(13) Fem una rotació d'angle $\theta = \pi/3$ entorn de la recta $S = \{x-2y+z=2,\ x-3y=0\}$. Calculem les imatges

(i) del punt $Q=(4,0,3)$ (ii) de la recta $r=(4,0,3)+[(3,-2,-4)]$

(iii) del pla $\Pi = \{-2x-37y+17z=43\}$

Sigui F el moviment de l'enunciat i f la isometria associada, donada per la rotació d'angle $\theta=\pi/3$ entorn del s.e.v. d'equacions $\{x-2y+z=0,\ x-3y=0\}$. Com que l'enunciat no orienta l'eix S ho farem nosaltres.

Ens cal:

- Un vector u director de S solució de les equacions homogènies. Fent $y=1$ obtenim $\left\{\begin{array}{l} x=3y=3 \\ z=2y-x=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow u=(3,1,-1)$

  orientem l'eix per u.

- Un punt P ~~de~~ S solució de les equacions de la recta.

  Fem $x=0 \Rightarrow y=0 \Rightarrow z=2 \Rightarrow P=(0,0,2)$.

- Usant $u=(3,1,-1)$, $\langle u,u\rangle = u^T \cdot u = 11$, $\|u\|=\sqrt{11}$,

  $\theta=\pi/3$, $\cos\theta = 1/2$, $\sin\theta = \sqrt{3}/2$, es té:

$$f(v) = \cos\theta \cdot v + (1-\cos\theta)\frac{\langle u,v\rangle}{\langle u,u\rangle}u + \frac{\sin\theta}{\|u\|}(u\wedge v)$$

$$= \frac{1}{2}v + \frac{1}{22}\langle u,v\rangle \cdot u + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{11}}(u\wedge v)$$

- Finalment, usant que $P\in S$ és punt fix de F

$$F(Q) = P + f(\underbrace{Q-P}_{=v}) = (0,0,2) + f(Q-(0,0,2))$$

$v \leftarrow$ substituïm $v = Q-P$ en la fórmula anterior

(i) $Q=(4,0,3)$

$F(Q)=(0,0,2)+f(Q-(0,0,2))=(0,0,2)+f(4,0,1).$

$$f(4,0,1)=\frac{1}{2}(4,0,1)+\frac{1}{22}<(3,1,-1),(4,0,1)>(3,1,-1)+\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{11}}(3,1,-1)\wedge(4,0,1)$$

$$=\left(2,0,\tfrac{1}{2}\right)+\frac{1}{22}\cdot 11\cdot(3,1,-1)+\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{11}}(1,-7,-4)=$$

$$=\left(\tfrac{7}{2},\tfrac{1}{2},1\right)+\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{11}}(1,-7,-4)$$

Finalment: $F(Q)=\frac{1}{2}(7,1,6)+\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{11}}(1,-7,-4)$

(ii) observem que $r=Q+[v]$, on Q és el de (i) i $v=(3,-2,-4)$. Per tant:

$$F(r)=F(Q)+[f(v)],$$

on:

$$f(v)=\frac{1}{2}(3,-2,-4)+\frac{1}{22}<(3,1,-1),(3,-2,-4)>(3,1,-1)+$$

$$+\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{11}}(3,1,-1)\wedge(3,-2,-4)=$$

$$=\frac{1}{2}(3,-2,-4)+\frac{11}{22}(3,1,-1)+\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{11}}(-6,9,-9)=$$

$$=\frac{1}{2}(6,-1,-5)+\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{11}}(-2,3,-3)$$

(iii) observem que $Q=(4,0,3)\in\Pi$ ja que verifica la seva eq.: $-2\cdot 4-37\cdot 0+17\cdot 3=43$. Per trobar l'equació de $F(\Pi)$ considerem el vector $v=(-2,-37,17)\perp\Pi$ definit via els coeficients de Π. En ser F un moviment i f isometria associada, sabem $f(v)\perp F(\Pi)$. Concretament:

$$f(v)=\frac{1}{2}(-2,-37,17)+\frac{1}{22}<(3,1,-1),(-2,-37,17)>(3,1,-1)+$$

$$+\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{11}}(3,1,-1)\wedge(-2,-37,17)=\frac{1}{2}(-2,-37,17)-\frac{60}{22}(3,1,-1)+\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{11}}(-20,-49,-109)$$

$$=\frac{1}{22}(-202,-467,247)+\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{11}}(-20,-49,-109)=(a,b,c)$$

Finalment, l'equació de $F(\Pi)$ és $ax+by+cz=d$ on $d=a\cdot x_0+b\cdot y_0+c z_0$, essent $F(Q)=(x_0,y_0,z_0)$