrt{26}}{26} & \frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{\sqrt{26}}{13} \\ \frac{3}{13}(-2+\sqrt{2}) & \frac{\sqrt{26}}{13} & \frac{9+2\sqrt{2}}{13} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Per tant: $a_{31} = \frac{3}{13}(-2 + \sqrt{2}) \approx -0.135$, $a_{11} = \frac{9\sqrt{2}+8}{26} \approx 0.797$,
 $a_{21} = -\frac{3\sqrt{26}}{26} \approx -0.588$, $a_{33} = \frac{9+2\sqrt{2}}{13} \approx 0.910$, $a_{32} = \frac{\sqrt{26}}{13} \approx 0.392$.

Els angles d'Euler són per tant:

- ▶ $\sin \beta = a_{31} \approx -0.135 \Rightarrow \beta \approx \arcsin(-0.135) \approx -0.136 \text{ rad}$
(el resultat de la calculadora directament dona $\beta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}).$)

- ▶
$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{a_{11}}{\sqrt{1-a_{31}^2}} \approx \frac{0.797}{\sqrt{1-0.135^2}} \approx 0.805 > 0 \\ \sin \alpha &= \frac{a_{21}}{\sqrt{1-a_{31}^2}} \approx \frac{-0.588}{\sqrt{1-0.135^2}} \approx -0.594 < 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\alpha \in (\frac{3\pi}{4}, 2\pi) \\ &\text{(quart quadrant)} \end{aligned}$$

$\arccos(0.805) \approx 0.635 \text{ rad}$ dona un angle del primer quadrant.

El valor bo és $\alpha \approx 2\pi - 0.635 \approx 5.848 \text{ rad}$.

- ▶
$$\left. \begin{aligned} \cos \gamma &= \frac{a_{33}}{\sqrt{1-a_{31}^2}} \approx \frac{0.910}{\sqrt{1-0.135^2}} \approx 0.918 > 0 \\ \sin \gamma &= \frac{a_{32}}{\sqrt{1-a_{31}^2}} \approx \frac{0.392}{\sqrt{1-0.135^2}} \approx 0.396 > 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\gamma \in (0, \frac{\pi}{2}) \\ &\text{(primer quadrant)} \end{aligned}$$

En aquest cas, $\gamma \approx \arccos(0.918) \approx 0.407 \text{ rad}$ dona el resultat bo en $(0, \pi/2)$.

Representació dels moviments de $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$

Hi ha dos mètodes (interdependents) de representar els moviments:

- ▶ **Mètode 1.** Usar el Teorema d'estructura: tot moviment F és de la forma $F = T_v \circ f$ composició d'una isometria f (canvi d'eixos) i d'una translació T_v (canvi d'origen). Si representem F així, T_v i f operen de forma separada i, de fet, estem tractant el moviment com un canvi de referència ortonormal.
- ▶ **Mètode 2.** Buscar una *forma simplificada* per F que no necessàriament involucra l'acció de la isometria f associada. Per exemple, si F és una rotació de $\mathbb{R}^2$ entorn $(0,0)$ seguida de translació pel vector v , llavors el moviment F resultant és de fet una rotació (del mateix angle) però entorn de l'únic punt fix P de F (en general diferent del $(0,0)$).
(Recordem: P és punt fix de $F \iff F(P) = P$.)

Si un moviment F és $F = T_v \circ f$, llavors les formes simplifiades de $F \neq \text{Id}$ són les que segueixen.

Moviments a $\mathbb{R}^2$: formes simplificades de F

Recordem: P és punt fix de $F \iff F(P) = P$.

isometria f	moviment $F = T_v \circ f$
$\det f = +1$ (directa): f rotació d'angle θ entorn a $O = (0, 0)$	Si F té un punt fix $P \implies F$ rotació d'angle θ entorn P o Si F no té cap punt fix $\implies f = \text{Id}$ i F translació
$\det f = -1$ (inversa): f reflexió respecte recta $r = [u] \ni O$	Si F té una recta $P + [u]$ de punts fixos $\implies$ F reflexió resp. recta $P + [u]$ o Si F no té cap punt fix $\implies F$ reflexió resp. d'una recta $\tilde{r} \parallel r$ seguida de translació $T_{\tilde{u}}$ de vector $\tilde{u} \parallel u$

Moviments a $\mathbb{R}^3$: formes simplificades de F si f directa

isometria f	moviment $F = T_v \circ f$
$\det f = +1$ (directa): f rotació d'angle θ i eix $r = [u] \ni O$ on $O = (0,0,0)$	Si F té una recta de punts fixos $P + [u] \implies$ F rotació d'angle θ i eix $P + [u]$ o Si F no té cap punt fix $\implies$ F rotació d'angle θ i eix $\tilde{r} \parallel r$ seguida d'una translació $T_{\tilde{u}}$ de vector $\tilde{u} \parallel u$ (moviment helicoidal)

Moviments a $\mathbb{R}^3$: formes simplificades de F si f inversa

isometria f	moviment $F = T_v \circ f$
$\det f = -1$ (inversa): f rotació d'angle θ i eix $r = [u] \ni O$ seguida de reflexió resp. del pla $\Pi = r^\perp \ni O$	Si F té un únic punt fix $P \implies F$ rotació d'angle $\theta \neq 0$ i eix $\tilde{r} = P + [u]$ seguida de reflexió resp. pla $\tilde{\Pi} = P + [u]^\perp \perp \tilde{r}$ o Si F no té cap punt fix $\implies \theta = 0$ i F reflexió resp. d'un pla $\tilde{\Pi} \perp r$ seguida de translació $T_{\tilde{u}}$ on $\tilde{u} \parallel \tilde{\Pi}, \Pi$ o Si F té un pla $\tilde{\Pi} \parallel \Pi$ de punts fixos $\implies F$ reflexió resp. de $\tilde{\Pi}$ (no hi ha cap translació)

Càlcul de les expressions d'un moviment F

- ▶ **Pas 1.** Identificar la isometria f associada a F i trobar-ne la seva expressió.
- ▶ **Pas 2.** Calcular algun punt fix P de F (en el cas que F tingui punts fixos!). P verifica $F(P) = P$. Si volem calcular $F(Q)$ per algun altre punt Q , podem fer:

$$F(Q) = P + f(\overrightarrow{PQ}) = P + f(Q - P).$$

Exemple: F rotació a $\mathbb{R}^2$ entorn d'un punt I

F rotació de $\mathbb{R}^2$ de centre $P = (2, -1)$ i angle $\theta = -\pi/3$. Calculeu $F(I)$ on I és la recta $I = Q + [v]$, amb $Q = (1, 4)$ i $v = (5, 7)$.

Denotem per f la isometria associada a F i per M la seva matriu en base canònica. Usant que el moviment F actua sobre punts i la isometria f sobre vectors es té:

$$F(I) = F(Q + [v]) = F(Q) + [f(v)] = \left(\frac{3 + 5\sqrt{3}}{2}, \frac{3 + \sqrt{3}}{2} \right) + [(5 + 7\sqrt{3}, 7 - 5\sqrt{3})].$$

Vegem-ho. Primer calculem M :

$$M = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\frac{\pi}{3}) & -\sin(-\frac{\pi}{3}) \\ \sin(-\frac{\pi}{3}) & \cos(-\frac{\pi}{3}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Per tant: } f(v) = M v = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5 + 7\sqrt{3}}{2} \\ \frac{7 - 5\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

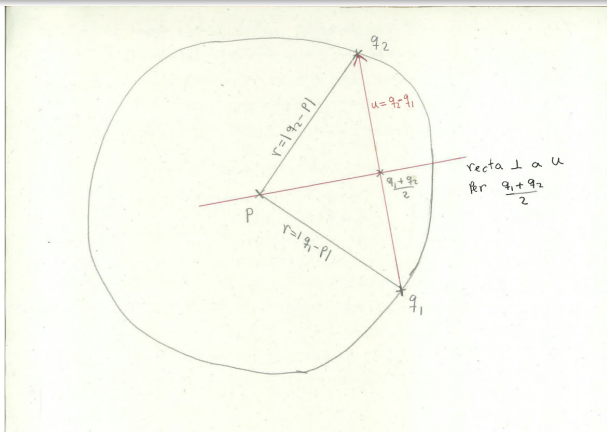
Exemple: F rotació a $\mathbb{R}^2$ entorn d'un punt II

Usant que $P = (2, -1)$ és punt fix de F (això és, $F(P) = P$) es té:

$$\begin{aligned} F(Q) &= F(P + \overrightarrow{PQ}) = P + f(\overrightarrow{PQ}) = P + f(Q - P) \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + M \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3 + 5\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3 + \sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Problema 18

1. Sigui F un gir de $\mathbb{R}^2$ al voltant d'un punt p . Si $F(q_1) = q_2$, demostreu que p pertany a la recta perpendicular a $u = q_2 - q_1$ i que conté al punt $(q_1 + q_2)/2$.
2. Trobeu el gir de $\mathbb{R}^2$ que verifica $F(1, 1) = (-1, 3)$ i que $F(2, 0) = (0, 4)$ (equacions, centre i angle de gir).



1. q_1, q_2 viuen en una circumferència de centre p i és sabut que que la recta perpendicular a la corda que els uneix i que passa pel seu punt mig $\frac{q_1+q_2}{2}$ sempre talla el centre p de la circumferència.
2. Fent $q_1 = (1, 1)$, $q_2 = (-1, 3)$ i $\bar{q}_1 = (2, 0)$, $\bar{q}_2 = (0, 4)$, per 1. el centre del gir és $p = (-1, 1)$ intersecció de les rectes:

$$-x + y = 2 \text{ (recta } \perp \text{ a } u = q_2 - q_1 = (-2, 2) \text{ per } \frac{q_1+q_2}{2} = (0, 2))$$

$$-x + 2y = 3 \text{ (recta } \perp \text{ a } \bar{u} = \bar{q}_2 - \bar{q}_1 = (-2, 4) \text{ per } \frac{\bar{q}_1+\bar{q}_2}{2} = (1, 2))$$

L'angle θ de gir és l'angle curt format pels vectors $\overrightarrow{pq_1} = (2, 0)$ i $\overrightarrow{pq_2} = (0, 2)$. En ser vectors $\perp$ i $\det(\overrightarrow{pq_1}, \overrightarrow{pq_2}) = 4 > 0$ (orientació positiva), és $\theta = \frac{\pi}{2}$ (en general usem $\cos \theta = \frac{\langle \overrightarrow{pq_1}, \overrightarrow{pq_2} \rangle}{\|\overrightarrow{pq_1}\| \cdot \|\overrightarrow{pq_2}\|}$). Com que $p = (-1, 1)$ és un punt fix de F , si M és la matriu de la isometria associada és té $F(q) = p + M(q - p)$:

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x + 1 \\ y - 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x + 1 \\ y - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 - (y - 1) \\ 1 + (x + 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x + 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exemple: F reflexió a $\mathbb{R}^2$ respecte d'una recta l

F reflexió de $\mathbb{R}^2$ respecte de la recta $r = \{x - y = 5\}$. Calculeu $F(l)$ on l és la recta d'equació $l = \{x - 5y = 1\}$.

- Denotem per f la isometria associada a F , que ve donada per la reflexió respecte la recta $x - y = 0$. Com que $u = (1, -1) \perp$ recta de reflexió i $\langle u, u \rangle = 2$, és té:

$$f(w) = w - 2 \frac{\langle u, w \rangle}{\langle u, u \rangle} u = w - \langle (1, -1), w \rangle \cdot (1, -1).$$

- És clar que tot punt $P \in r$ és un punt fix del moviment F . Fent, p. ex., $y = 0$ en l'equació de r , obtenim $P = (5, 0)$. Així:

$$\begin{aligned} F(Q) &= P + \underbrace{f(Q - P)}_w = P + (Q - P) - \langle (1, -1), Q - P \rangle \cdot (1, -1) \\ &= Q - \langle (1, -1), Q - (5, 0) \rangle \cdot (1, -1). \end{aligned}$$

- Apliquem aquesta fórmula per calcular un punt de $F(l)$. Fent, p. ex., $y = 0$ en l'equació de l , obtenim $Q = (1, 0) \in l$. Per tant:

$$\begin{aligned} F(1, 0) &= (1, 0) - \langle (1, -1), (1, 0) - (5, 0) \rangle \cdot (1, -1) \\ &= (1, 0) - \langle (1, -1), (-4, 0) \rangle \cdot (1, -1) = (5, -4) \in F(l). \end{aligned}$$

Exemple: F reflexió a $\mathbb{R}^2$ respecte d'una recta II

- Per calcular la recta $F(l)$ ara tenim dues opcions.
 1. **Buscar l'equació de $F(l)$.** Triem $v_1 = (1, -5) \perp l$ definit via els coeficients de x, y en l'equació de l i calculem $f(v_1)$.
 f isometria $\implies f$ preserva ortogonalitat $\implies f(v_1) \perp F(l)$.
Per tant, $F(v_1)$ ens permet definir els coeficients de x, y en l'equació de $F(l)$. Concretament, fent $w = v_1$ en la fórmula pel càlcul de f en la pàgina anterior:

$$\begin{aligned}f(v_1) &= (1, -5) - \langle (1, -1), (1, -5) \rangle \cdot (1, -1) \\ &= (1, -5) - 6(1, -1) = (-5, 1).\end{aligned}$$

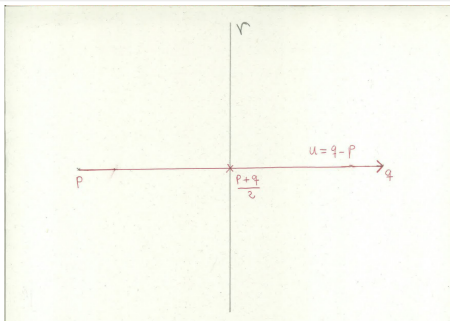
Així: $F(l) = \{-5x + y = c\}$, on c la triem per tal que $F(Q) = (5, -4) \in F(l)$ calculat en la pàgina anterior verifiqui l'equació. Obtenim:

$$c = -5 \cdot 5 + (-4) = -29 \implies F(l) = \{-5x + y = -29\}.$$

2. **Forma paramètrica de $F(l)$.** $v_2 = (5, 1) \perp v_1 \implies v_2 \parallel l$
 $\implies F(l) = F(Q) + [f(v_2)] = (5, -4) + [(1, 5)]$. (No ens cal calcular $f(v_2)$ si usem que $f(v_2) \perp f(v_1) = (-5, 1)$.)

Problema 19

1. Sigui F una simetria respecte a una recta r de $\mathbb{R}^2$. Si $F(p) = q$, demostreu que r és la recta perpendicular a $u = q - p$ que conté al punt $(p + q)/2$.
2. Trobeu la simetria axial de $\mathbb{R}^2$ que verifica $F(2, 3) = (1, 1)$ (equacions i eix de simetria).



1. Gràficament és clar: per definició de simetria respecte de la recta r és té que $\frac{p+q}{2} \in r$ i que el vector $u = q - p \perp r$.

2. Fem $p = (2, 3)$, $q = (1, 1)$. Per 1., $r = \{x + 2y = 11/2\}$ és la recta $\perp u = q - p = (-1, -2)$ pel punt $m = \frac{p+q}{2} = (3/2, 2)$.

Usant que $u \perp r$, l'isometria associada de matriu M donada per:

$$\begin{aligned} M &= \text{Id}_2 - \frac{2}{u^\top u} u u^\top = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Finalment, com que $m = (3/2, 2) \in r$ és un punt fix of F , tenim:

$$\begin{aligned} F(x, y) &= m + M \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - m \right) \\ &= \begin{pmatrix} 3/2 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - 3/2 \\ y - 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3/2 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 3(x - 3/2) - 4(y - 2) \\ -4(x - 3/2) - 3(y - 2) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 11 + 3x - 4y \\ 22 - 4x - 3y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exemple: F rotació de $\mathbb{R}^3$ respecte d'un eix l

F rotació de $\mathbb{R}^3$ d'angle $\theta = \pi/2$ respecte de l'eix donat per la recta $r = P + [u]$, on $P = (2, 2, -1)$, orientada segons el vector $u = (1, 3, 5)$. Calculeu $F(l)$ on l és la recta d'equacions: $l = \{x - y + 2z = 1, x + y + z = 3\}$.

- Denotem per f la isometria associada a F , que ve donada pel gir d'angle $\theta = \pi/2$ i eix $[u]$ orientat per u . Tenim doncs:

$$\begin{aligned} f(w) &= \cos(\theta) w + (1 - \cos \theta) \frac{\langle u, w \rangle}{\langle u, u \rangle} u + \sin \theta \frac{u \wedge w}{\|u\|} \\ &= \frac{\langle (1, 3, 5), w \rangle}{35} (1, 3, 5) + \frac{(1, 3, 5) \wedge w}{\sqrt{35}}, \end{aligned}$$

on: $\cos \theta = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$, $\sin \theta = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1$, $\langle u, u \rangle = \|u\|^2 = 35$.

- Tots els punts de la recta r són punts fixos de F . Triem, p. ex., $P = (2, 2, -1) \in r$. Així:

$$F(Q) = P + f(Q - P), \quad \text{on } P = (2, 2, -1).$$

Exemple: F rotació de $\mathbb{R}^3$ respecte d'un eix II

- Considerem la forma paramètrica $l = Q + [v]$ amb:
 - ▶ $Q = (2, 1, 0) \in l$ l'obtenim fent $z = 0$ en les equacions de l .
 - ▶ $v = (1, -1, 2) \wedge (1, 1, 1) = (-3, 1, 2)$ director de l definit via el producte vectorial dels coeficients de x, y, z en les equacions.
- Per tant $F(l) = F(Q) + [f(v)]$, on usant que $Q - P = (0, -1, 1)$:

$$\begin{aligned}f(Q - P) &= \frac{\langle (1, 3, 5), (0, -1, 1) \rangle}{35} (1, 3, 5) + \frac{(1, 3, 5) \wedge (0, -1, 1)}{\sqrt{35}} \\&= \frac{2}{35} (1, 3, 5) + \frac{(8, -1, -1)}{\sqrt{35}} = \frac{1}{35} (2 + 8\sqrt{35}, 6 - \sqrt{35}, 10 - \sqrt{35}) \\F(Q) &= (2, 2, -1) + f(Q - P) = \frac{1}{35} (37 + 8\sqrt{35}, 76 - \sqrt{35}, -25 - \sqrt{35}) \\f(v) &= \frac{\langle (1, 3, 5), (-3, 1, 2) \rangle}{35} (1, 3, 5) + \frac{(1, 3, 5) \wedge (-3, 1, 2)}{\sqrt{35}} \\&= \frac{10}{35} (1, 3, 5) + \frac{(1, -17, 10)}{\sqrt{35}} = \frac{(10 + \sqrt{35}, 30 - 17\sqrt{35}, 50 + 10\sqrt{35})}{35}\end{aligned}$$

Problema 20

1. Sigui F una rotació al voltant d'una recta r de $\mathbb{R}^3$. Si $F(q_1) = q_2$, demostreu que l'eix r pertany al pla Π perpendicular al vector $u = q_2 - q_1$ i que conté al punt $(q_1 + q_2)/2$.
2. Si F és una rotació de $\mathbb{R}^3$ tal que $F(1, 1, 1) = (1, 1, 0)$ i que $F(0, 1, 0) = (1, 0, 1)$, trobeu-ne l'eix, l'angle de gir i equacions.

1. El dibuix és anàleg al de la rotació plana de l'apartat 1. del problema 18, només que ara el dibuix viu al pla $\Sigma \perp r$ i que passa per q_1, q_2 , èssent p en el dibuix el punt $p = \Sigma \cap r$.

2. Fent $q_1 = (1, 1, 1)$, $q_2 = (1, 1, 0)$ i $\bar{q}_1 = (0, 1, 0)$, $\bar{q}_2 = (1, 0, 1)$, per 1. l'eix de gir és $r = \Pi \cap \bar{\Pi}$ intersecció dels plans:

$$\Pi = \left\{ z = \frac{1}{2} \right\} \perp u = q_2 - q_1 = (0, 0, -1) \text{ per } \frac{q_1 + q_2}{2} = (1, 1, \frac{1}{2})$$

$$\bar{\Pi} = \left\{ x - y + z = \frac{1}{2} \right\} \perp u = \bar{q}_2 - \bar{q}_1 = (1, -1, 1) \text{ per } \frac{\bar{q}_1 + \bar{q}_2}{2} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

Per tant $r = \{z = 1/2, x - y = 0\} = (0, 0, 1/2) + [(1, 1, 0)]$, on $u = (1, 1, 0) = (0, 0, 1) \wedge (1, -1, 0) \parallel r$.

Per calcular l'angle θ de la rotació, considerem un vector $v \perp$ a l'eix de rotació r i calculem $\theta = \widehat{v, f(v)}$ angle format per v i la seva imatge $f(v)$ per la isometria associada a F . Per fer-ho, calculem $p = r \cap \tilde{\Pi}$, on $\tilde{\Pi}$ pla $\perp r$ que conté $q_1 = (1, 1, 1)$ i $q_2 = F(q_1) = (1, 1, 0)$. Usant que l'eix de rotació ve donat per $r = \{z = 1/2, x - y = 0\} = (0, 0, 1/2) + [(1, 1, 0)]$, obtenim $\tilde{\Pi} = \{x + y = 2\}$ i $p = (1, 1, 1/2)$. Per tant, $p = \Pi_r(q_1) = \Pi_r(q_2)$ (projecció ortogonal) i triem $v = q_1 - p = (0, 0, 1/2)$ i calculem $f(v) = F(q_1) - F(p) = q_2 - p = (0, 0, -1/2)$. L'angle és:

$$\cos \theta = \widehat{v, f(v)} = \frac{\langle (0, 0, 1/2), (0, 0, -1/2) \rangle}{\|(0, 0, 1/2)\| \cdot \|(0, 0, -1/2)\|} = -1 \implies \theta = \pi.$$

F és una simetria axial respecte de l'eix r i no ens cal orientar l'eix, ja que una rotació d'angle π o $-\pi$ és idèntica.

(Si fos $\theta \neq \pm\pi$ i orientem l'eix segons el vector u , llavors el signe de θ el triariem calculant el signe del determinant $\det(v, f(v), u)$ que, en aquest cas, en ser $\theta = \pm\pi$, dóna igual a zero.)

Usant $\theta = \pi$ i que l'eix de rotació és $r = q + [u]$ on $q = (0, 0, 1/2)$ i $u = (u_1, u_2, u_3) = (1, 1, 0)$, la matriu de la isometria associada és:

$$M = \cos \theta \cdot \text{Id}_3 + \frac{1 - \cos \theta}{u^\top u} u u^\top + \frac{\sin \theta}{\|u\|} \begin{pmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} (1 \ 1 \ 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Finalment, usant que $q = (0, 0, 1/2) \in r$ és un punt fix de F tenim la fórmula:

$$F(x, y, z) = q + M \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - q \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z - 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \\ -z + 1 \end{pmatrix}.$$

Exemple

F reflexió de $\mathbb{R}^3$ respecte del pla $\Pi = \{x - 2y - z = 2\}$. Calculeu $F(\Pi_1)$ on $\Pi_1 = \{x + y + z = 1\}$.

- **Opció 1.** Primerament, s'escriu Π_1 en forma explícita:

$$\Pi_1 = Q_1 + [v_1, v_2],$$

on Q_1 punt solució de l'equació de Π_1 i v_1, v_2 vectors linealment independents solucions l'equació homogènia $x + y + z = 0$ del subespai vectorial director de Π_1 . P. ex., podem triar:

$$Q_1 = (1, 0, 0), \quad v_1 = (1, 0, -1), \quad v_2 = (0, 1, -1).$$

Llavors, si denotem per f la isometria associada a F :

$$F(\Pi_1) = F(Q_1) + [f(v_1), f(v_2)].$$

Deixem aquesta opció com exercici.

- **Opció 2.** En ser Π_1 un pla, és més fàcil buscar $F(\Pi_1)$ de forma implícita (*1 equació*) que no de forma explícita (*1 punt i 2 vectors*). Concretament, busquem $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tals que:

$$F(\Pi_1) = \{ax + by + cz = d\}.$$

- ▶ $u_1 = (1, 1, 1) \perp \Pi_1$ via els coeficients de l'equació de Π_1 .
- ▶ F moviment preserva la perpendicularitat entre vectors $\implies f(u_1) \perp F(\Pi_1) \implies$ podem triar $(a, b, c) = f(u_1)$.
(Els vectors és transformen per la isometria associada a F .)
- ▶ $Q_1 = (1, 0, 0) \in \Pi_1$ solució equació $\Pi_1 \implies F(Q_1) \in F(\Pi_1)$.
- ▶ Si anomenem $(x_0, y_0, z_0) = F(Q_1)$, llavors podem calcular d per tal que $F(Q_1) \in F(\Pi_1)$ fent: $d = ax_0 + by_0 + cz_0$.

Per fer els càlculs anteriors, ens calen expressions per f i F .

- $u = (1, -2, -1) \perp \Pi$ pla de reflexió via els coeficients de la seva equació. Per tant:

$$f(v) = v - 2 \frac{\langle u, v \rangle}{\langle u, u \rangle} u = v - \frac{\langle (1, -2, -1), v \rangle}{3} (1, -2, -1).$$

- Tot punt P del pla de reflexió Π és punt fix de F . Via la seva equació, triem $P = (2, 0, 0) \in \Pi$. Fent $v = Q - (2, 0, 0)$ en f :

$$\begin{aligned} F(Q) &= P + f(Q - P) = (2, 0, 0) + f(Q - (2, 0, 0)) \\ &= Q - \frac{\langle (1, -2, -1), Q - (2, 0, 0) \rangle}{3} (1, -2, -1). \end{aligned}$$

Per tant:

- Si fem $v = u_1 = (1, 1, 1)$ en l'expressió de $f(v)$:

$$\begin{aligned} f(u_1) &= (1, 1, 1) - \frac{\langle (1, -2, -1), (1, 1, 1) \rangle}{3} (1, -2, -1) \\ &= (1, 1, 1) - \frac{(-2)}{3} (1, -2, -1) = \left(\frac{5}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{3} \right). \end{aligned}$$

Fem $(a, b, c) = (5, -1, 1)$ vector $\parallel f(u_1)$ treient 3 denominador.

- Si fem $Q = Q_1 = (1, 0, 0)$ en l'expressió de $F(Q)$:

$$\begin{aligned} F(Q_1) &= (1, 0, 0) - \frac{\langle (1, -2, -1), (1, 0, 0) - (2, 0, 0) \rangle}{3} (1, -2, -1) \\ &= (1, 0, 0) - \frac{\langle (1, -2, -1), (-1, 0, 0) \rangle}{3} (1, -2, -1) \\ &= (1, 0, 0) - \frac{(-1)}{3} (1, -2, -1) = \left(\frac{4}{3}, \frac{-4}{3}, \frac{-2}{3} \right) \end{aligned}$$

Fem $(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{4}{3}, \frac{-4}{3}, \frac{-2}{3} \right)$ (ara NO VAL treure el 3!!!).

Finalment, l'equació de $F(\Pi_1)$ és:

$$ax + by + cz = d \iff 5x - y + z = \frac{22}{3},$$

on:

- ▶ Triem $(a, b, c) = (5, -1, 1)$ (treiem el 3 del denominador).
- ▶ Triem $(x_0, y_0, z_0) = (\frac{4}{3}, \frac{-4}{3}, \frac{-2}{3}) \in F(\Pi_1)$ i calculem:

$$d = ax_0 + by_0 + cz_0 = 5 \cdot \frac{4}{3} - 1 \cdot \left(\frac{-4}{3}\right) + 1 \cdot \left(\frac{-2}{3}\right) = \frac{22}{3}.$$

Problema 21

1. Sigui F una simetria respecte un pla Π . Si $F(p) = q$ amb $p \neq q$, demostreu que el pla Π és perpendicular al vector $u = q - p$ i que conté al punt $(p + q)/2$.
2. F simetria respecte un pla Π tal que $F(1, 2, 3) = (3, 2, 2)$. Trobeu el pla de simetria i les equacions de F .

La part **1**. és gràficament clara (compareu amb el dibuix pla del problema 19). La part **2** la deixem com exercici (recordeu que tot punt de Π és punt fix de F). S'obté: $\Pi = \{2x - z = 3/2\}$, i $F(x, y, z) = (\frac{-3}{5}x + \frac{4}{5}z + \frac{6}{5}, y, \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}z - \frac{3}{5})$.

Exemple

Comproveu que el canvi de referència de $\mathbb{R}^2$ donat per la matriu

$$A_{\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{e}} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.6 & 1 \\ -0.6 & 0.8 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ és un canvi de referència ortonormal,}$$

i identifiqueu els seus elements característics com a moviment.

Considereu les referències afins $\mathbf{e}$ i $\mathbf{u}$ de $\mathbb{R}^2$ donades tot seguit:

$$\mathbf{e} = \{O = (0, 0); \mathbf{e}_1 = (1, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1)\} \quad (\text{ref. canònica}),$$

$$\mathbf{u} = \{Q = (1, 3); u_1 = (0.8, -0.6); u_2 = (0.6, 0.8)\}$$

La matriu $A_{\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{e}} = \left(\begin{array}{cc|c} M & & (Q)_{\mathbf{e}} \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$ del canvi de referència $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{e}$ és la de l'enunciat, on la matriu de canvi de base $M = M_{\{u_i\} \rightarrow \{e_i\}}$, donada per $M = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.6 \\ -0.6 & 0.8 \end{pmatrix}$, té per columnes les components dels vectors u_1, u_2 en base canònica.

M compleix $M^T M = \text{Id}_2$ i per tant és una matriu ortogonal:

$$M^T M = \begin{pmatrix} 0.8 & -0.6 \\ 0.6 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.8 & 0.6 \\ -0.6 & 0.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

on $d = 0.8^2 + 0.6^2 = 1 \implies \{u_1, u_2\}$ b.o.n. de $\mathbb{R}^2 \implies \mathbf{u} \rightarrow \mathbf{e}$ és un canvi de referència ortonormal $\implies A_{\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{e}}$ defineix F moviment de $\mathbb{R}^2$, on M matriu de la isometria f associada, de la forma:

$$\begin{pmatrix} F(x, y) \\ 1 \end{pmatrix} = A_{\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{e}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \iff F(x, y) = M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$\det(M) = 0.8^2 + 0.6^2 = 1 \implies f$ isometria directa $\implies f$ gir de centre $(0, 0)$ i angle θ . L'expressió $M = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ per la matriu d'un gir de $\mathbb{R}^2 \implies \cos \theta = 0.8$ i $\sin \theta = -0.6$. Per tant, $\theta = -\arccos(0.8)$ (4art. quadrant).

- ▶ En aquest punt, hem expressat F com una rotació d'angle θ entorn $(0, 0)$ seguida d'una translació pel vector $(1, 3)$.
- ▶ També podem expressar F com una rotació de $\mathbb{R}^2$ d'angle θ entorn de l'únic punt fix P de F . El punt $P = (x, y)$ compleix:

$$F(P) = P \iff M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Això dóna lloc al següent sistema d'equacions lineals:

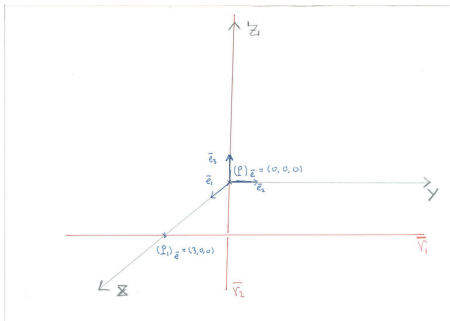
$$\left. \begin{array}{l} 0.8x + 0.6y + 1 = x \\ -0.6x + 0.8y + 3 = y \end{array} \right\} \iff \left. \begin{array}{l} 0.2x - 0.6y = 1 \\ 0.6x + 0.2y = 3 \end{array} \right\}$$

Resolent aquestes sistema (és recomenable multiplicar les dues equacions previament per 5), obtenim $P = (x, y) = (5, 0)$.

Problema 36

Trobeu una referència ortonormal directa de $\mathbb{R}^3$ en la qual la recta $r_1 = \{x + 2z = 4, y = 0\}$ sigui $\bar{r}_1 = \{X = 3, Z = 0\}$ i la recta $r_2 = \{2x - z = -2, 5x + 2y = 9\}$ sigui $\bar{r}_2 = \{X = 0, Y = 0\}$. Classifiqueu el canvi de referència com a moviment i trobeu els seus elements característics.

(x, y, z) coordenades en la referència canònica $\mathbf{e} = \{O; e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ i (X, Y, Z) coordenades en la nova referència ortonormal directa $\bar{\mathbf{e}} = \{P; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$. Fem un dibuix en referència $\bar{\mathbf{e}}$:



De la figura constatem (recordem que els canvis de referència ortonormals preserven angles, normes i distàncies):

- (i) $\bar{r}_1 \perp \bar{r}_2$ en ref. $\bar{\mathbf{e}} \implies$ ha de ser cert $r_1 \perp r_2$ en ref. $\mathbf{e}$.
- (ii) $d(\bar{r}_1, \bar{r}_2) = 3$ en ref. $\bar{\mathbf{e}} \implies$ ha de ser $d(r_1, r_2) = 3$ en ref. $\mathbf{e}$.
- (iii) Els punts $P_1 \in \bar{r}_1$ i $P_2 \in \bar{r}_2$ donant la mínima distància entre $\bar{r}_1$ i $\bar{r}_2$ són $(P_1)_{\bar{\mathbf{e}}} = (3, 0, 0) \in \bar{r}_1$ i $(P_2)_{\bar{\mathbf{e}}} = (0, 0, 0) \in \bar{r}_2 \implies$ l'origen P de la ref. $\bar{\mathbf{e}}$ és $P = P_2 \in \bar{r}_2 \implies$ si en ref. $\mathbf{e}$ la mínima distància s'obté per $P_1 \in r_1, P_2 \in r_2$, triem $P = P_2$.
- (iv) En referència $\bar{\mathbf{e}}$, tenim $\bar{\mathbf{e}}_1 = \frac{P_1 - P_2}{\|P_1 - P_2\|} = \frac{P_1 - P}{3}$ i $\bar{\mathbf{e}}_2$ vector director unitari de $\bar{r}_2$, i $\bar{\mathbf{e}}_3 = \bar{\mathbf{e}}_1 \wedge \bar{\mathbf{e}}_2$ (base ortonormal directa). Aquestes expressions també són vàlides també en referència $\mathbf{e}$. (També podem calcular $\bar{\mathbf{e}}_3$ com a vector director unitari de $\bar{r}_2$ si ens assegurem de que la base $\{\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3\}$ sigui directa.)

Sumari del càlculs que hem de fer en ref. $\mathbf{e}$:

- Calcular u_1, u_2 vectors directors de r_1, r_2 i $P_1 \in r_1, P_2 \in r_2$ donant la mínima distància. Ha de ser cert $u_1 \perp u_2$ i $\|P_1 - P_2\| = 3$.
- Triem $P = P_2$, $\bar{\mathbf{e}}_1 = \frac{P_1 - P_2}{3}$, $\bar{\mathbf{e}}_2 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$, $\bar{\mathbf{e}}_3 = \bar{\mathbf{e}}_1 \wedge \bar{\mathbf{e}}_2$.
(Ha de ser cert $\bar{\mathbf{e}}_3 = \pm u_2 / \|u_2\|$.)

- ▶ $u_1 = (-2, 0, 1)$ solució de $\{x + 2z = 0, y = 0\}$.
 $u_2 = (2, -5, 4)$ solució de $\{2x - z = 0, 5x + 2y = 0\}$.
 (Equacions dels s.e.v.'s directors de r_1, r_2 .)

És clar que $u_1 \perp u_2$.

- ▶ $Q_1 = (4, 0, 0) \in r_1$ solució de $\{x + 2z = 4, y = 0\}$ i busquem $P_1 = Q_1 + \lambda u_1 = (4 - 2\lambda, 0, \lambda)$, per un cert $\lambda \in \mathbb{R}$.
- ▶ $Q_2 = (1, 2, 4) \in r_2$ solució de $\{2x - z = -2, 5x + 2y = 9\}$ i busquem $P_2 = Q_2 + \mu u_2 = (1 + 2\mu, 2 - 5\mu, 4 + 4\mu)$, per un cert $\mu \in \mathbb{R}$.
- ▶ P_1, P_2 han de complir que $P_1 - P_2 \perp u_1, u_2$. Usant que:
 $P_1 - P_2 = (3 - 2\lambda - 2\mu, -2 + 5\mu, -4 + \lambda - 4\mu)$, s'obté:

$$0 = \langle P_1 - P_2, u_1 \rangle = -2(3 - 2\lambda - 2\mu) + 1(-4 + \lambda - 4\mu)$$

$$0 = \langle P_1 - P_2, u_2 \rangle = 2(3 - 2\lambda - 2\mu) - 5(5\mu - 2) + 4(-4 + \lambda - 4\mu)$$

D'on: $5\lambda = 10, -45\mu = 0 \implies \lambda = 2, \mu = 0$. Per tant:

$$P_1 = (0, 0, 2), P_2 = (1, 2, 4).$$

$$\text{Així: } P_1 - P_2 = (-1, -2, -2) \implies d(r_1, r_2) = \|P_1 - P_2\| = 3.$$

► Triem: $P = P_2 = (1, 2, 4)$, i:

$$\bar{e}_1 = \frac{P_1 - P_2}{3} = \frac{(-1, -2, -2)}{3}, \quad \bar{e}_2 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{(-2, 0, 1)}{\sqrt{5}},$$

$$\bar{e}_3 = \bar{e}_1 \wedge \bar{e}_2 = \frac{(-2, 5, -4)}{3\sqrt{5}} \parallel u_2 = (2, -5, 4).$$

La matriu del canvi de coordenades ortogonal és $A = A_{\bar{e} \rightarrow e}$:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & (P)_e \\ M & & & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} & 1 \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & 2 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

on $M = M_{\{\bar{e}_i\} \rightarrow \{e_i\}}$ té per columnes les components de $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$.

$\{\bar{e}_i\}$ base ortonormal directa $\implies \det M = 1 \implies M$ isometria

directa $\implies M$ gir de centre $(0, 0, 0)$ respecte d'un cert eix $[u]$ i

d'un cert angle $\theta \implies A$ moviment definit com el gir M seguit

d'una translació donada per $(P)_{\bar{e}}$.

L'eix de gir de M ve donat per $u = (x, y, z)$ VEP de $VAP=1$ de M :

$$(M - \text{Id}) u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & -1 & \frac{3\sqrt{5}}{5} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{3\sqrt{5}}{4} - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Les tres equacions per (x, y, z) són l.d. Ens quedem amb les dues primeres que sí són l.i. Aquestes dues equacions ens diuen que $u = (x, y, z)$ és $\perp$ als dos primers vectors filera de $M - \text{Id}$.

Multiplicant la primera fila per $-\frac{3\sqrt{5}}{2}$ i la segona per $-3\sqrt{5}$, triem u a partir el producte vectorial dels vectors filera resultants:

$$u = \frac{1}{3} (2\sqrt{5}, 3, 1) \wedge (2\sqrt{5}, 3\sqrt{5}, -5) = (-5 - \sqrt{5}, 4\sqrt{5}, 10 - 2\sqrt{5}).$$

L'angle θ del gir compleix:

$$\cos \theta = \frac{\text{tr}(M) - 1}{2} = -\frac{2}{3} - \frac{2}{3\sqrt{5}} \approx -0.9648.$$

Per tant, $\theta \approx \pm \arccos(-0.9648) \approx \pm 2.8755 \text{ rad}..$

Queda només decidir el signe de θ si orientem l'eix de gir segons $u = (-5 - \sqrt{5}, 4\sqrt{5}, 10 - 2\sqrt{5})$. Per fer-ho, triem $w \in \mathbb{R}^3$ vector qualsevol, $w \notin [u]$, i calculem $\sigma = \det(w, M w, u)$. El signe de σ determina el signe de θ . Concretament, triem $w = e_2 = (0, 1, 0)$ i obtenim que $M w = M e_2$ ve donat per la segona columna de la matriu M . Per tant, $\sigma = \det(e_2, M e_2, u)$ dóna com a resultat:

$$\sigma = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} & -5 - \sqrt{5} \\ 1 & 0 & 4\sqrt{5} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & 10 - 2\sqrt{5} \end{vmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{vmatrix} -2 & -5 - \sqrt{5} \\ 1 & 10 - 2\sqrt{5} \end{vmatrix} = \frac{5(3 - \sqrt{5})}{\sqrt{5}} > 0.$$

Així doncs, hem de triar $\theta > 0$ que, de fet, viu a l'interval $(\pi/2, \pi)$.