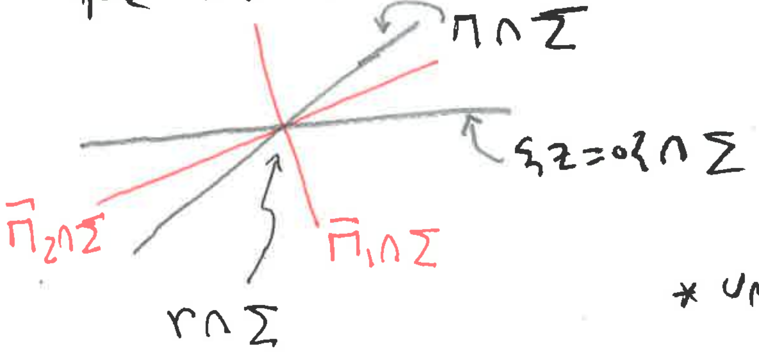
22) Trobeu una reflexió que porti el pla $\Pi = \{2x-y-z=4\}$ sobre el pla $z=0$.

- És clar que $\Pi \cap \{z=0\}$ és una recta $r = \left\{ \begin{array}{l} 2x-y=4 \\ z=0 \end{array} \right\}$ que ha de formar part del pla $\overline{\Pi}$ de la reflexió.
- Si tallem Π, $\{z=0\}$ i $\overline{\Pi}$ per un pla $\Sigma \perp r$, obtenim el següent esquema, en què constatem que hi ha dues possibles solucions per $\overline{\Pi}$ ($\overline{\Pi}_1$ i $\overline{\Pi}_2$) que són les bisectrius de $\Pi \cap \Sigma$ i $\{z=0\} \cap \Sigma$.



- Per trobar $\overline{\Pi}_1$ i $\overline{\Pi}_2$ ens cal (elements comuns als dos plans):
  * un punt $p \in r$, p.ex. $p=(2,0,0)$.
  * un vector u director de r, p.ex. $u=(1,2,0)$. (solució $\begin{array}{l} 2x-y=0 \\ z=0 \end{array}$)

- Per trobar un altre vector director per $\overline{\Pi}_1$ i $\overline{\Pi}_2$, ens calen vectors directors de Π i $\{z=0\}$ $\perp u$. Així:

Si $v=(x,y,z)$ vector director de Π i $\perp (1,2,0)$, compleix:

$\left. \begin{array}{l} 2x-y-z=0 \\ x+2y=0 \end{array} \right\}$ p.ex. fent $y=1 \Rightarrow (x,y,z)=(-2,1,-5)$

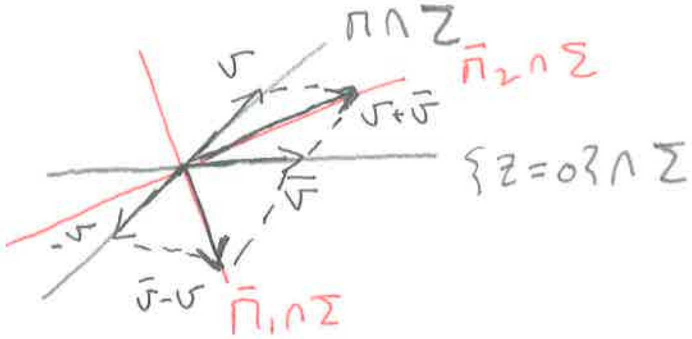
si el normalitzem: $v = \dfrac{(-2,1,-5)}{\sqrt{30}}$

Si $\bar{v}=(x,y,z)$ vector director de $z=0$ i $\perp (1,2,0)$, compleix:

$\left. \begin{array}{l} z=0 \\ x+2y=0 \end{array} \right\}$ p.ex., fent $y=1 \Rightarrow (x,y,z)=(-2,1,0)$

si el normalitzem: $\bar{v} = \dfrac{(-2,1,0)}{\sqrt{5}}$

Llavors com que $\overline{\Pi}_1 \cap \Sigma$ i $\overline{\Pi}_2 \cap \Sigma$ són bisectrius de $\Pi \cap \Sigma$ i $\{z=0\} \cap \Sigma$, podem obtenir vectors directors de $\overline{\Pi}_1$ i $\overline{\Pi}_2$ com segueix:



(és molt important que v i $\bar{v}$ tinguin la mateixa longitud!!

$$v+\bar{v} = \frac{(-2,1,-5)}{\sqrt{30}} + \frac{(-2,1,0)}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}-2, \frac{1}{\sqrt{6}}+1, -\frac{5}{\sqrt{6}}\right)$$

$$\bar{v}-v = \frac{(-2,1,0)}{\sqrt{5}} - \frac{(-2,1,-5)}{\sqrt{30}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{2}{\sqrt{6}}-2, -\frac{1}{\sqrt{6}}+1, +\frac{5}{\sqrt{6}}\right)$$

Així:

- $\bar{\Pi}_1$ pla per $p=(2,0,0)$ i ~~s.e.v.~~ v. director $[u, \bar{v}-v] =$
  $= [(1,2,0), \underbrace{(2/\sqrt{6}-2, -1/\sqrt{6}+1, -5/\sqrt{6})}_{\text{treiem } 1/\sqrt{5}}]$

  Fem $(1,2,0) \wedge (2/\sqrt{6}-2, -1/\sqrt{6}+1, +5/\sqrt{6}) = \underbrace{\left(+\frac{10}{\sqrt{6}}, -\frac{5}{\sqrt{6}}, 5-\frac{5}{\sqrt{6}}\right)}_{= +\frac{5}{\sqrt{6}}(2,-1,\sqrt{6}-1)}$

  Per tant l'eq. de $\bar{\Pi}_1$ és:

  $2x - y + (\sqrt{6}-1) = \underset{\text{per t.q. } p \in \bar{\Pi}_1}{4}$

- $\bar{\Pi}_2$ pla per $P=(2,0,0)$ i s.e.v. director $[u, v+\bar{v}] =$
  $= [(1,2,0), \underbrace{(-2/\sqrt{6}-2, 1/\sqrt{6}+1, -5/\sqrt{6})}_{\text{treiem } 1/\sqrt{5}}$

  Fem $(1,2,0) \wedge (-2/\sqrt{6}-2, +1/\sqrt{6}+1, -5/\sqrt{6}) = \underbrace{\left(-\frac{10}{\sqrt{6}}, \frac{5}{\sqrt{6}}, 5+\frac{5}{\sqrt{6}}\right)}_{= -\frac{5}{\sqrt{6}}(2,-1,-\sqrt{6}-1)}$

  Per tant l'eq. de $\bar{\Pi}_2$ és:

  $2x - y - (\sqrt{6}+1)z = \underset{\text{per tal que } p \in \bar{\Pi}_2}{4}$