(8) Sigui g_1 la rotació d'eix orientat $[(1,1,0)]$ i angle $\pi/2$, i g_2 la rotació d'eix orientat $[(-1,1,1)]$ i angle $2\pi/3$. Justifiqueu que $g_2 \circ g_1$ és una isometria i trobeu-ne els elements característics.

- Orientem g_1 segons $u_1 = (1,1,0)$. La seva matriu és:

$$M_1 = M_{\{e_i\}}(g_1) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot Id_3 + \frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{u_1^T\cdot u_1} u_1\cdot u_1^T + \frac{\sin(\pi/2)}{\|u_1\|}\begin{pmatrix} 0 & -u_{1,3} & u_{1,2} \\ u_{1,3} & 0 & -u_{1,1} \\ -u_{1,2} & u_{1,1} & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{u_1\cdot u_1^T} + \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$, on $u_1^T\cdot u_1 = \langle u_1, u_1\rangle = 2$, $\|u_1\| = \sqrt{2}$

- Orientem g_2 segons $u_2 = (-1,1,1)$. La seva matriu és:

$$M_2 = M_{\{e_i\}}(g_2) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cdot Id_3 + \frac{1-\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)}{u_2^T\cdot u_2} u_2\cdot u_2^T + \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)}{\|u_2\|}\begin{pmatrix} 0 & -u_{2,3} & u_{2,2} \\ u_{2,3} & 0 & -u_{2,1} \\ -u_{2,2} & u_{2,1} & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{3/2}{3}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{u_2\cdot u_2^T} + \frac{\sqrt{3}/2}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$u_2^T\cdot u_2 = \langle u_2, u_2\rangle = 3$
$\|u_2\| = \sqrt{3}$

- La matriu de $g_2 \circ g_1$ és

$$M = M_{\{e_i\}}(g_2\circ g_1) = M_{\{e_i\}}(g_2)\cdot M_{\{e_i\}}(g_1) = M_2\cdot M_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & -1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

- És clar que M és matriu ortogonal en quan és producte de matrius ortogonals. A més $\det(M) = 1$ ja que $\det(M_1) = \det(M_2) = 1$. Per tant M és la matriu d'una isometria directa de $\mathbb{R}^3$: gir d'eix $[u]$, orientat per $u \in \mathbb{R}^3$ i d'angle θ.

$u=(x,y,z)$ és vep de vap $\lambda=1$ de M

$$(M-\lambda\, Id)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \iff \underbrace{\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-3 & -1 & \sqrt{2}\\ -\sqrt{2} & \sqrt{2}-2 & 0\\ -1 & -1 & -\sqrt{2}-2\end{pmatrix}}_{\text{Té determinant}=0}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Com les tres equacions són linealment dependents considerem les dues primeres:

$$-3x-y+\sqrt{2}\,z=0 \quad\longrightarrow\quad -3(1-\sqrt{2})y-y+\sqrt{2}\,z=0 \Rightarrow (-4+3\sqrt{2})y+\sqrt{2}\,z=0$$

$$-\sqrt{2}\,x+(\sqrt{2}-2)y=0 \longrightarrow x=\frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}}\,y=(1-\sqrt{2})\,y$$

Per tant $z=\dfrac{4-3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\,y=(2\sqrt{2}-3)\,y$

Fent $y=1 \Rightarrow u=(x,y,z)=(1-\sqrt{2},\,1,\,2\sqrt{2}-3)$

L'angle θ de rotació compleix:

$$\cos\theta=\frac{tr(M)-1}{2}\underset{trM=-1/2}{=}\frac{-1/2-1}{2}=-3/4 \Rightarrow \theta=\pm\arccos(-3/4)\simeq\pm 2{,}4188\text{ rad.}$$

Per determinar el signe $\pm$ de θ triem $v=(0,0,1)$ i calculem

$$\delta=\det(v,\underbrace{Mv}_{\substack{\text{3a columna}\\ \text{de } v}},u)=\begin{vmatrix}0 & \sqrt{2}/2 & 1-\sqrt{2}\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & -\sqrt{2}/2 & 2\sqrt{2}-3\end{vmatrix}=\frac{\sqrt{2}}{2}>0 \Rightarrow \text{triem } \theta \text{ amb signe } +.$$