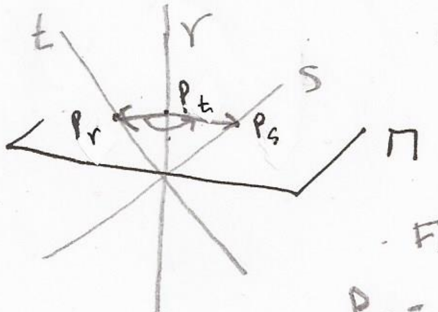
(29) f rotació de $\mathbb{R}^3$ amb eix la recta $t=\{x=y+z=0\}$ orientada pel vector $u=(0,1,-1)$. Sabem que la recta $r=\{x+y-1=y+z=0\}$ es mou a la recta $s=\{x+\sqrt{2}(y-1)=$ $=3y+z-2=0\}$. Trobeu la matriu de f en base canònica.

L'eix de f passa pel $(0,0,0) \Rightarrow f$ és una isometria

Les tres rectes es tallen en un mateix punt $P=(0,1,-1)$.

Considerem Π un pla perpendicular a t i siguin $P_t=\Pi\cap t$, $P_r=\Pi\cap r$ i $P_s=\Pi\cap s$. Aleshores, és clar que $f(P_r)=P_s$. Llavors,



a partir de la fórmula que ens dóna la matriu d'una rotació d'eix $u=(0,1,-1)$, aquesta condició ens l'hauria de determinar.

Fem $\Pi=\{y-z=0\}\perp t$ per $P_t=(0,0,0)$

$P_r=(1,0,0)$ i $P_s=(\sqrt{2}/2, 1/2, 1/2)$ [observeu $\|P_r\|=\|P_s\|$]

Usant $u^Tu=2$, $\|u\|=\sqrt{2}$, $u\cdot u^T=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}$ es té que $M=M_{\{e_i\}}(f)$:

$$M=\cos\theta\cdot Id_3+\frac{1-\cos\theta}{u^Tu}u\cdot u^T+\frac{\sin\theta}{\|u\|}\begin{pmatrix}0&-u_3&u_2\\u_3&0&-u_1\\-u_2&u_1&0\end{pmatrix}=\cos\theta\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\frac{1-\cos\theta}{2}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}$$

$$+\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1&1\\-1&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta/\sqrt{2}&\sin\theta/\sqrt{2}\\-\sin\theta/\sqrt{2}&(\cos\theta+1)/2&(\cos\theta-1)/2\\-\sin\theta/\sqrt{2}&(\cos\theta-1)/2&(\cos\theta+1)/2\end{pmatrix}$$

$$f(P_r)=MP_r=M\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta\\-\sin\theta/\sqrt{2}\\-\sin\theta/\sqrt{2}\end{pmatrix}=P_s=\begin{pmatrix}\sqrt{2}/2\\1/2\\1/2\end{pmatrix}\Rightarrow \begin{array}{l}\cos\theta=\sqrt{2}/2\\ \sin\theta=-\sqrt{2}/2\\ \theta=-\pi/4\end{array}$$

Així:

$$M=\begin{pmatrix}\sqrt{2}/2&-1/2&-1/2\\1/2&(\sqrt{2}+2)/4&(\sqrt{2}-2)/4\\1/2&(\sqrt{2}-2)/4&(\sqrt{2}+2)/4\end{pmatrix}$$