(32) Trobeu la referència ortonormal de $\mathbb{R}^3$ t.q.:

(i) tingui origen a $P=(0,1,2)$; (ii) tingui eixos $\bar{X}, \bar{Y}$ paral·lels a $u_1=(1,-1,2)$, $u_2=(1,1,0)$, resp.; (iii) sigui directa.

Quin és l'eix i angle de rotació de la isometria d'aquest canvi de referència.

- La referència és $\bar{R}=\{P;\bar{u}_1,\bar{u}_2,\bar{u}_3\}$ on

$$\bar{u}_1=\frac{u_1}{\|u_1\|}=\frac{(1,-1,2)}{\sqrt{6}}, \quad \bar{u}_2=\frac{u_2}{\|u_2\|}=\frac{(1,1,0)}{\sqrt{2}} \quad \left(\begin{matrix}\text{observem}\\ \bar{u}_1\perp\bar{u}_2\end{matrix}\right)$$

$$\bar{u}_3=\bar{u}_1\wedge\bar{u}_2=\frac{u_1\wedge u_2}{\|u_1\wedge u_2\|}=\frac{(-1,1,1)}{\sqrt{3}}$$

- Si $e=\{O=(0,0,0);\ e_1=(1,0,0), e_2=(0,1,0), e_3=(0,0,1)\}$ és la ref. canònica de $\mathbb{R}^3$, llavors la matriu de canvi de ref. $\bar{R}\to e$ és:

$$A_{\bar{R}\to e}=\left(\begin{array}{ccc|c} & M_{\{\bar{u}_i\}\to\{e_i\}} & & (P)_e \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \text{ on } M_{\{\bar{u}_i\}\to\{e_i\}}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3}\\ 2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

$$(P)_e=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$$

Donat que $M_{\{\bar{u}_i\}\to\{e_i\}}$ és la matriu d'una isometria directa és clar que $A_{\bar{R}\to e}$ correspon a una rotació en $\mathbb{R}^3$ d'un cert eix seguida d'una translació per un vector paral·lel a l'eix. El s.e.v. de l'eix de rotació ve donat pels vectors propis de valor propi $\lambda=1$ de $M_{\{\bar{u}_i\}\to\{e_i\}}$.

Així, busquem $u=(x,y,z)\in\operatorname{Ker}(M_{\{\bar{u}_i\}\to\{e_i\}}-Id)$:

$$(M_{\{\bar{u}_i\}\to\{\bar{e}_i\}} - Id)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} (1/\sqrt{6} - 1)x + y/\sqrt{2} - z/\sqrt{3} = 0 & (eq_1) \\ -1/\sqrt{6}\,x + (\frac{1}{\sqrt{2}} - 1)y + 2z/\sqrt{3} = 0 & (eq_2) \\ 2/\sqrt{6}\,x + (\frac{1}{\sqrt{3}} - 1)z = 0 & (eq_3) \end{cases}$$

És clar que les 3 equacions han de ser l.d. De fet:

$$(eq_3) \Rightarrow x = \frac{\sqrt{6}}{2}(1 - \frac{1}{\sqrt{3}})z = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}}z = \frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{6}}z$$

$\sqrt{2}\sqrt{6}\sqrt{3} = 6$; $\sqrt{2}\sqrt{6} = 2\sqrt{3}$

$$\Downarrow$$

$$(eq_1) \Rightarrow y = \sqrt{2}\left\{(1 - \frac{1}{\sqrt{6}})x + \frac{z}{\sqrt{3}}\right\} = \sqrt{2}\left\{(1 - \frac{1}{\sqrt{6}})(\frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{6}}) + \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}z =$$

$$= \frac{2\sqrt{2}\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\left\{\frac{1}{\sqrt{6}}(3 - \sqrt{3} - 3/\sqrt{6} + 1/\sqrt{2}) + \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}z =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}}\left\{(6 - 2\sqrt{3} - 6/\sqrt{6} + 2/\sqrt{2}) + 2\sqrt{2}\right\}z = \frac{6 - 2\sqrt{3} - \sqrt{6} + 3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}z$$

$\frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$, $\frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

Si no hi ha (ni fem!) cap error de càlcul, si substituim les expressions de x, y en funció de z en (eq_1) aquesta equació esdevé trivial.

Fent $z = 1$ obtenim: $u = \left(\frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{6}}, \frac{6-2\sqrt{3}-\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}, 1\right)$

- Per calcular l'angle de rotació usem:

$$\cos\theta = \frac{tr(M_{\{\bar{u}_i\}\to\{\bar{e}_i\}}) - 1}{2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - 1}{2} \simeq 0.3464$$

d'on $\theta \overset{(A)}{=} \arccos(0.3464) \simeq 1.2171\,rad \simeq 69.74°$ o bé

$\theta \overset{(B)}{=} (2\pi - 1.2171)\,rad \simeq 360° - 69.74° \simeq 5.0661\,rad \simeq 296.26°$

Per saber si la solució correcta és (A) o (B) triem $v \notin [u]$ (v no paral·lel a l'eix) i Calculem $\delta = \det(v, M_{\{\bar{u}_i\} \to \{e_i\}} v, u)$

Si $\delta > 0 \Rightarrow$ (A) $\theta \simeq 69.74^\circ$, Si $\delta < 0 \Rightarrow$ (B) $\theta \simeq 296.26^\circ$

triem $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ i $M_{\{\bar{u}_i\} \to \{e_i\}} v = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

Llavors:

$$\delta = \begin{vmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & * \\ 1 & -1/\sqrt{2} & * \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{2}} < 0 \Rightarrow \theta \simeq 296.26^\circ$$