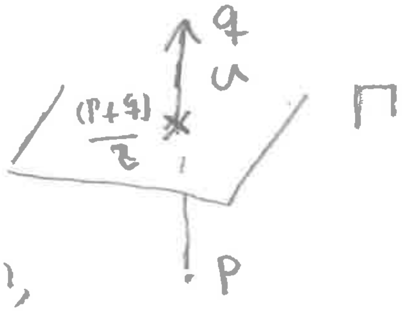
(21) (i) Sigui F una simetria resp. un pla Π. Si $F(p)=q$ demostrar que el pla Π és $\perp$ al vector $u=q-p$ i que conté el punt $(p+q)/2$.

· obvi, veure dibuix



(ii) Si F és una simetria resp. un pla Π t.q. $F(1,2,3)=(3,2,2)$, trobar el pla de simetria i les equacions de F.

Usem (i) amb $p=(1,2,3)$, $q=(3,2,2)$; $u=q-p=(2,0,-1)$ i $\frac{p+q}{2}=(2,1,5/2)$. Així:

$$\Pi \equiv \underbrace{2x-z}_{\text{via coefs. } u} = d \quad \text{i} \quad d \underset{(2,1,5/2)\in\Pi}{\uparrow}{=} 2\cdot 2+0\cdot 1-1\cdot 5/2 = 3/2$$

les eq. de F són:

$$F(x,y,z) = \underbrace{(2,1,5/2)}_{\frac{p+q}{2} \text{ punt fix } F} + f\big((x,y,z)-(2,1,5/2)\big)$$

on f és la isomètria associada a F, és simetria especular resp. s.e.v. $\perp$ a $u=(2,0,-1)$, de matriu:

$$M_{\{e_i\}}(f) = Id - \frac{2}{u^Tu}uu^T \underset{u^Tu=\langle u,u\rangle=5}{\uparrow}{=} \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} - \frac{2}{5}\begin{pmatrix}4&0&-2\\0&0&0\\-2&0&1\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-3&0&4\\0&5&0\\4&0&3\end{pmatrix}$$

d'on:

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix}2\\1\\5/2\end{pmatrix} + \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-3&0&4\\0&5&0\\4&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-2\\y-1\\z-5/2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3/5\,x + 4/5\,z + 6/5\\ y\\ 4/5\,x + 3/5\,z - 3/5\end{pmatrix}$$