

7(ciii) Donem les equacions d'un endomorfisme f que és la composició d'una rotació de $\pi/4$ al voltant de la recta $z=0, x=y=0$ seguida d'una simetria ortogonal respecte del pla ortogonal a la recta anterior.

La matriu d'una isometria de $\mathbb{R}^3$ definida per una rotació d'angle θ entorn l'eix $[u]$, orientat per u , seguida d'una reflexió respecte el pla $[u]^\perp$, perpendicular a l'eix, és:

$$M = \cos \theta \cdot \text{Id}_3 + \frac{-1 - \cos \theta}{u^T \cdot u} u \cdot u^T + \frac{\sin \theta}{\|u\|} \begin{pmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{pmatrix}$$

triem $u = (1, 1, 0)$ solució equacions eix per orientar-lo.

tenim $\theta = \pi/4 \Rightarrow \cos \theta = \sin \theta = \sqrt{2}/2$, $u^T u = \langle u, u \rangle = 2$,

$\|u\| = \sqrt{2}$, $u \cdot u^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} (1 \ 1 \ 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Així:

$$\begin{aligned} M &= \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{-1 - \sqrt{2}/2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \sqrt{2}-2 & -\sqrt{2}-2 & 2 \\ -\sqrt{2}-2 & \sqrt{2}-2 & -2 \\ -2 & 2 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Per tant, les equacions (expresses en coordenades) de l'endomorfisme són $f(x, y, z) = M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ donades per:

$$f(x, y, z) = \left(\frac{\sqrt{2}-2}{4} x - \frac{\sqrt{2}+2}{4} y + \frac{1}{2} z, -\frac{\sqrt{2}+2}{4} x + \frac{\sqrt{2}-2}{4} y - \frac{1}{2} z, -\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} z \right)$$